

半古典論と準位統計^{*)}

佐野 光貞

京都大学総合人間学部基礎科学科¹

(1997 年 1 月 20 日受理)

Abstract

この小論では、いわゆる量子カオス系と呼ばれる系に現れるエネルギー準位の統計性を半古典論による解析的な扱いによって、どこまで説明できるかを示す。ここで、示される事は、主に MIT のグループ [29, 30] と Bogomolny と Keating[46] によって示されたことである。しかし、彼らの結果を他の準位統計（準位曲率分布）の半古典的な導出に用いる時にある困難に直面し、これが Berry の半古典和則の成立と関係した問題であって、周期軌道の微妙な性質を考慮に入れることが重要であることが理解される。

目 次

1	初めに	662
2	半古典論による解析	664
2.1	古典力学についての基本的な事柄	664
2.1.1	安定性解析	665
2.1.2	カオスの定義	667
2.2	Gutzwiller トレース公式	667
2.2.1	可積分系の半古典量子化	669
2.2.2	カオス系の半古典量子化：Gutzwiller トレース公式の導出	670
2.2.3	Riemann ゼータ関数	674
2.3	量子カオス系の特徴	675
2.3.1	準位統計	675
2.3.2	特徴的な時間スケール	
2.3.3	固有波動関数の統計性	677
3	二点準位相関関数、Spectral form factor	679
3.1	周期軌道間の相関 [39]	681
3.2	MIT グループの結果 [29, 30]	683
3.3	Bogomolny と Keating の結果 [46]	684
3.4	ランダム行列論との比較	686
4	半古典和則 [35, 44, 45]	687

¹ 〒 606-01 京都市左京区吉田二本松町 京都大学 総合人間学部 基礎科学科 情報科学論講座
E-mail address : sano@phys.h.kyoto-u.ac.jp

^{*)} 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

5 準位速度・準位曲率とそれらの分布

693

6 まとめ

700

1 初めに

この小論を読むにあたって一つ注意しておくことがある。それは、いわばこの小論を服用するにあたっての服用上の注意である。

内服薬

主成分：周期軌道論

服用上の注意

1. 量子論・古典論・半古典論の三つの理論に精通していることがこの薬を飲むための条件です。基礎体力不足を感じる方は服用を避けて下さい。
2. カオス・アレルギー、半古典論アレルギー、或は、周期軌道アレルギーのある方は医師の指示に従って下さい。
3. 服用すると常習性の量子カオス・オタク或は周期軌道マニアになる可能性があります。

さて、冗談と脅しは止して早速本論に入ろう。

古典的にカオティックな系の量子論的な対応物を考えることは二つの意味で重要であると思われる。一つは、実際の量子論的な物理系は程度の差はあるけれども古典的には系の持つ非線形性のためにカオティックであることであり、実験の精度の向上とともに実際にその古典系の非線形に起因した現象が観測されるようになったことである。それら実際に観測される事象の中でもっとも顕著な例は、メソスコピック系における輸送現象、原子・分子反応系や高励起分子振動・回転運動スペクトル、原子核系のスペクトルである。特に、過去数年のこの側面からのメソスコピック系研究の隆盛は *Physical Review Letter* の投稿件数から知ることができる²。

もう一つの重要性は、統計力学の基礎的な側面である。ここ約10年間に成されたカオス研究の成果の中で、古典統計力学の基盤、特に、非平衡統計力学に対して(双曲的な)カオスが本当に重要な役割を担っていることが実証されたことは大きな発展であった。基本的には Sinai, Ruelle と Bowen ら数学者の構築した熱力学的形式論 [66, 67, 68, 69] を使って説明されるのであるが(物理屋向けの簡単な解説 [65]。ただし、散逸系のみを扱っている。)、輸送係数が純粹に力学的な量 (Lyapunov 指数・Escape rate) によって書き下されたり [1, 3]、位相空間内で密度関数が fractal 的な時間発展をすることが非平衡状態にとつ

²はやりだからとか、一部の盛り上がりだから、研究すべきだと言っているのではない。

て重要である [2] など、大きな成果が上がった³。この辺りのことは田崎氏の詳しい解説が過去の物性研究に掲載されているのでそちらを調べて頂きたい [85]。しかしながら、非双曲系（近可積分系）に対する基礎理論やまた運動論（Kinetic theory）はまだ発展段階であり、チャレンジすべき問題がいっぱい残っている。

古典系のカオス的な振舞いが対応する量子系に対しても同じように系の振舞いに大きく左右していると期待するのは物理学者として当然の考え方（直観）であろう。また、そうした期待が実際に実現されているのか調べるのは理論的に重要なことである。特に、量子統計力学の基礎づけは古典統計力学の基礎づけに比べて遅れを取っているように思われるからである。筆者以外の方もこうした感想を持っているのではなかろうか？古典統計力学と同じように、量子統計力学にも力学的視点からの理論的な肉づけが必要であると思われる。筆者は、その目的には半古典論による解析を用いるのが最も適していると思うのである。なぜなら、比較的良く調べられている古典カオス系の知見をフルに活用することができるからである。そして、準位統計はそのエルゴード的な振舞いと関係し（von Neumann の量子エルゴード定理）、統計的な系の記述の出発点となる。半古典論によって、まず、準位統計のメカニズムを説明しようとするのは、量子系の統計力学の基礎付けの第一歩であると考えられる。

さて、その半古典論の現状を少し説明しよう。パイオニアである Gutzwiller [4]、Berry [5, 6]、Balian と Bloch [7] によって押し進められてきた半古典論の研究は、ここ 10 年の間に大きく進歩し、半古典量子化の条件（Gutzwiller トレース公式及び等価なゼータ関数）について多くの知見が得られた。この発展の詳細をお知りになりたい方は、[8] を御覧下さい。また、この小論のテーマである準位統計は元々は原子核物理学から発展した問題である。古典カオスとの関係を最初に Percival [12] によって予想されてから、Bohigas-Giannoni-Schmit ら [13] による徹底した数値的な研究などが成され、次々とランダム行列論の驚くほどの有用性が示された。しかし、つい最近まで準位統計の半古典的な理論づけの研究は、Berry による 1985 年の Spectral form factor (二点準位相関関数のフーリエ変換) に関するものを除いては無かった [35]。その Berry の解析により Spectral form factor の概形が半古典的に説明されたが、そこで使われる近似（対角近似）がどれほど妥当であって、非対角項がどれほど必要であるのかという問題が残った。まず、Argaman ら (1993) [39] は、ランダム行列論からの結果を用いて Spectral form factor の非対角項に現れる周期軌道の相関の形を見積もりいくつかのモデル系に対して数値計算を行なった。その結果と彼らの理論との比較をし、周期軌道の作用が縮退しないような系に対して、ある程度理論と数値計算とが一致することを示した。そして、周期軌道の相関が Riemann ゼータ関数との比較から素数の分布に関する Hardy-Littlewood (H-L) 予想 [38] と対比されることを指摘した。しかし、最近、MIT のグループ (1995-96) [29] (§ 3.2) およびその後の Bogomolny と Keating (1996) [46] (§ 3.3) によって、 $R_2(x)$ の非対角項が解析的に示されたことで、依然として理解されていなかった周期軌道間の相関がどのようなものであるのか理解する下地ができた。また、彼らの結果は古典系のエルゴード的な性質が量子系に直接反映することを示しており、量子系

³Perron-Frobenius 作用素のスペクトル問題に注目したものとして、ゼータ関数を用いた方法・複素スペクトル分解（ブラッセル・グループ）、また、現象論とのつき合わせから輸送係数を求めた Escape rate formalism などがある。さらには、より数学的に厳密な議論も成されている。

のエルゴード性の研究にも大いに役立つと期待される。これらの仕事の発端として、ランダム系における局在問題との関係、および、超対称性の方法⁴の使用があったことを付記しておく。ランダム系と準位統計との関係および超対称性については、[15, 16]を御覧下さい。

以下、§ 2において半古典論による解析方法について基本的な事柄を説明し、§ 3で二点準位相関関数について説明し、MITグループの結果 (§ 3.2)、および、Bogomolny と Keating の結果 (§ 3.3) の紹介をする。そして、彼らの結果とランダム行列からの結果との比較を § 3.4でし、§ 4において半古典和則について説明する。§ 5で紹介した結果の準位曲率分布への応用をおこなう。最後に、§ 6でこの小論の結論をまとめる。

2 半古典論による解析

2.1 古典力学についての基本的な事柄

ここでは、時間に依存しないハミルトン系（自励系）を考える。古典的な時間発展は次のハミルトンの運動方程式に従う。

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}},\end{aligned}\tag{1}$$

ただし、 $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_f)$ は位置、 $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_f)$ は運動量である。 H はハミルトニアンである。位相空間を Γ としよう。もし、 $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Gamma$ ととると、式 (1) は

$$\dot{\mathbf{x}} = J \cdot \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}),\tag{2}$$

と書き換えられる。ただし、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\tag{3}$$

で与えられる反対称 $2f \times 2f$ 行列である。初期条件 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) \in \Gamma$ を取ると、時間発展は正準変換 Φ^t によって形式的に、

$$\mathbf{x}_t = \Phi^t \mathbf{x}_0.\tag{4}$$

と書くことができる。自励系（時間に依存しないハミルトン系）では、 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ は運動の定数であり、これは、エネルギーの保存を表している。

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = 0,\tag{5}$$

或は、

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = E = \text{const.},\tag{6}$$

シンプレクティック性によって、位相空間の体積要素は保存される。さらに、エネルギー保存から位相空間の次元は $2f - 1$ である。もし、余計な運動の定数が系に付与されると位相空間の次元はさらに低いものになる。

⁴ランダムポテンシャルに対する解析である。

2.1.1 安定性解析

軌道の線形安定性解析は動力学の局所的な性質にとって非常に重要である。式 (1) の解である軌道の $\mathbf{x}$ の回りでの無限小変位 $\delta\mathbf{x}$ の時間発展は次の方程式を満たす。

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = L(t) \cdot \delta\mathbf{x}, \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_t) \\ &= J \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (8)$$

である。式 (7) の線形性によって、その解は

$$\delta\mathbf{x}(t) = M(t) \cdot \delta\mathbf{x}(0), \quad (9)$$

と与えられる。ただし、 $M(t)$ は

$$\dot{M}(t) = L(t)M(t) \quad (10)$$

を満たす $2f \times 2f$ 行列で初期条件は $M(0) = 1$ である。ここで、軌道の Lyapunov 指数を

$$\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |M(t; \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}| \quad (11)$$

によって定義する。ただし、 $\mathbf{e} = \delta\mathbf{x}/|\delta\mathbf{x}|$ である。Lyapunov 指数は初期条件 $\mathbf{x}_0$ と初期の方向 $\mathbf{e}$ によることに注意。極限 $t \rightarrow \infty$ を取って、Lyapunov 指数は $2f$ の値

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{2f}. \quad (12)$$

を取る。エルゴード的な系に対しては、Oseledec の定理によって $\mathbf{x}_0$ の依存性は消える。ハミルトン系のシンプレクティック性によって、 $M(t)$ は

$$M^\top(t) \cdot J \cdot M(t) = J. \quad (13)$$

を満たす。その結果、Lyapunov 指数はペアを成す。つまり、

$$\{\lambda_i, -\lambda_i\}_{i=1}^f. \quad (14)$$

である。

時間連続なフロー Φ^t は Poincaré 断面の方法によって時間が離散的な写像系へ変換することができる。位相空間内の超平面 $S(\mathbf{x}) = 0$ をフローに対して垂直にとる。超平面 $S(\mathbf{x}) = 0$ は次元 $2f - 2$ を持つ (図 1)。このとき、位相空間内のすべての軌道はこの超平面を連続して横切るようにとる。軌道は超平面上での横断点の列として特徴付けできる。つまり、横断点の列 $\{\mathbf{x}_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は

$$\mathbf{x}_{n+1} = \Phi^{T(\mathbf{x}_n)}(\mathbf{x}_n), \quad (15)$$

$$t_{n+1} = t_n + T(\mathbf{x}_n), \quad (16)$$

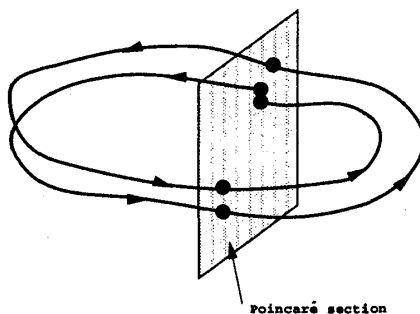


図 1: Poincaré 断面の概念図

のように写像される。ここで、 $T(x_n)$ は横断点 x_n と次の横断点 x_{n+1} との間の時間である。 t_n は横断が横断点 x_n で起こった時の時刻である。 ϕ は Poincaré 写像と呼ばれる。ハミルトン系に対しては、Poincaré 写像は保測写像（面積要素を保存する。）である。その Jacobi 行列の行列式の絶対値は 1 である。Poincaré 写像に対する軌道の安定性は元々のフローに対するのと同様に定義できる。ここでは、周期軌道についての安定性を考えよう。ある実数 T に対して、 $x(t+T) = x(t)$ である周期軌道を考える。 T の最も小さなものを周期軌道 p の基本周期 T_p と呼ぶ。こうして、基本周期 T_p の倍数 $T = rT_p$ は周期の基本（素な）周期軌道 p の繰り返しの周期軌道の周期となる。 p に対する線形安定性解析は

$$\det \left(\frac{d\phi^n(x)}{dx} - \Lambda 1 \right) = 0. \quad (17)$$

による。シンプレクティック性により、式 (17) の解はペアを成す。これらのペアは

1. 実のペア; $\{\Lambda, \Lambda^{-1}\}$,
2. 複素共役のペア; $\{\exp(\pm 2\pi i \alpha)\}$,
3. 四つ組; $\{\Lambda, \Lambda^{-1}, \Lambda^*, (\Lambda^{-1})^*\}$.

である。周期軌道 p の Lyapunov 指数は

$$\lambda_{p,i} = \frac{1}{T_p} \ln |\Lambda_{p,i}|, \quad (18)$$

で与えられる。ただし、 $T_p = \sum_{i=1}^n T(x_i)$ である。ここで、 Λ の取り得る値として三つの可能性がある。

1. 双曲型: $\Lambda > 1 > \Lambda^{-1} > 0$
2. 反転を伴った双曲型: $\Lambda < -1 < \Lambda^{-1} < 0$
3. 楕円型: $\exp(\pm 2\pi i \alpha)$.

2.1.2 カオスの定義

残念ながら、カオスの数学的に厳密な定義はない。しかし、カオスに関しての位相的、計量的、測度的な意味合いでの概念は沢山ある。数学的な厳密さはさておき、平均 Lyapunov 指数が正となる系をカオス系と呼ぶことにする。つまり、軌道不安定性でもってカオスであるということにする。さらに、すべての周期軌道が双曲的であるときを双曲系、そうでない場合を非双曲系と呼ぶことにする。

2.2 Gutzwiller トレース公式

非相対論的な量子系は波動関数 $\psi(\mathbf{q}; t)$ によって記述され、その振舞いは Schrödinger 方程式によって支配される。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{q}; t) = \hat{H} \psi(\mathbf{q}; t). \quad (19)$$

ここで、ハミルトニアンは時間に依存しないとして、

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^d \frac{\hat{p}_j^2}{2m_j} + \hat{V}(\hat{\mathbf{q}}), \quad (20)$$

とおく。ただし、

$$\hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_j}. \quad (21)$$

である。Dirac の記法で波動関数

$$\psi(\mathbf{q}; t) = \langle \mathbf{q} | \psi(t) \rangle. \quad (22)$$

の時間依存性は、すべてのエネルギー固有値が $\{E_n\}$ で固有関数が $\{\psi_n(\mathbf{q})\}$ を満たすとして、

$$\hat{H} \psi_n(\mathbf{q}) = E_n \psi_n(\mathbf{q}), \quad (23)$$

さらに、固有エネルギーが離散的であるとする、

$$\psi(\mathbf{q}; t) = \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(\mathbf{q}) \quad (24)$$

となる。 c_n は定数である。これは、学部生でも知っている。Schrödinger 方程式の線形性のため、量子状態 $|\psi(0)\rangle$ の時間発展は

$$\begin{aligned} |\psi(T)\rangle &= \hat{K}(T) |\psi(0)\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} |\psi(0)\rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ここで、 $\hat{K}(T)$ はプロパゲータと呼ばれる。時間領域からエネルギー領域へ移ることを考えよう。次のように、ハミルトニアン $\hat{H}$ のレゾルベント (グリーン関数) $\hat{G}^{(+)}(E)$ を定義する。プロパゲータとは Fourier-Laplace 変換によって結び付いている。

$$\begin{aligned} \hat{G}^{(+)}(E) &= \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) \hat{K}(t) \exp\left(-\frac{\epsilon t}{\hbar}\right), \end{aligned} \quad (26)$$

プロパゲータは固有状態によって、

$$\hat{K}(T) = \sum_n |\psi_n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \langle \psi_n| + \sum_c \int_{E_c}^{\infty} dE |\psi_c E\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E T} \langle \psi_c E|, \quad (27)$$

と書ける。インデックス n は束縛状態についてのもの、パラメータ $\psi_c E$ はエネルギー閾値 E_c ($E > E_c$ よりも上のチャンネル c に対する散乱状態を表している。

まずは、束縛状態を考える。このとき、系は離散スペクトルをもつ。レゾルベントは

$$G^{(\pm)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; E) = \left\langle \mathbf{q} \left| \frac{1}{E - \hat{H} \pm i\epsilon} \right| \mathbf{q}' \right\rangle \quad (28)$$

となり、

$$(\hat{H} - E \mp i\epsilon) G^{(\pm)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; E) = -\delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (29)$$

を満たす。ただし、 $(+)$ と $(-)$ はそれぞれ遅延・先進解を表す。レゾルベントのスペクトル分解は、

$$G^{(\pm)}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; E) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{q}) \psi_n^*(\mathbf{q}')}{E - E_n \pm i\epsilon}. \quad (30)$$

で与えられる。レゾルベントの極が固有エネルギーに、レゾルベントの留数が固有関数に対応する。この関係から、状態密度 $d(E)$ は、

$$\begin{aligned} d(E) &= \sum_n \delta(E - E_n) = \text{Tr} [\delta(E - \hat{H})] \\ &= -\frac{1}{\pi} \Im \text{Tr} \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} = -\frac{1}{\pi} \Im \int d\mathbf{q} G(\mathbf{q}, \mathbf{q}; E) \end{aligned} \quad (31)$$

と与えられる。累積状態密度 $N(E)$ は

$$N(E) = \#\{E_n < E\}. \quad (32)$$

で定義され、状態密度 $d(E)$ とは

$$d(E) = \frac{d}{dE} N(E), \quad (33)$$

と関係している。

ちなみに、この小論では扱わないが、散乱系の共鳴についても同様の式が存在する。

$$g(E) = \text{Tr} \left(\frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} - \frac{1}{E - \hat{H}_{ref} + i\epsilon} \right) \quad (34)$$

ここで、 $\hat{H}_{ref}$ は参照ハミルトニアンであって、散乱中心から無限遠で漸近形がいま考えているハミルトニアン $\hat{H}$ と一致するものである。連続のスペクトルに対応する部分を差し引いているのである。さらに、Wigner の時間遅延関数 $T(E)$ は S -行列と以下のように関係している。

$$\begin{aligned} T(E) &= -i\hbar \text{Tr} \frac{d}{dE} \ln \hat{S}(E) \\ &= -2\hbar \Im \text{Tr} \left(\frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} - \frac{1}{E - \hat{H}_{ref} + i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

この $T(E)$ は散乱系を半古典的に解析する出発点となる。

2.2.1 可積分系の半古典量子化

1次元可積分系の半古典量子化は Bohr-Sommerfeld 量子化条件として知られており、

$$\oint_C p dq = 2\pi I = 2\pi\hbar \left(n + \frac{\nu}{4} \right), \quad (36)$$

と与えられる。ここで、 C は古典周期軌道を表し、 ν はその周期軌道のトポロジーを決めている Maslov 指数である。この条件は古典周期軌道の上に定在波が立つことを示している。 n はその定在波のノード数である。

多次元可積分系の拡張は Einstein, Brillouin, Keller によって行なわれたので、Einstein-Brillouin-Keller (EBK) 量子化条件と呼ばれている。一般に、与えられた系が完全可積分系であるならば、適当な正準変換

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}) \quad (37)$$

の後で以下のようなハミルトニアンが得られる。

$$H = \sum_{j=1}^d I_j \omega_j, \quad (38)$$

ただし、 $0 \leq \omega_j < 2\pi$ で、 ω_j は定数である。この座標での運動は、

$$\frac{dI_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_j} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_j} = \omega_j \quad (40)$$

により記述される。積分が実行できて、

$$I_j = \text{const.} \quad (41)$$

$$\theta_j = \omega_j t + \text{const.} \quad (42)$$

となる。したがって、 d 次元トーラスの回りをぐるぐる回る軌道が得られる。EBK 量子化条件は、Bohr-Sommerfeld 量子化条件におけるように周期軌道の上に定在波が立つ条件として、分離されたそれぞれの自由度に対して、

$$\oint_{C_j} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} = 2\pi I_j = 2\pi\hbar \left(n_j + \frac{\nu_j}{4} \right) \quad (43)$$

と与えられる。ただし、積分経路 C_j はトーラス上の既約な閉路であり、 ν_j は Maslov 指数である。図2を参照。

しかしながら、古典系の振舞いがカオティックになると変数が分離できず、上のような戦略で量子化条件を導くことはできない。次に見るように、Bohr-Sommerfeld・EBK 量子化条件より複雑な量子化条件が必要となる。

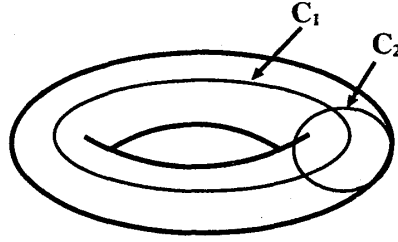


図 2: EBK 量子化の説明。二次元の場合。

2.2.2 カオス系の半古典量子化：Gutzwiller トレース公式の導出

カオス系の量子化は Gutzwiller[4] によって作られた。彼の出発点は、状態密度式 (31) で、これを経路積分を使って半古典的に評価しようというものである。位置座標表示での波動関数の時間発展を Feynman 核 $K(\mathbf{q}'', \mathbf{q}'; t)$ によって以下のように表す。

$$\psi(\mathbf{q}; t) = \int d\mathbf{x}' K(\mathbf{q}, \mathbf{x}'; t) \psi(\mathbf{x}'; 0). \quad (44)$$

Feynman 核は経路積分表示では

$$K(\mathbf{q}'', \mathbf{q}'; t) = \int \mathcal{D}[\mathbf{x}(\cdot)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[\mathbf{x}(\cdot)] \right], \quad (45)$$

となる。ただし、経路は境界条件

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{q}', \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{q}'' \quad (46)$$

を満たさなければならない。ここで、一つ注意しておく。一般に、境界条件をみたす古典経路は複数ある。そうした同じ境界条件を満たす異なる経路をブランチとよぶことにする。次に、プロパゲータに対する半古典近似を考える。Trotter 公式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (e^{\frac{A}{N}} e^{\frac{B}{N}})^N = e^{A+B}, \quad (47)$$

を使って、プロパゲータは無限個の断片に分割される。

$$K(\mathbf{q}', \mathbf{q}; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} d\mathbf{q}_i \prod_{n=1}^{N-1} \langle \mathbf{q}_{n+1} | \hat{K}(\Delta T) | \mathbf{q}_n \rangle, \quad (48)$$

ただし、 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}$, $\mathbf{q}_N = \mathbf{q}'$ and $\Delta T = T/N$ である。無限小プロパゲータは

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_{i+1} | \hat{K}(\Delta T) | \mathbf{q}_i \rangle &= \left\langle \mathbf{q}_{i+1} \left| \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta T \right] \right| \mathbf{q}_i \right\rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi i \hbar \Delta T)^{\frac{d}{2}}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} L \left(\frac{\mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i}{\Delta T}, \mathbf{q}_i \right) \Delta T + \mathcal{O}(\Delta T^2) \right], \end{aligned} \quad (49)$$

と、ハミルトニアン $\hat{H} = \mathbf{p}^2/2 + V(\mathbf{q})$ に対する古典ラグランジュアン

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{\dot{\mathbf{q}}^2}{2} - V(\mathbf{q}). \quad (50)$$

によって表される。こうして、

$$K(\mathbf{q}', \mathbf{q}; T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^{N-1} d\mathbf{q}_i (2\pi i \hbar \Delta T)^{-\frac{Nd}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} L \left(\frac{\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n}{\Delta T}, \mathbf{q}_n \right) \right]. \quad (51)$$

となる。連続極限 $N \rightarrow \infty$ において、位相は古典軌道に沿っての作用となる。

$$W[\mathbf{q}(t)] = \int_0^T L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) dt. \quad (52)$$

プロパゲータの半古典近似は Fourier タイプの積分に対して定常位相近似を施せば良い。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar} \phi(x)} dx = e^{\frac{i}{\hbar} \phi_0} \left[\frac{2\pi i \hbar}{\phi_0^{(2)}} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{i \hbar \phi_0^{(4)}}{8(\phi_0^{(2)})^2} + \frac{5i \hbar (\phi_0^{(3)})^2}{24(\phi_0^{(2)})^3} + \mathcal{O}(\hbar^2) \right], \quad (53)$$

ただし、定常位相点 x_0 は条件 $\frac{\partial}{\partial x} \phi(x)|_{x=x_0} = 0$ と $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x)|_{x=x_0} \neq 0$ を満たすものである。また、 $\phi_0^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \phi(x)|_{x=x_0}$ とおいた。 $\hbar$ の漸近展開の主要項までで、プロパゲータは

$$\begin{aligned} K(\mathbf{q}', \mathbf{q}; T) &\simeq K_{sc}(\mathbf{q}', \mathbf{q}; T) \\ &\equiv \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{\frac{d}{2}} \sum_b \left| -\frac{\partial^2 W_b}{\partial \mathbf{q}' \partial \mathbf{q}} \right|^{-1} \exp \left(\frac{i}{\hbar} W_b(\mathbf{q}', \mathbf{q}) - \frac{i\pi \nu_b}{2} \right), \end{aligned} \quad (54)$$

となる。ここで、和は $\mathbf{q}$ と $\mathbf{q}'$ を滑らかにつなぐ古典軌道のすべてのブランチにわたるものである。また、 $W_b(\mathbf{q}', \mathbf{q}) \equiv \int_{0 \text{ along } b}^t L dt$ であり、 ν_b はブランチ b に対する Maslov 指数である。この半古典プロパゲータは良く **Van Vleck** プロパゲータと呼ばれる。時間領域からエネルギー領域へ移るには、Fourier-Laplace 変換を実行すれば良い。この積分の評価にも定常位相近似を使う。その結果、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{q}', \mathbf{q}; E) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty dt \exp \left[\frac{i}{\hbar} Et \right] K(\mathbf{q}', \mathbf{q}; t) \exp \left[-\frac{\epsilon t}{\hbar} \right] \\ &\simeq 2\pi \left(\frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{\frac{d+1}{2}} \sum_b \left| \det \left(\frac{\partial^2 S_b}{\partial \mathbf{q}' \partial \mathbf{q}} \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_b - \frac{i\pi \nu_b}{2} \right], \end{aligned} \quad (55)$$

を得る。ただし、

$$S_b(\mathbf{q}', \mathbf{q}; E) = W_b(\mathbf{q}', \mathbf{q}; t) + Et = \int_b \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} \quad (56)$$

であり、 $S_b(\mathbf{q}', \mathbf{q}; E)$ は簡約作用と呼ばれる。積分は経路 b に沿ってものである。

次に、この半古典レゾルベントのトレースをとると求める状態密度が得られる。トレースの評価において二つのタイプの軌道があることが分かる。(1) 長さゼロの軌道、(2) 周期軌道である。状態密度はこの二つの部分に分けられる。

$$d(E) = d_0(E) + d_{osc}(E), \quad (57)$$

ここで、 $d_0(E)$ は長さゼロの軌道の寄与を表し、 $d_{osc}(E)$ は周期軌道からの寄与を表す。

$$d_0(E) = -\frac{1}{\pi} \Im \text{Tr} \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} \Big|_{\text{zero length paths}} \quad (58)$$

$$d_{osc}(E) = -\frac{1}{\pi} \Im \text{Tr} \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} \Big|_{\text{periodic paths}} \quad (59)$$

$d_0(E)$ については、Wigner-Weyl 変換によって評価することができる。 $\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$ の形のハミルトニアンに対しては、

$$\begin{aligned} N_0(E) &\equiv \int^E dE' d_0(E') \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p} \left\{ \theta(E - H_{cl}) - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q^2 V \partial_E^2 \theta(E - H_{cl}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hbar^2}{24m} \left[(\partial_q V)^2 + \frac{1}{m} (\mathbf{p} \cdot \partial_q)^2 V \right] \partial_E^3 \theta(E - H_{cl}) + \mathcal{O}(\hbar^4) \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

と与えられることが知られている [57]。また、ビリヤード系に対しても同様の $\hbar$ に関する展開式が得られる [58, 59]。 $d_{osc}(E)$ については $\mathbf{q} = \mathbf{q}'$ に関する積分の評価において、定常位相近似を使うことで評価ができる。ここで、「カオスである」という条件が使われる。それは、無限個の周期軌道が孤立して存在するという条件である。この条件により、 $d_{osc}(E)$ はすべての周期軌道についての和として表される。最終的に、 d -次元系に対して $\hbar$ の主要項まで、

$$d_0(E) \approx \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p} \delta(H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - E) + \mathcal{O}(\hbar^{-d+1}), \quad (61)$$

$$d_{osc}(E) \approx \frac{1}{\pi\hbar} \sum_p T_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\det(M_p^r - I)|}} \cos \left[r \left(\frac{S_p(E)}{\hbar} - \frac{\pi\nu_p}{2} \right) \right] + \mathcal{O}(\hbar^0), \quad (62)$$

と与えられる。この式がいわゆる Gutzwiller トレース公式である [4]。 $d_0(E)$ は、古典系における位相空間中のエネルギー殻の体積をプランク・セルの体積で割ったものである。平均的な状態密度を表している。また、 $d_{osc}(E)$ は、対応する古典系の不安定周期軌道の情報で書かれており、平均的な状態密度からずれ（つまり、固有値の位置）を表している。 T_p は p でインデックスされる素な周期軌道の周期、 S_p は p の作用、 ν_p は p の Maslov 指数、 M_p は p の monodromy 行列、 r は周期軌道の繰り返しの数である。可積分系の半古典量子化と比べて特徴的なのは、可積分系の場合は、周期軌道一つと固有エネルギー準位一つが対応していました（1対1）が、カオス系の場合は、無限個の周期軌道に対して無限個の固有エネルギー準位が対応していること（多対多）である。導出の詳細については、参考文献 [4, 8] を御覧下さい。

エネルギー準位の半古典的な決定には、状態密度のピークを見るよりもある関数のゼロ点として与えられた方が都合よい。ここでは、状態密度をゼータ関数の形に表しておこう。そこで、まず Gutzwiller トレース公式において振幅因子を展開することを考える。

$$\det(M_p^r - I) = \prod_{k=1}^{d-1} (\Lambda_p^{(k)} - 1) \left(\frac{1}{\Lambda_p^{(k)}} - 1 \right) \quad (63)$$

である。ここで、 $\Lambda_p^{(k)}$, $k = 1, \dots, d-1$ は Monodromy 行列 M_p の固有値である。 $|\Lambda_p^{(k)}| > 1$ (双曲性) を仮定して、幾何級数展開を用いると、

$$\left| \det(M_p^r - I) \right|^{-1/2} = \sum_{m_1, \dots, m_{d-1}=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^{d-1} |\Lambda_p^{(k)}|^{r/2} (\Lambda_p^{(k)})^{m_k r}}. \quad (64)$$

となる。ここで、次の Selberg 型ゼータ関数を定義する。

$$\mathcal{Z}(E) = \prod_p \prod_{m_1, \dots, m_{d-1}=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\exp\{-i[\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p \pi}{2}]\}}{|\Lambda_p^{(k)}|^{\frac{1}{2}} \Lambda_p^{(k)m_k}} \right), \quad (65)$$

このゼータ関数は

$$\mathrm{Tr} \frac{1}{E - \hat{H}} \Big|_{p.o.} = \frac{\partial}{\partial E} \ln \mathcal{Z}(E) + \mathcal{O}(\hbar^0), \quad (66)$$

を満たすので状態密度と直接関係し、Selberg 型ゼータ関数のゼロ点が固有エネルギーである。ここで、このゼータ関数の導出において、

$$-\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \ln(1-x), \quad (|x| < 1) \quad (67)$$

を用いた。このゼータ関数は Gutzwiller-Voros ゼータ関数と呼ばれる。

ここで注意しておくべき重要なことがある。Gutzwiller トレース公式とそれに付随したゼータ関数は次の理由によって絶対収束しないのである。カオス系においては、周期軌道の長さ l 近傍の周期軌道の数を $N(l)$ とすると、

$$N(l) \sim \exp[h_{top} l]. \quad (68)$$

と振舞う。ここで、 h_{top} はトポロジカル・エントロピーと呼ばれる。一方で、Gutzwiller トレース公式における振幅因子は

$$A_p = \frac{T_p}{|\det(M_p - I)|^{1/2}} \sim T_p \exp\left[-\frac{\lambda}{2} l\right]. \quad (69)$$

と振舞う。 λ は平均 Lyapunov 指数である。Gutzwiller トレース公式が収束するためには、この振幅因子の小さくなり方と周期軌道の数の爆発をうまくコントロールする必要がある。そのためには、収束因子が必要となる。状態密度を Lorentzian smoothing 或は Gaussian smoothing するのである。Lorentzian smoothing するとすると、

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E + i\epsilon, \\ \epsilon &> h_{top} - \frac{\lambda}{2} = \epsilon_{min}. \end{aligned} \quad (70)$$

とエネルギーに純虚数をいれることになる。この ϵ_{min} はトポロジカル・バリアーと呼ばれる。このような関係はゼータ関数に対しても [42, 43]、散乱系に対しても [70] 求められる。しかし、この収束性の問題は半古典論を実行するにあたって非常に大きな障害（スペクトルの微細な構造を見ることが非常に困難）であって、かつ、本質的な点であると言える。エネルギー・スペクトルの分解度を最大にしつつ、周期軌道とを途中でうまく打ち切るには色々な方法がある。この問題を解決する総和法については参考文献 [42, 43, 63, 64]（日本語による解説は [53]。）を見て頂くことにしよう。

2.2.3 Riemann ゼータ関数

量子カオス系の良いお手本となっている Riemann ゼータ関数について述べておく。後の節において何回か現れ、具体的に解析をするので、難しそうだからといって飛ばさずに読んで頂きたい。Riemann ゼータ関数と量子カオス系との関係は Gutzwiller によってある散乱問題に現れることが示されてから [18]、また Berry によって指摘され [40, 41]、いろいろと研究されてきた。(数学者の間ではもっと古く Selberg ゼータ関数との関係から議論されていたようである。) そのお手本となる類似点とは、Riemann ゼータ関数における素数が量子カオス系における周期軌道に対応しているからである。特に、Gutzwiller トレース公式(実際には、等価なゼータ関数)を発散級数を条件収束させる方法として開発された Berry と Keating による Riemann-Siegel look-a-like 公式とその refine された結果 [42, 43] は大きな成果であった。

Riemann ゼータ関数は $\Re s > 1$ に対して、

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (71)$$

と定義される。Euler 積は $\Re s > 1$ に対して、

$$\zeta(s) = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \quad (72)$$

で与えられる。ここで、 p は素数を表す。Riemann ゼータ関数は自明なゼロ点 $s = 2m (m \in \mathbb{Z}_-)$ と極 $s = 1$ 、それと、非自明なゼロ点 $s = \frac{1}{2} + iE_n (n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ (非自明なゼロ点は実軸に対して対称に分布する。この部分は Riemann 仮説⁵。 E_n は正負対称に位置する。) をもつ。図 3 を参照。Riemann 仮説を仮定して、形式的に非自明なゼロ点の状態密度 ($E > 0$) は、

$$d(E) = d_0(E) - \frac{1}{\pi} \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln p}{p^{n/2}} \cos(nE \ln p) \quad (73)$$

と書ける。量子カオス系との対応は以下の通りである。($\hbar = 1$ としている。)

量子カオス系	Riemann ゼータ関数
S_p	$E \ln p$
$T_p = \frac{dS_p(E)}{dE}$	$\ln p$
$\sqrt{ \det(M_p^n - I) }$	$p^{n/2}$

平均状態密度は陽に与えられており、またその漸近形も知られている。

$$d_0(E) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \Re \frac{\Gamma'(\frac{1}{4} - i\frac{E}{2})}{\Gamma(\frac{1}{4} - i\frac{E}{2})} \ln \pi \right\} \rightarrow \frac{\ln E}{2\pi} \quad \text{as } E \rightarrow \infty \quad (74)$$

⁵ 「非自明なゼロ点がすべて $s = \frac{1}{2} + iE$ の上にある」 だろうというもの。

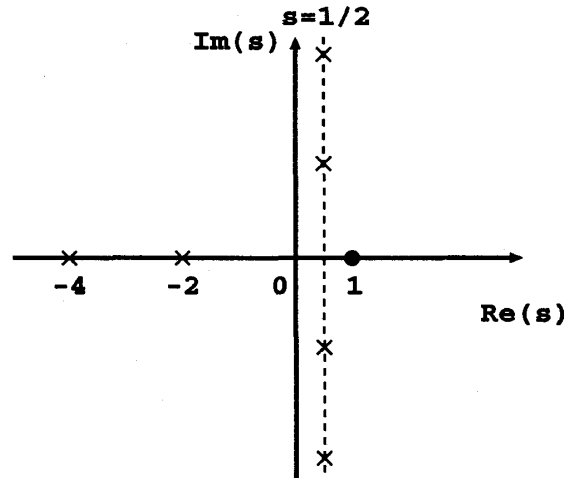


図 3: Riemann ゼータ関数の解析性：黒丸は極。×印はゼロ点。 $s = \frac{1}{2} + iE$ が非自明なゼロ点。負の偶数は自明なゼロ点。

2.3 量子カオス系の特徴

2.3.1 準位統計

準位間隔分布は、エネルギー準位を小さい順に並べて、隣合うエネルギー準位の間隔をとって、その分布をとったものである。普通、平均準位間隔が、1になるようにスケールして、系の余計な特殊性を取り除いて考える。一昔前までは、この準位間隔分布を数値計算して量子カオス系であるかないかの判断をしていた。判断基準は、可積分系に対しては準位間隔分布が Poisson 分布

$$P(s) = e^{-s} \quad (75)$$

に従い、量子カオス系に対しては考えている系の対称性によりランダム行列論の GOE(Gaussian Orthogonal Ensemble) (時間反転対称を持つ系。)、GUE(Gaussian Unitary Ensemble) (時間反転対称性を破っている系。たとえば、磁場のかけられた系。)、GSE(Gaussian Symplectic Ensemble) (Kramers 縮退のあるスピン系) のそれぞれに対して、

$$P_{GOE}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) \quad (76)$$

$$P_{GUE}(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi}s^2\right) \quad (77)$$

$$P_{GSE}(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi}s^2\right) \quad (78)$$

に従うというものである。(図 4 を参照。) 特徴的なのは、可積分系においては準位の縮退が起こるが、量子カオス系において準位の縮退がないことである。一つの与えられたハミルトニアン固有値の統計性がランダム行列論の結果と一致することは全く自明なことではなく、その理論的な理由を明らかにしなければならないことである。これが、この小論の目的である。それぞれのアンサンブルの具体形を説明しておく。GOE は実対称行列の

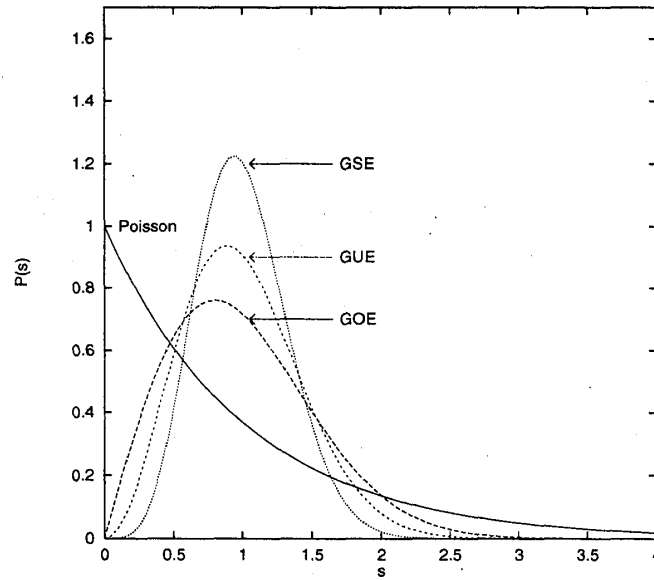


図 4: 最近接準位間隔分布 : Poisson 分布, GOE, GUE, GSE

アンサンブル ($\{H^T = H; N \times N \text{ 実行列}\}$) であり、対角形への変換は実直交行列によって成される。GUE は複素エルミート行列のアンサンブル ($\{H^\dagger = H; N \times N \text{ 複素行列}\}$) で、対角形への変換はユニタリ行列によって成される。GSE は実反対称行列のアンサンブル ($\{A^\dagger = A^T = -A; 2N \times 2N \text{ 実行列}\}$) であり、実直交行列によって適当に変換すると、

$$RAR^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (79)$$

とブロック対角化された行列へ変換される。また、それぞれのアンサンブルに対して行列要素は以下のように分布している。

$$P(\{H_{jk}\}) = c_N \exp\left(-\frac{1}{4a^2} \text{Tr} H^2\right) = c_N \exp\left(-\frac{1}{4a^2} \sum_{j,k} H_{jk} H_{jk}^*\right) \quad (80)$$

ただし、

$$c_N = (4\pi a^2)^{-\frac{1}{2}\{N + \frac{\nu}{2}N(N-1)\}} \quad (81)$$

$\nu = 1, 2, 4$ は、それぞれ GOE, GUE, GSE に対応している。他に、 Δ_3 や Σ_2 といった統計量が重要であるが、準位間隔分布も含めて次節で述べる 2 点準位相関関数によって導き出されるものであるので、ここでは触れないことにする。 Δ_3 と Σ_2 の導出等は、[60] に日本語による丁寧な解説がありますので、そちらを参照してください。

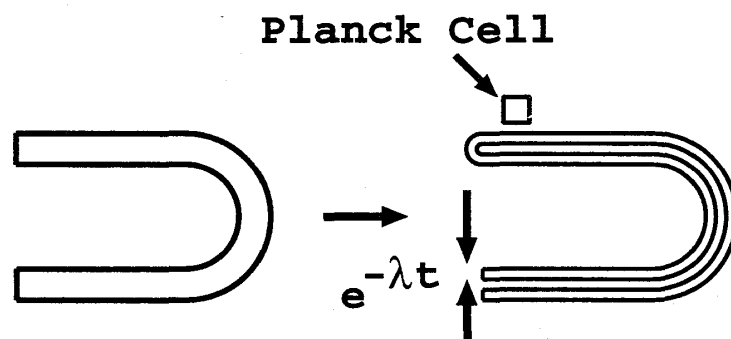


図 5: Smale の馬蹄形力学と Planck セル

2.3.2 特徴的な時間スケール

平均状態密度（その逆数の平均エネルギー間隔）によって決まる時間 $t_H = \hbar d_0 (= \hbar / \Delta)$ を Heisenberg 時間という。これは Heisenberg の不確定性原理によって決まる時間スケールで、それ以上長い時間スケールは量子論的に固有な性質が顕著となる。もう一つ重要なのは、波束の時間発展に関するもので、破綻時間（Breaking time） t^* と呼ばれている。（ただし、この小論ではエネルギー領域での話が主なので先の議論に直接関係しない。）波束が時間発展の初期段階において、古典系の Smale の馬蹄形力学に従って時間発展し折り畳みによって細かな構造を作っていく時、その細かな構造が不確定性原理と抵触し干渉効果があらわになるまでの時間である。図 5 を御覧下さい。不安定多様体方向には、時間とともに構造が $e^{-\lambda t}$ と細かくなっていくので、これが Planck セルと同じぐらいになる時間 t^* は、 λ を平均 Lyapunov 数として、 $e^{-\lambda t} \sim \hbar$ だから、問題の時間 t^* は

$$t^* = \frac{\log \hbar^{-1}}{\lambda} \quad (82)$$

となる。

2.3.3 固有波動関数の統計性

エネルギー準位に現れる古典系のカオス的振舞いは、当然固有波動関数にも現れる。その様子を調べるには、位置座標表示の波動関数を使っているだけでは特徴を捉え切れないので、古典力学における分布関数 $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に対応した関数である Wigner 関数（或いはそれを鈍した Husimi 関数）を使うのが一般的である。ここでは、Wigner 関数を紹介しておく。Wigner 関数の定義は以下の通りである。

$$\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d\mathbf{Q} \psi(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \psi^\dagger(\mathbf{q} + \mathbf{Q}) \exp(-2i\mathbf{p} \cdot \mathbf{Q}/\hbar) \quad (83)$$

$\mathbf{q}$ 或は $\mathbf{p}$ については積分すると残された変数での表示の波動関数が得られる。

$$\int d\mathbf{q} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = |\phi(\mathbf{p})|^2 \quad (84)$$

$$\int d\mathbf{p} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = |\psi(\mathbf{q})|^2 \quad (85)$$

Berry[77, 78] と Voros[79] によって、この Wigner 関数の平均的な振舞いが以下のように与えられることが示されている。対応する古典系が可積分系では、

$$\overline{\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{\delta(\mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{I}_\psi)}{(2\pi)^d} \quad (86)$$

と与えられる。ここで、 $\overline{\quad}$ はエネルギーに関する平均である。また、適当な正準変換 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta})$ で作用-角変数へ変換されているとしており、 $\mathbf{I}_\psi$ は今考えている固有波動関数に対する固有エネルギーから見積もれる量子化された古典系の作用変数の値を表す。量子カオス系では、古典系における軌道がエネルギー殻全体を覆い尽くし、また、エネルギー平均によって微妙な位相の干渉は消し去られるため、 $\overline{\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})}$ は古典系における小正準集団における分布と同じになる。

$$\overline{\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})} = \frac{\delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{\int d\mathbf{q} \int d\mathbf{p} \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}))} \quad (87)$$

また、量子カオス系に対して波動関数の空間相関関数の表式も与えられている [78]。波動関数の空間相関関数 $C(\mathbf{X}; \mathbf{q})$ は、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{X}; \mathbf{q}) &= \psi(\mathbf{q} + \mathbf{X}/2) \psi^\dagger(\mathbf{q} - \mathbf{X}/2) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int d\mathbf{p} \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X}/\hbar) \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (88)$$

と定義され、我々の興味ある量子カオス系に対しては、古典系における小正準集団における分布と同じになる事実を使って、

$$C(\mathbf{X}; \mathbf{q}) = \frac{\Gamma(d/2) J_{(d-2)/2}(|\mathbf{X}| \sqrt{2m(E - V(\mathbf{q}))/\hbar})}{|\mathbf{X}| \sqrt{2m(E - V(\mathbf{q}))/2\hbar}} \quad (89)$$

と与えられ、Bessel 関数の漸近形から相関関数はべき的な振舞いをする事が分かる。このことから、Berry は量子カオス系に対しては、固有波動関数は平均的には式 (87) で与えられ、式 (89) のスペクトルをもっているような、 $\mathbf{q}$ についてのガウス・ランダム変数となっていると予想している。また、この固有波動関数の性質は、オブザーバブルの行列要素の揺らぎにも現れる。Eckhardt らは波動関数のエルゴード的な振舞い（小正準集団の分布になるということ。）がオブザーバブルに対するスペクトルに現れることを示し、そのスペクトルに対する Spectral form factor (§ 3 で定義する。) の解析を行なった [48]。また、量子カオス系に対して⁶、Wigner 関数が $\hbar \rightarrow 0$ において、小正準集団の分布関数に漸近していくことやオブザーバブルの行列要素の振舞いについて数学的な言及がなされている [72, 73, 74, 75, 76]。

量子カオス系の Wigner 関数は平均的には式 (87) に従っているが、個々の固有波動関数には、実際、個性がある。Heller は、Stadium billiard 系において、いくつかの固有波動関数があたかも古典系の不安定周期軌道をなぞるように、密度分布をもつことがあることを数値的に示し、これをスカーと呼んだ [80]。その後、Bogomolny によって、エネルギー

⁶定負曲率空間の系など特殊な系に対する証明である。

平均をした座標表示の波動関数を周期軌道和で表し、スカーの存在と周期軌道和との関係を議論した [81]。すぐ後に、Berry は Bogomolny の方法を位相空間内における Wigner 関数に拡張し、Wigner 関数に対して周期軌道和を構成した [82]。しかし、これらの形式論は実際にうまく work しているのかは依然分からなかった。なぜなら、一般に半古典論によって固有波動関数を扱うのは非常に難しいことであるからである。その困難を Agam と Fishman は Berry の方法に Berry と Keating の開発したゼータ関数に関する総和法 [42, 43] を Wigner 関数に対して応用することで解決した。彼らは、数値的にその方法の有効性とスカーの存在を示した [83]。

以上、駆け足で述べた量子カオス系の特徴は物性に当然現れる。例えば、メソスコピック系における UCF(=Universal Conductance Fluctuation) [84] や化学反応論における RRKM(=Ramsperger-Rice-Kassel-Marcus) 理論や金属クラスターの物性などにとって重要な役割を果たしている。

3 二点準位相関関数、Spectral form factor

エネルギー準位の統計性を測る基本的な量は、二点準位相関関数 $R_2(x)$ である。

$$R_2(x) \equiv \langle d(E+x_1)d(E+x_2) \rangle - d_0^2 \quad (90)$$

$x \equiv x_1 - x_2$ である。 $\langle \dots \rangle$ はエネルギー平均である。この $R_2(x)$ はランダム行列論において具体的な解析において中心的な役割をなしているだけでなく、メソスコピック系の輸送現象を調べる上で重要な量となっている。たとえば、メソスコピック・リングに磁場を貫いた系における永久電流 (Persistent current) の相関 [37] や UCF [84] は $R_2(x)$ によって記述され、 $R_2(x)$ は輸送現象に対して重要な役割を果たしている。半古典表式式 (61,62) を式 (90) に入れ、 $S(E+x) \approx S(E) + xT_p$ と近似すると、

$$R_2(x) = \left\langle \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right)^2 \sum_{p,p'} \sum_{r,r'=1}^{\infty} \frac{T_p T_{p'}}{\sqrt{|\det(M_p^r - I)|} \sqrt{|\det(M_{p'}^{r'} - I)|}} \times \right. \\ \left. \exp \left[i \left(\frac{r S_p(E) - r' S_{p'}(E)}{\hbar} + \frac{r T_p x_1 - r' T_{p'} x_2}{\hbar} \right) \right] \right\rangle \quad (91)$$

となる。ここで、簡単のために、Maslov 指数は作用の中に含めた。以下の議論では、作用は Maslov 指数を含んでいるとして考えていただきたい。式 (91) において対角項 ($p = p', r = r'$) だけをとってきてこれを $R_2^{(diag)}(x)$ とし、残りの部分を $R_2^{(off)}(x)$ とおくことにする。

$R_2(x)$ を Fourier 変換したのが、Spectral form factor と呼ばれる量である。

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{i\pi}{\hbar} x} R_2(x) \quad (92)$$

$K(t)$ は $R_2(x)$ と等価な情報を含み、こちらの方が以下の議論に便利なので $K(t)$ について考える。まずは、 $R_2^{(diag)}(x)$ だけで式 (91) を近似し、式 (92) に代入し $K(t)$ を見積もる

う [35]。ここで、少し注意しておく点がある。 $R_2^{(diag)}(x)$ は位相に関する情報は何も入っておらず、古典系の情報だけで書かれており、次の Hannay-Ozorio de Almeida(H-OdA) 和則 [34] と密接に関係している。

Hannay-Ozorio de Almeida(H-OdA) 和則 (1984)[34] 有界な双曲系に対して周期 T の周期軌道の集合 $\mathcal{P}_T$ を考える。系は混合的であることから、 $\mathcal{P}_T$ は T が十分大きければ位相空間を一様に埋めつくす。このとき、 $T \rightarrow \infty$ で、

$$\sum_p \frac{1}{|\det(M_p - I)|} \approx \frac{1}{T} \quad (93)$$

或は、

$$T \sum_p \frac{1}{|\det(M_p - I)|} \rightarrow 1 \quad (94)$$

が成り立つ。

導出を説明しておく。 $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ とおくことにする。次の量を考えよう。

$$\langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t) \rangle_t \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^T \right\} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t) \quad (95)$$

ここで、技術的なこととして、時刻 $t = 0$ の寄与は取り除いておくため、積分範囲を変更していることに注意。この量はエルゴード系と可積分系については次のように与えられることが理解される。

$$\langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t) \rangle_t = \begin{cases} \frac{\delta(H(\mathbf{r}) - H(\mathbf{r}_0))}{\int \delta(H(\mathbf{r}) - H(\mathbf{r}_0)) d\mathbf{r}_0} & \text{エルゴード系} \\ \frac{\delta(\mathbf{I}(\mathbf{r}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}_0))}{\int \delta(\mathbf{I}(\mathbf{r}) - \mathbf{I}(\mathbf{r}_0)) d\mathbf{r}_0} & \text{可積分系} \end{cases} \quad (96)$$

Poincaré 写像を考えよう。 $\mathbf{s}$ を Poincaré 断面 Σ 上の座標とする。軌道の時間発展は Poincaré 断面を横切る座標の列 $\dots, \mathbf{s}_{-1}, \mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots$ によって記述される。ここで、 Σ 上で次のデルタ関数を定義する。

$$\bar{\delta}(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \delta(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) \tau(\bar{\mathbf{s}}) \quad (97)$$

である。ただし、 $\tau(\mathbf{s})$ は横断点 $\mathbf{s}$ の一つ前の横断点から $\mathbf{s}$ までに要する時間である。次の量を考える。

$$\sigma(\mathbf{s}, t; \mathbf{s}_0) = \sum_n \delta(t - t_n) \bar{\delta}(\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}_n) \quad (98)$$

エルゴード仮説により、

$$\langle \sigma(\mathbf{s}, t; \mathbf{s}_0) \rangle_t = \tau(\mathbf{s}) \quad (99)$$

となる。さて、式 (99) において $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$ とおいてみよう。すると、周期軌道からの寄与が $\sigma(\mathbf{s}, t; \mathbf{s})$ に効いてくることになる。 Σ にわたって積分を実行すると、

$$\int_{\Sigma} ds \sigma(\mathbf{s}, t; \mathbf{s}) = \sum_p B_p \delta(t - T_p) \quad (100)$$

となる。 B_p は後で決める。 T_p は周期軌道の周期である。

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^T \right\} dt \int_{\Sigma} ds \dots = \int_{\Sigma} ds \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^T \right\} dt \dots \quad (101)$$

であることと式 (99) に注意すると、十分大きな T に対して、

$$\sum_{|T_p| < T} B_p = 1 \quad (102)$$

が得られる。さて、 B_p であるが、これは Poincaré 写像の Jacobi 行列から、 $B_p = T_p / |\det(M_p - I)|$ であることが分かる。 T_p で素周期軌道とその繰り返しの周期軌道との区別を取り外し、 T_p を T で置き換えると、式 (93,94) の H-OdA 和則が得られる。物理的な意味は以下のように考えることができる。周期軌道からの寄与は周期が長くなるほど小さくなり (Lyapunov 指数は指数関数的に大きくなる。)、それは周期軌道の数の指数関数的な爆発とうまく釣り合っ H-OdA 和則の関係が成り立っている。また、H-OdA 和則は位相空間 (或は Poincaré 断面) 中に周期軌道が一様に分布していることを示している。ちなみに、この H-OdA 和則について、Parry による厳密な証明がある [17]。

さて、 $K(t)$ の対角部分は、ユニタリ対称性に対して、

$$K^{(diag)}(t) = \frac{1}{h} \sum_p \sum_r \frac{T_p^2}{|\det(M_p^r - I)|} \delta(t - rT_p) \quad (103)$$

となる。 r は負の traversal も含めることにした。 $K(t)$ の振舞いは t の値によって、以下のように振舞うことが分かる。簡単のため $\hbar = 1$, $d_0 = 1$ とする。

$$K(t) \approx K^{(diag)}(t) \approx \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sum_p \sum_r \frac{T_p^2}{|\det(M_p^r - I)|} \delta(t - rT_p) & t < t^* \\ \frac{t}{2\pi} & t^* < t < 2\pi \\ 1 & 2\pi < t \end{cases} \quad (104)$$

ここで、 T_{min} は最も短い周期軌道の周期で、 $T_{min} \ll t^* \ll 2\pi$ である。 $K(t)$ の概形は図 6 にあるようになる。 t が小さい時は、デルタ関数が生で見えるので、細かいピークが立つ。しかし、2 番目の区間では H-OdA 和則により、デルタ関数の和が滑らかに見えようになり、その slope は Heisenberg time $t_H = \hbar d_0$ まで続く。3 番目の区間では § 4 で示される半古典和則により、一定値を取るようになる。

この対角近似の妥当性は、周期軌道の分布の仕方に依存することをここに注意しておく。周期軌道の作用が十分ランダムに分布しておれば、非対角項は消去されと考えられる。しかしながら、これは少し奇妙である。なぜならば、Gutzwiller トレース公式によれば古典系の不安定周期軌道が系に固有のエネルギー準位を決めているのであるから、周期軌道は第一近似としてはランダムに分布しているかも知れないが (実際、数値計算をすると作用は Gauss 分布している。たとえば、[52, 53] を見よ。) 周期軌道間に何らかの強い関係があると考えられる。この関係を知るためには、非対角項を解析的に扱うことが必要であろう。次に、その非対角項の役割を考える。

3.1 周期軌道間の相関 [39]

Argaman et al.[39] は $R_2(x)$ の非対角項の役割を調べるために、ランダム行列論を用いて周期軌道間の相関を見積もり、実際のモデル系における周期軌道間の相関を数値計算し

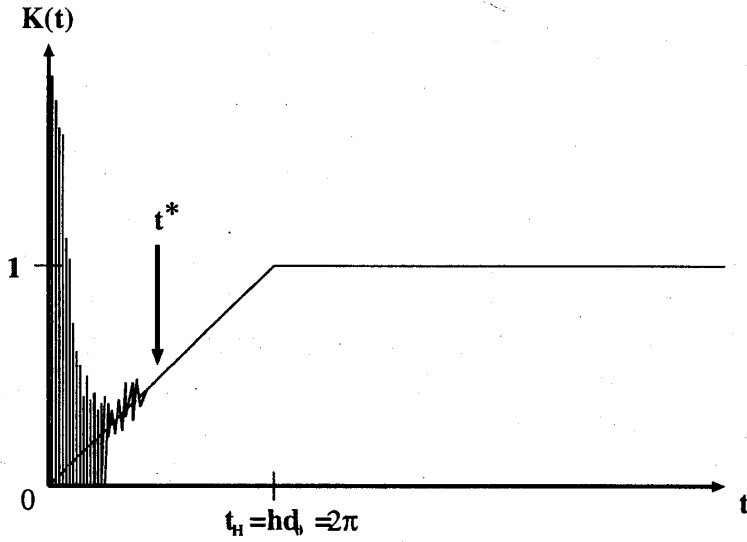


図 6: Spectral form factor : Berry による説明。 $\hbar = 1$, $d_0 = 1$ とした。

た。彼らの調べたのは、次の量である。

$$P(x; T) = \left\langle \sum_{p, p'} \frac{T_p T_{p'}}{\sqrt{|\det(M_p - I)|} \sqrt{|\det(M_{p'} - I)|}} \delta(T - (T_p + T_{p'})) \delta(x - (S_p - S_{p'})) \right\rangle \quad (105)$$

この量は、以下のように Spectral form factor と関係している。

$$\hat{P}(y) = \frac{1}{2\pi^2 T} P\left(\frac{Vy}{2\pi T}; T\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dz z \left[K\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{g}{z} \cos(yz) \right] \quad (106)$$

ここで、

$$V(E) = \int \int d\mathbf{q} d\mathbf{p} \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad (107)$$

で、 g は周期軌道の多重度である。ランダム行列論の結果を $K(\tau)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{P}_{GOE}(y) = & -\frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(y/2)}{y} \right)^2 + \frac{2}{y\pi} [\cos(y) \{ \text{si}(y) \cos(y) - \text{Ci}(y) \sin(y) \} \\ & - \text{Ci}(2y) \sin(2y) + \text{si}(2y) \cos(2y)] \end{aligned} \quad (108)$$

$$\hat{P}_{GUE}(y) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(y/2)}{y} \right)^2 \quad (109)$$

となる。変形 Arnold 猫写像、パイコネ変換、Hyperbola Billiard 系について、この結果が実際に周期軌道から求まる式 (106) と一致するか数値計算により確かめられ、作用の縮退がなくかつ系の特殊性がない領域で、ある程度一致することを確認できた。Riemann ゼータ関数についても、同様の相関関数を考えることができる。素数の場合は、

$$\hat{P}_R(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dE d_0(E) \left[K_R\left(\frac{T}{2\pi d_0(E)}\right) - \left| \frac{T}{2\pi d_0(E)} \right| \right] \exp(-iEx) \quad (110)$$

$$\approx -\frac{1}{2|x|} \text{ for } |x|e^T \gg 1 \quad (111)$$

と近似できる。この結果は、後で見る式 (152) の第二項と一致している。その意味については § 4 で述べる。

3.2 MIT グループの結果 [29, 30]

MIT グループの Andreev と Altshuler [29] は、 $R_2(x)$ の対角近似を越えた表式を超対称性の方法を用いて導いた。このとき、Altshuler と Shklovskii [28] の摂動計算の結果（対角項のみ）との比較から $R_2(x)$ が非対角項を含めて古典的な量（拡散方程式）によって表せることを示した。（この摂動論の概説は [62] にある。）その後、Agam, Andreev と Altshuler [30] は [29] の結果の半古典的な意味づけを行なった。解析の詳細は省くが、対応する古典系が非常に強いカオス系であるとして $|\Lambda_p| \gg 1$ を仮定し、対角項を丁寧に計算し、非対角項は Andreev と Altshuler の結果との対応からこうあるべきであるとして求めている。そのため、次節で述べる半古典論による Bogomolny と Keating による丁寧な解析と一部異なる結果となっていることを注意しておく。彼らの結果は以下のように要約できる。

$$R_2(x) = R_2^{(diag)}(x) + R_2^{(off)}(x), \quad (112)$$

$$R_2^{(diag)}(x) = -\frac{1}{2b\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \mathcal{D}(x), \quad (113)$$

$$R_2^{(off)}(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi^2} \mathcal{D}(x), \quad (114)$$

ただし、 $\hbar = 1$, $d_0 = 1$ とした。また、 $b = 1, 2$ はそれぞれ直交対称性、ユニタリ対称性を表している。 $\mathcal{D}(x)$ は以下のように、対応する古典系の Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}$

$$(\mathcal{L}^t \rho)(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{r} - \Phi^t(\mathbf{r}')) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (115)$$

の Fredholm 行列式 $Z(z) \equiv \det(1 - e^z \mathcal{L})$ によって表される。 $\mathbf{r}$ は $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$ と位置座標と運動量の組を表している。 Φ は古典力学系のフローを表している。二次元系に対して、 $Z(z)$ は

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{e^{zT_p}}{|\Lambda_p| \Lambda_p^k} \right)^{k+1} \\ &= \prod_{\mu} C_{\mu}(z - \gamma_{\mu}) \end{aligned} \quad (116)$$

と与えられる [54] (導出は Appendix にある。) Λ_p は monodromy 行列 M_p の最大固有値、 $\{\gamma_{\mu}\}$ は Ruelle-Pollicot 共鳴 ($\{e^{-\gamma_{\mu}}\}$ は $\mathcal{L}$ の固有値である。) であり、 $\gamma_0 = 0$ は平衡分布に対応し、また、 $\mu \neq 0$ に対して $\Re \gamma_{\mu} > 0$ である。 $\mathcal{D}(x)$ は

$$\mathcal{D}(x) = |\mathcal{N} \zeta(ix)|^2 = \prod_{\mu} \frac{A_{\mu}^2}{x^2 + \gamma_{\mu}^2}, \quad (117)$$

で与えられる。ここで、 $\mathcal{N}$ は規格化定数であり、 A_{μ} は regularization factor であって、

$$A_{\mu} = \begin{cases} 1 & \mu = 0 \\ \gamma_{\mu} & \mu \neq 0 \end{cases} \quad (118)$$

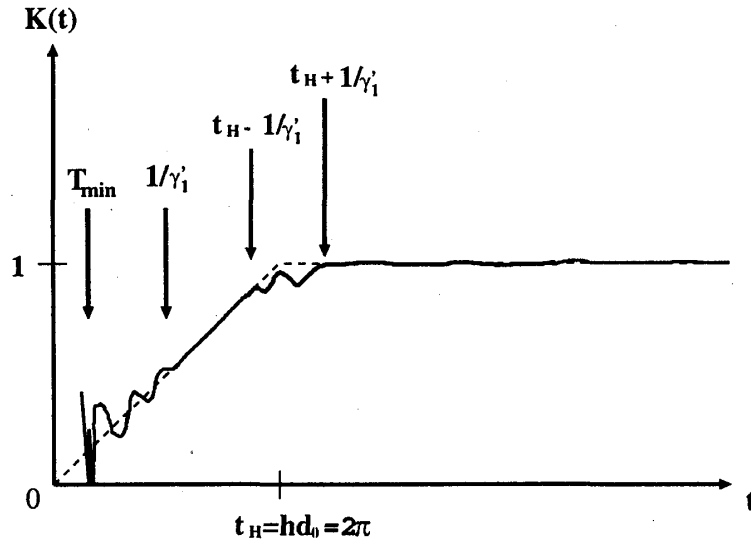


図 7: Spectral form factor : Agam et al. による説明。破線がランダム行列論の結果。 $\hbar = 1$, $d_0 = 1$ とした。また、 $\gamma_1 = \gamma'_1 + i\gamma''_1$ である。

である。注目すべき点は、(1) 非対角項が解析的に表されたこと、(2) 二点準位相関関数のような本来量子力学的な量と考えられる量が、エルゴード的な振舞いをする古典系の情報、特に、Ruelle-Pollicot 共鳴によって書き下されたことである。このことから、古典系とのアナロジーによって古典系の平衡状態 $\mu = 0$ が系の平均的な振舞いを表すと考えられ、事実、以下 (§ 3.4) に見るように $\mu = 0$ の部分がランダム行列論と一致する結果を示すことが分かる。

もう一度、Spectral form factor $K(t)$ の形を MIT グループの結果から考えてみよう。式 (113-114) から

$$K^{(diag)}(t) = \frac{|t|}{2\pi} \sum_{\mu} e^{-\gamma_{\mu}|t|} \quad (119)$$

$$K^{(off)}(t) = -\frac{|t|}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\mu \neq 0} \frac{\mathcal{D}_{\mu}(i\gamma_{\mu})}{2\pi\gamma_{\mu}} e^{i\gamma_{\mu}|t|} \quad (120)$$

と与えられる。ただし、

$$\mathcal{D}_{\mu}(s) = \left(1 + \frac{s^2}{\gamma^2}\right) s^2 \mathcal{D}(s) \quad (121)$$

$K(t)$ の概形は図 7 にあるように説明される。図 6 と比べて、 $t \sim t_H = hd_0 = 2\pi$ と $T_{min} \leq t \leq 1/\gamma'_1$ 付近にランダム行列論の結果に Ruelle-Pollicot 共鳴による振動の装飾が施されている。($\gamma_{\mu} = \gamma'_{\mu} + i\gamma''_{\mu}$ とおいた。)

3.3 Bogomolny と Keating の結果 [46]

Bogomolny と Keating[46] は、半古典論から周期軌道の作用が Gauss 分布しているという仮定のもとに、MIT グループの結果を再導出し、さらに refine した結果を得た。仮定と

なるのは、次のようなエネルギー平均に対して周期軌道の作用は Gauss 分布しているから一様に分布する角度として置き換えてしまえというものである。

$$\langle f(e^{iS_1}, e^{iS_2}, \dots, e^{iS_n}) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \prod_{i=1}^n d\phi_i f(e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_n}) \quad (122)$$

S_i は周期軌道の作用である。その結果は、状態密度における周期軌道の繰り返しを無視すると主要項までで、

$$R_2^{(diag)}(x) = -\frac{g}{4\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln D(x) \quad (123)$$

$$R_2^{(off)}(x) = \frac{\cos(2\pi d_0 x)}{2\pi^{2g} d_0^{2g-2}} |\mathcal{N}\zeta(ix)|^{2g} \quad (124)$$

と与えられる。 $\hbar = 1$ とした。ここで、 $g = 1, 2$ はユニタリ、直交対称性を示す。この g の値は、Fredholm 行列式 $Z(z)$ の中においてすべての周期軌道の多重度を表している。つまり、時間反転対称性がない系では $g = 1$ はすべての周期軌道の多重度が 1 であり、時間反転対称性がある系では時間反転操作によって移り変わる軌道があり、すべての周期軌道の多重度が 2 であると考えられるためである。しかし、時間反転対称性がある系に対しては後で述べるようにこの仮定には問題がある。ユニタリ対称性については前節の MIT グループの結果と一致している。ここで、彼らがコメントしていることで注意すべき点がある。これらの結果は、ユニタリ対称性に対しては $x \rightarrow 0$ でも $x \rightarrow \infty$ でもランダム行列論の結果と漸近的に一致する。他の直交対称性とシンプレクティック対称性に対しては $x \rightarrow \infty$ ではランダム行列論と一致するが、 $x \rightarrow 0$ ではランダム行列論と一致しない。これは、次の節で確かめる。後で見るように、この不一致は重要な問題として残る。シンプレクティック対称性に対しては、

$$R_2^{(diag)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |\zeta(ix)| \quad (125)$$

$$R_2^{(off)}(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{4} |\mathcal{N}\zeta(ix)| \quad (126)$$

となり、直交対称性と同様の問題を含んでいる。

また、彼らはユニタリ対称性 ($g = 1$) に対して、状態密度における周期軌道の繰り返しも含めて、丁寧に計算を実行することで refine された結果を得た。 $R_2^{(off)}(x)$ は、

$$R_2^{(off)}(x) = \frac{1}{2\pi^2} |\mathcal{N}\zeta(ix)|^2 \Re \left[\exp(2\pi i d_0 x) \prod_p \phi_p(x) \right] \quad (127)$$

で与えられる。最後の積の部分が refinement の結果である。ただし、

$$\phi_p(x) = \mathcal{Z}_1(a_p, b_p; c_p; q_p, z_p) \frac{|\zeta_p(0)|^2}{|\zeta_p(ix)|^2} \quad (128)$$

$\mathcal{Z}_1(a_p, b_p; c_p; q_p, z_p)$ は q -超幾何関数である。 $a_p = b_p = \exp(-iT_p x)$ 、 $c_p = q_p = \Lambda_p^{-1}$ 、 $z_p = |\Lambda_p|^{-1} \exp(iT_p x)$ と与えられる。また、 $\zeta_d(x) = \prod_p \zeta_p(x)$ で、 $x \rightarrow 0$ において

$\prod_p \phi_p(x) \rightarrow 1$ である。

同様の解析をして、Riemann ゼータ関数に対する refine された結果は、以下のように与えられる。

$$R_2^{(off)}(x) = \frac{1}{2\pi^2} |\zeta(1+ix)|^2 \Re \left[\exp(2\pi i d_0 x) \prod_p \left(1 - \frac{(1-p^{ix})^2}{(p-1)^2} \right) \right] \quad (129)$$

積の部分が H-L 予想と等価であることがまだ発表されていない論文の中で示されているようである。実際、上式の積の部分が § 4 での H-L 予想の表式と似ていることに気づくであろう。

3.4 ランダム行列論との比較

ランダム行列論によると、二点準位相関関数 $R_2(x)$ は、以下のように与えられることが知られている。詳しい導出は [11, 10] を御覧下さい。ここでは、便宜上、 $\hbar = 1$, $d_0 = 1$ とおく。直交対称性のアンサンブルに対しては、

$$R_2(x) = -\frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) \int_x^\infty \frac{\sin \pi x'}{\pi x'} dx' \quad (130)$$

$$= -1 + \frac{\pi^2 x}{6} - \frac{\pi^4 x^3}{60} + \frac{\pi^4 x^4}{135} + \dots \text{ as } x \rightarrow 0 \quad (131)$$

$$= -\frac{1}{\pi^2 x^2} + \frac{1 + \cos^2(\pi x)}{\pi^4 x^4} + \dots \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (132)$$

で、ユニタリ対称性のアンサンブルに対しては、

$$R_2(x) = -\frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2} \quad (133)$$

$$= -1 + \frac{\pi^2 x^2}{3} + \dots \text{ as } x \rightarrow 0 \quad (134)$$

$$= -\frac{\sin^2 \pi x}{(\pi x)^2} \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (135)$$

で、シンプレクティック対称性のアンサンブルに対しては、

$$R_2(x) = -\frac{\sin^2 2\pi x}{(2\pi x)^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \right) \int_0^x \frac{\sin 2\pi x'}{2\pi x'} dx' \quad (136)$$

$$= -1 + \frac{16\pi^4 x^4}{135} + \dots \text{ as } x \rightarrow 0 \quad (137)$$

$$= \frac{\cos(2\pi x)}{4x} - \frac{1 + 2\pi^{-1} \sin(2\pi x)}{4\pi^2 x^2} + \frac{1 + \cos^2(2\pi x)}{16\pi^4 x^4} + \dots \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (138)$$

である。

Refinement が入っていない半古典論の結果を使って、ランダム行列論の結果と一致するかチェックしてみよう。まず、ユニタリ対称性に対して、 $|\gamma_\mu| \gg 1 (\mu \neq 0)$ であれば、

$$\begin{aligned} R_2(x) &= -\frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{\mu \neq 0} \frac{\gamma_\mu^2 - x^2}{(x^2 + \gamma_\mu^2)^2} \right) + \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi^2} \frac{1}{x^2} \prod_{\mu \neq 0} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\gamma_\mu^2}} \\ &= -\frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2} \sum_{\mu \neq 0} \frac{1}{\gamma_\mu^2} + \dots \end{aligned} \quad (139)$$

となり、第2項が無視できれば、ランダム行列論の結果と一致する。第2項が無視できる条件とは、 $|\gamma_\mu|$ ($\mu \neq 0$) が大きいということである。この条件は、カオスが非常に強い時にあたる。直交対称性については、

$$\begin{aligned} R_2(x) &= -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{\mu \neq 0} \frac{\gamma_\mu^2 - x^2}{(x^2 + \gamma_\mu^2)^2} \right) + \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi^4} \frac{1}{x^4} \prod_{\mu \neq 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{x^2}{\gamma_\mu^2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{x^2} + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{\gamma_\mu^2} \left(1 - 3 \left(\frac{x}{\gamma_\mu} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{\gamma_\mu} \right)^4 - 7 \left(\frac{x}{\gamma_\mu} \right)^6 + \dots \right) \right\} \\ &\quad + \frac{\cos(2\pi x)}{2\pi^4} \frac{1}{x^4} \left(1 - \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{x}{\gamma_\mu} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (140)$$

となり、 $x \rightarrow \infty$ のとき対角部分がランダム行列論の結果の漸近形における第一項目と一致し、 $x \rightarrow 0$ では発散してしまい一致しない。シンプレクティック対称性についても具体的に計算をすると、直交対称性と同様の問題を持つことが分かる。

4 半古典和則 [35, 44, 45]

Berry の半古典和則 [35] は次の Lorentzian smoothing したデルタ関数に関して成り立つ式から導かれる。

$$\delta_\epsilon(x) \equiv -\frac{1}{\pi} \Im \frac{1}{x + i\epsilon} \quad (141)$$

に対して、

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon (\delta_\epsilon(x))^2 \quad (142)$$

である。したがって、エネルギーの縮退がなく、 $\Delta = 1/d_0 \gg \epsilon$ であれば、

$$d(E) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon (d_\epsilon(E))^2 \quad (143)$$

が成り立つはずである。式 (61,62) において E を $E + i\epsilon$ で置き換えた半古典表式を式 (143) に代入してエネルギー平均を取って得られるのが半古典和則である。エネルギー平均をとると、

$$\langle d(E) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \langle (d_{osc}^\epsilon(E))^2 \rangle \quad (144)$$

となるから、左辺は平均状態密度で、右辺は状態密度の揺らぎ、つまり、周期軌道の情報のみによって書かれることになる。したがって、今まで状態密度を二つに分けて書いてき

たが、平均状態密度と周期軌道の情報とが互いに関係することが読みとれる。

Keating[44] は Riemann のゼータ関数に Riemann 仮説を仮定し、非自明なゼロ点に関するスペクトル問題に対して半古典和則が成り立つことを、素数の 2 体分布に関する Hardy-Littlewood(H-L) 予想 [38] を用いて示した (以下を参照。)。式 (143) をみれば分かるように、半古典和則を確かめるには、式 (73) を式 (90) に入れて、素数のペアリングの項が現れる非対角項を評価する必要がある。そのために、H-L 予想が使われる。次に、H-L 予想を説明する。

Conjecture 1 (Hardy-Littlewood(H-L) 予想 (1923)) [38] N までの整数を考えることとする。 (m, n) を m と n の最大公約数とする。 $(m, n) = 1$ のとき、 $\Pi(m, n, k, N)$ を素数の組 (p, q) の数とする。ただし、次の条件を満たすものをとる。

$$mp = nq + k \quad (145)$$

$p < N$ として、 k は正の整数とする。もし、 $(k, m) = (k, n) = 1$ であって、 k と m と n の中の唯一つが偶数であるならば、

$$\Pi(m, n, k, N) \frac{\ln^2 N}{N} \sim \frac{2C_2}{n} \prod_{\substack{p \geq 3 \\ p|k \\ p|m \\ p|n}} \frac{p-1}{p-2} \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (146)$$

が成り立つ。ここで、積は k, m, n のすべての奇素数 divisor をとり、 C_2 は

$$C_2 = \prod_{q \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2} \right) \quad (147)$$

で与えられる。ただし、積はすべての奇素数 q にわたる。さもなければ、

$$\Pi(m, n, k, N) \frac{\ln^2 N}{N} \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (148)$$

である。

H-L 予想を認めるとする。我々の目的に合うように二体相関の性質をみるには $m = n = 1$ とおいて k だけ離れた素数の間の相関を見ることにすれば良い。

$$\pi_k(N) \equiv \#\{p \leq N \text{ \& } (p-k) \text{ is prime.}\} \quad (149)$$

$$\sim \alpha(k) \frac{N}{(\ln N)^2} \quad \text{as } N \rightarrow \infty \quad (150)$$

もし k が偶数ならば、 $\alpha(k)$ は 2 つの積によって表される。

$$\alpha(k) = 2 \prod_{q \geq 3} \left(1 - \frac{1}{(q-1)^2} \right) \prod_{\substack{p \geq 3 \\ p|k}} \left(\frac{p-1}{p-2} \right) \quad (151)$$

もし k が奇数ならば、 $\alpha(k) = 0$ である。また、平均的には $k \rightarrow \infty$ で、

$$\alpha(k) \approx 1 - \frac{1}{2k} \quad (152)$$

と与えられることが知られている ([45] の Appendix)。上式の第一項の 1 は Poisson 過程にしたがって素数が分布している場合を表し、第二項はその過程に補正がついていることを示している。実は、半古典和則を示すためにはこの補正の項が重要となる。

このままでは、何のことやら分からないと思われるので、もう少し物理屋に分かり易く説明しよう。実は、積で表されている所は確率の計算をしているのである。素数分布に関する確率を考えよう。一般に、与えられた整数 n の近くで素数を見出す確率 $P(n)$ は、

$$P(n) \sim \frac{1}{\log n} \quad (153)$$

で与えられる。これは、素数定理から素直に理解される。

Theorem 1 (素数定理) x より小さな素数の数 $\pi(x)$ は、 $x \rightarrow \infty$ で、以下のように振舞う。

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \text{ \& } p \text{ is prime.}\} \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{as } x \rightarrow \infty \quad (154)$$

次に、 n と $n-k$ が素数である確率 $P(n, n-k)$ は $n \rightarrow \infty$ で

$$P(n, n-k) \sim \frac{\pi_k(n)}{n} = P(n)^2 \alpha(k) \quad (155)$$

さて、このような確率描像は素数の分布だけでなく、整数の divisibility についても使える。正の整数の集合 Ω において、 $n \in \Omega$ が素数 p によって割ることができる確率は

$$\text{Prob.}\{n \equiv 0 \pmod p \text{ for } n \in \Omega\} \sim \frac{1}{p} \quad (156)$$

と与えられる。また、

$$\text{Prob.}\{n \equiv 0 \pmod p \text{ but } n \not\equiv 0 \pmod{p^2} \text{ for } n \in \Omega\} \sim \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{p-1}{p^2} \quad (157)$$

ここで、「異なる素数による division は独立である」と仮定する。つまり、「与えられた素数 p と q の両方によって、割れる整数である確率は $\sim \frac{1}{pq}$ で与えられる。」とする。要するに、素数は独立に分布しているということである。

以上から、式 (150) を示そう。もし n が素数ならば、 $n=2$ の場合を除いて、 n は奇数である。だから、もし $n-k$ が素数ならば、 k は偶数である。したがって、もし k が奇数ならば、 $\alpha(k)=0$ である。次に、 k が偶数である場合を考える。比 $P(n, n-k)/P(n)^2$ を考えよう。目標はこの比を確率的に求めることである。もし p が素数であると、 p は任意の $p' < p$ なる素数 p' によって、割ることはできない、しかし、素数は統計的に独立だから、ある素数の divisibility は他の素数の divisibility とは独立である。そこで、素数 p が与えられたとして、 n が p によって割れない確率は、

$$\text{Prob.}\{n \not\equiv 0 \pmod p\} \sim 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \quad (158)$$

である。次に、 $\text{Prob.}\{n \not\equiv 0 \pmod p \text{ \& } n \not\equiv k \pmod p\}$ を考える。二つの可能性がある。(1) もし $k \equiv 0 \pmod p$ であると、条件 $n \equiv 0 \pmod p$ と $n \equiv k \pmod p$ は同じ条件になって

しまう。したがって、 n について許されない条件が唯一つあることになり、求める確率は、

$$\text{Prob.} \sim 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \quad (159)$$

となる。(2) もし $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ であると、条件 $n \equiv 0 \pmod{p}$ と $n \equiv k \pmod{p}$ は独立である。だから、 n について許されない条件が二つあることになり、したがって、

$$\text{Prob.} \sim 1 - \frac{2}{p} = \frac{p-2}{p}. \quad (160)$$

最後に、 n より小さいすべての素数について積を取らなければならないから、

$$\frac{P(n, n-k)}{P(n)^2} \approx \prod_{p|k} \frac{(p-2)/p}{(p-1)^2/p^2} \prod_{p \nmid k} \frac{(p-1)/p}{(p-1)^2/p^2} \quad (161)$$

となる。上式を整理すると $\alpha(k)$ の表式 (式 (151)) に他ならないことが分かる。

式 (73) の状態密度を式 (143) に代入して H-L 予想を使って、半古典和則を確かめることができる。詳細を省く (詳しくは、[44] を参照。) が、最終的に、以下のように主要項のオーダーで、対角項と非対角項の間に $\epsilon \rightarrow 0$ において発散する項が現れ、それぞれが打ち消しあって半古典和則が成り立つ。注意して頂きたいのは、定数として残る項は、式 (152) における右辺第二項から来ている。つまり、Poisson 過程からのずれによって、半古典和則が成り立っているのである。

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sqrt{2} \langle (d_\epsilon(E))^2 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \sqrt{2} \{ (\text{Diagonal part}) + (\text{Off-diagonal part}) \} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} + \left\{ \frac{\log E}{2\pi} - \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \right\} \\ &= \frac{\log E}{2\pi} = \langle d(E) \rangle. \end{aligned} \quad (162)$$

ここでは、 δ 関数を鈍すのに Gaussian smoothing を取ったので、 ϵ の前の係数が Lorentzian smoothing の場合と異なっている。 δ 関数の鈍し方によって最終的な結果は変わらない。次節で準位曲率分布を半古典的に求める時にも発散する項が現れ、その打ち消し合いが問題となる。

さて、我々の興味である量子カオス系に戻り、MIT グループの結果を用いて半古典和則を確かめておこう。ユニタリ対称性に対しては、以下のように、

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \langle (d_\epsilon(E))^2 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon R_2^\epsilon(x=0) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{4\epsilon^2} + \sum_{\mu \neq 0} \frac{\gamma_\mu^2 + 4\epsilon^2}{(\gamma_\mu^2 - 4\epsilon^2)^2} - \frac{1}{4\epsilon^2} (1 - 4\pi d_0\epsilon + \dots) \prod_{\mu \neq 0} \frac{1}{1 - \frac{4\epsilon^2}{\gamma_\mu^2}} \right\} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \left\{ \frac{\pi d_0}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) \right\} \\ &= d_0 = \langle d(E) \rangle \end{aligned} \quad (163)$$

となり、確かに成り立っている!! このことは、[46] には触れられていない。また、このことから半古典和則が成立するためには、Bogomolny と Keating による refinement を必要としないことが分かる。しかしながら、直交対称性とシンプレクティック対称性に対しては成り立たない。直交対称性に対してのみ示しておく。

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \langle (d_\epsilon(E))^2 \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon R_2^\epsilon(x=0) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \left[-\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{(2i\epsilon)^2} + \sum_{\mu \neq 0} \frac{\gamma_\mu^2 - (2i\epsilon)^2}{((2i\epsilon)^2 + \gamma_\mu^2)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cosh(4\pi\epsilon)}{2\pi^4} \frac{1}{(2i\epsilon)^4} \prod_{\mu \neq 0} \left(\frac{1}{1 + \frac{(2i\epsilon)^2}{\gamma_\mu^2}} \right)^2 \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi\epsilon \left[\frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{(2i\epsilon)^2} + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{1}{\gamma_\mu^2} \left(1 - 3 \left(\frac{2i\epsilon}{\gamma_\mu} \right)^2 + 5 \left(\frac{2i\epsilon}{\gamma_\mu} \right)^4 + \dots \right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cosh(4\pi\epsilon)}{2\pi^4} \frac{1}{(2i\epsilon)^4} \left(1 - \sum_{\mu \neq 0} \left(\frac{2i\epsilon}{\gamma_\mu} \right)^2 + \dots \right) \right] \\
 &= \infty
 \end{aligned} \tag{164}$$

なぜ直交対称性とシンプレクティック対称性に対して成り立たないのかというと、先に、ランダム行列論との比較をした時に述べた通り、二点準位相関関数が $x=0$ の付近で正しく求まっていないからである。 $x \rightarrow 0$ での不一致は $t \rightarrow \infty$ での振舞い、つまり、エルゴード的な振舞いに起因し、おそらく、H-OdA 則との関係から、この不一致の原因はすべての周期軌道の多重度を 2 に置いているからであると考えられる。つまり、直交対称性であっても、すべての周期軌道の多重度が 2 であるわけではなく、多重度が 1 であるような周期軌道の存在が問題になるのである。図 8 を見ていただきたい。ビリヤード系における例を示しておいた。(a) の例は時間反転したものが自分自身となっている self-retracing な周期軌道である。(b) の例は多重度 2 の周期軌道である。実際、ユニタリ対称性に対しては $K(t)$ の対角近似が Heisenberg 時間までの傾斜 (式 (104) における第二の領域。) を正確に実現するのに対し、直交対称性ではこの時間領域で対角近似が正しい値を示していない。この問題は、次節の準位曲率分布に対しても問題を引き起こす。また、ちなみに、なぜ Riemann ゼータ関数に対して半古典和則がうまく成り立ったかということ、素数の多重度は 1 であるから、実は Riemann ゼータ関数の属する対称性がユニタリ対称性なのである [40, 41, 44, 45, 47]。

時間反転対称な系における多重度 1 の周期軌道 (self-retracing) と多重度 2 の周期軌道の数はどのように分布しているのだろうか? 簡単な考察により、以下のように分布していることが分かる。今、系が完全な記号力学で記述できるとしよう⁷。つまり、シンボル集合 $A \equiv \{0, 1, \dots, N-1\}$ から作られるシンボル列の集合 $S \equiv A^{\mathbb{Z}}$ が考えている系の軌道

⁷一般には、考えている系が完全な記号力学で記述できるわけではないが、得られる結果 (Fraction は $\sim e^{-h_{\text{top}} m}$) は同じである。

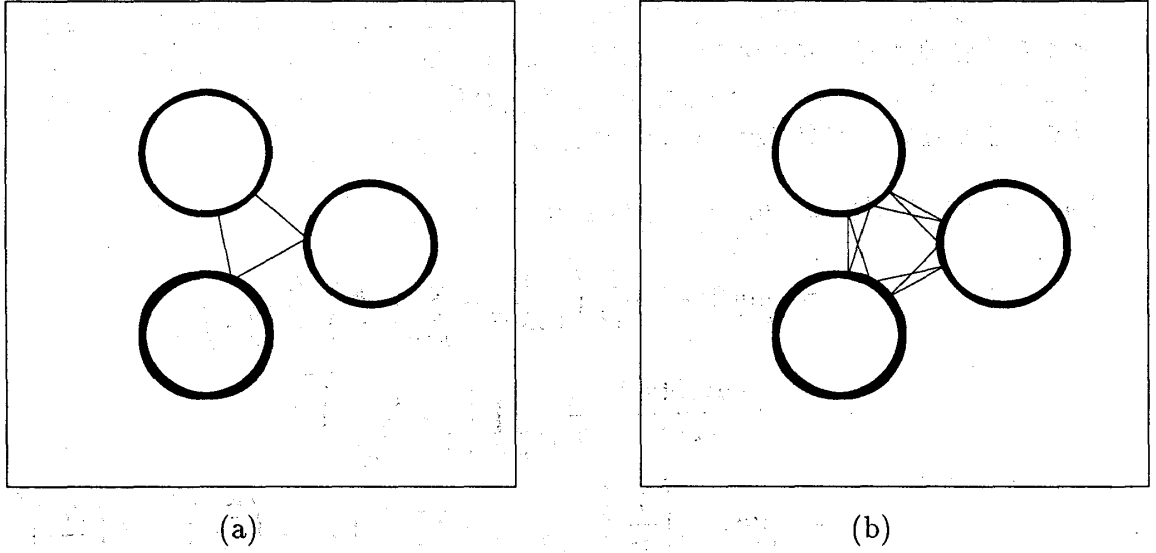


図 8: ビリヤード系の周期軌道の例: (a) *self-retracing* な周期軌道。(b) 多重度が 2 である周期軌道。

のすべてと一対一で対応しているとする。シンボル列は bi-infinite なシンボル列

$$S = \cdots s_{-2}s_{-1} \bullet s_0 s_1 s_2 \cdots \quad (165)$$

で与えられ、時間発展は次のシフト σ

$$s_{n+1} = \sigma s_n \quad (166)$$

或は、

$$s' = \sigma S = \cdots s_{-2}s_{-1}s_0 \bullet s_1 s_2 \cdots \quad (167)$$

で特徴付けられる。このとき、周期 n の周期的なシンボル列

$$\begin{aligned} s_n &= \overline{s_1 s_2 \cdots s_n} \\ &= \cdots s_1 s_2 \cdots s_n s_1 s_2 \cdots s_n s_1 s_2 \cdots s_n \cdots \end{aligned} \quad (168)$$

において、*self-retracing* な軌道に対応するのは n が奇数のときで、

$$s_{2m+1} = \overline{s_1 s_2 \cdots s_{m-1} s_m s_{m-1} \cdots s_2 s_1} \quad (169)$$

の形の時である。周期 n の周期的なシンボルの数は N^n であり、周期 $2m+1$ の *self-retracing* な周期的なシンボルの数は N^m である。したがって、シンボル列と軌道とが一対一で対応しているとしたから、周期 $2m+1$ と $2m$ の間の周期軌道の集合における *self-retracing* な周期軌道の fraction は

$$\frac{\#\{\text{self-retracing P.O.'s with period } 2m\}}{\#\{\text{P.O.'s with period } 2m+1 \text{ and } 2m\}} = \frac{N^m}{N^{2m} + N^{2m+1}} \sim e^{-mh_{\text{top}}} \quad (170)$$

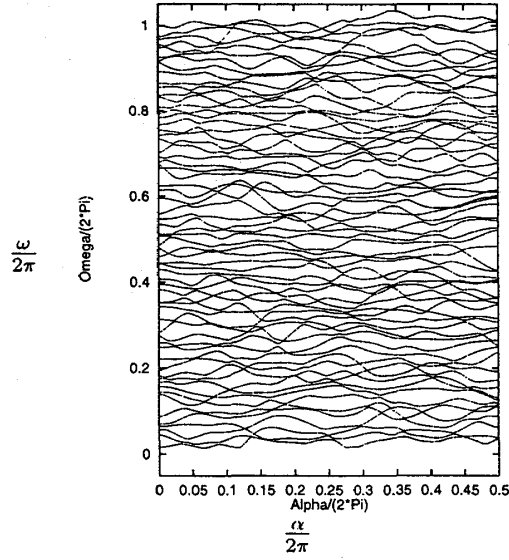


図 9: *Level dynamics* の例 : ブロッホ・パラメータ α を付与された量子化された *kicked rotator* 系。 $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + K \cos(\hat{p} + \hbar\alpha) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - n)$, $\hbar = \frac{2\pi}{N}$, $N = 64$, $K = 20.0$

となる。ここで、 $h_{top} = \log N$ であって、トポロジカル・エントロピーを表す。このことから、数の上では self-retracing な軌道の役割は周期が長くなれば長くなるほど、指数関数的に小さくなっていくことがわかる。しかし、実際には周期軌道の安定性と周期軌道の相互関係がどうなっているかが問題であるので、この数の議論はあまり役に立たない。

5 準位速度・準位曲率とそれらの分布

量子カオス系における外部パラメータに対するエネルギーの依存性の典型的な例は、図 9 にあるような振舞いである。準位速度・準位曲率とは外部パラメータ λ に対するエネルギー固有値の一階・二階の微分である。

$$\mathcal{V}_n = \frac{\partial E_n}{\partial \lambda}, \quad \mathcal{K}_n = \frac{\partial^2 E_n}{\partial \lambda^2} \quad (171)$$

これらの量は物理的に非常に重要な量である。準位速度は、Aharonov-Bohm flux を貫かれたメソスコピック・リングにおける永久電流の表式に現れる。また、準位曲率は、例えば、 λ を磁場とすると軌道磁性の帯磁率の表式に現れる。また、 λ を結晶運動量や Aharonov-Bohm flux とすると有効質量や Thouless コンダクタンス [49] に関係し、輸送現象の解析に使われる。後者については準位曲率の半古典表式は求められているので、紹介しておく [51]。今、考えている系は周期的であって、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{\hbar \boldsymbol{\phi}}{L} \right)^2 + V(\hat{\mathbf{q}}) \quad (172)$$

と与えられる。ただし、 $V(\mathbf{q} + L\mathbf{e}_i) = V(\mathbf{q})$ である。簡単のため d 次元のすべての方向で L の大きさの基本セル (Wigner-Seitz セル) が周期的に配置されているとする。(例えば、

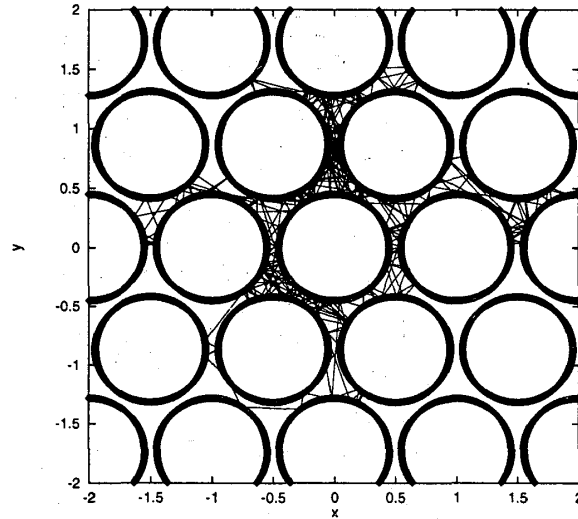


図 10: 三角格子 Lorentz ガスモデル: 格子間隔 $R = 1.0$, ディスク半径 $a = 0.45$. 今の場合、格子は三角格子で、基本セル (Wigner-Seitz セル) は正六角形である。典型的な古典カオス軌道をプロットしてある。

三角格子の場合は図 10 である。) 量子力学の教科書にあるように、 ϕ_i についての 2 次の摂動論で準位曲率は求まる (摂動パラメータは、 $\hbar\phi/L$ で十分小さな量である。)

$$\left[\frac{\partial^2 E_\alpha(\phi)}{\partial \phi_i^2} \right] = \frac{2\hbar^2}{L^2} \left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{m^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{|\langle \alpha(\phi) | \hat{p}_i | \beta(\phi) \rangle|^2}{E_\alpha - E_\beta} \right] \quad (173)$$

これを半古典的に求めるには、周期的な対称性を既約した半古典論を作る必要がある。対称性を考慮に入れた Gutzwiller トレース公式は、 $\phi = 0$ で、

$$d_{osc,m}(E) = \frac{d_m}{\pi\hbar} \Re \sum_p \frac{T_p}{|K_p|} \sum_{r=1}^{\infty} \chi_m(g_p^r) \frac{\exp[i\pi r(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p\pi}{2})]}{|\det(\mathbf{M}_p^r - \mathbf{I})|^{\frac{1}{2}}}, \quad (174)$$

と与えられる。ここで、 m は既約表現についてのインデックス、 d_m は m 番めの既約表現の次元、 $|K_p|$ は群 G の部分群 K_p の位数、 $\chi_m(g_p)$ は m 番めの既約表現に対する対称操作 g_p の指標である。今考えている系は既約表現が逆格子ベクトル $\mathbf{k}$ によっており、また、対称操作は基本セルをどれだけ移動するかを示すベクトル $\mathbf{w}_p = (w_{p,1}, w_{p,2}, \dots, w_{p,d})$ によって指定できる。 $\mathbf{w}_p$ は巻き数のベクトルと呼ばれる。周期軌道に対する巻き数 $w_{p,i}$ の分布は図 11 にあるように、ガウス分布していることが知られている (モデルは三角格子 Lorentz ガスモデル。アンサンブルはある衝突回数毎にとってある。)。このとき、指標 $\chi_m(g_p)$ は $\chi_{\mathbf{k}}(\mathbf{w}_p) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}_p)$ となるので、

$$d_{osc,\mathbf{k}}(E) = \frac{d_{\mathbf{k}}}{\pi\hbar} \Re \sum_p \frac{T_p}{|K_p|} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\exp[i\pi r(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p\pi}{2} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}_p)]}{|\det(\mathbf{M}_p^r - \mathbf{I})|^{\frac{1}{2}}} \quad (175)$$

となる。次に、Bloch パラメータ $\hbar\phi/L$ (結晶運動量) を導入すると、基本セルを移動する度に位相をかせぐから、プロパゲータは $\phi = 0$ のときのものとは比べて、

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t; \phi) = e^{-i\phi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})/L} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t; \phi = 0). \quad (176)$$

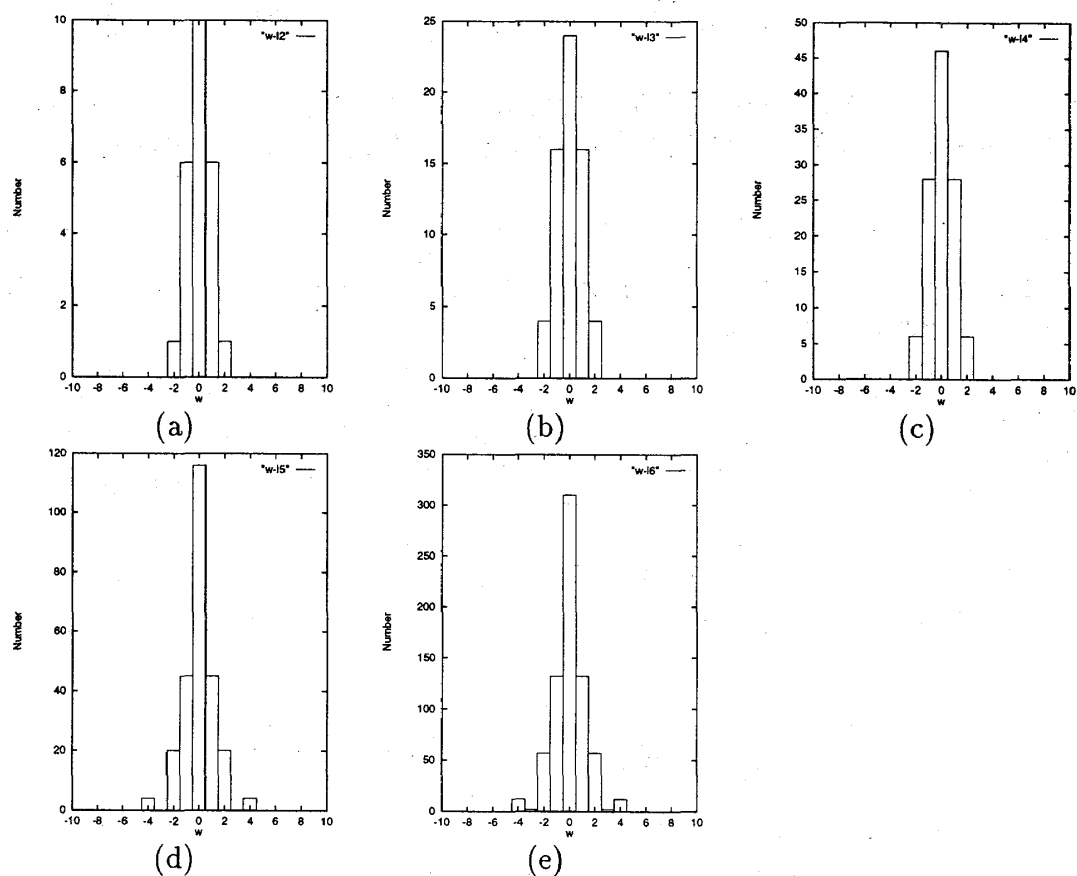


図 11: 三角格子 Lorentz ガスモデルにおける巻き数分布 : (a) から (e) まではそれぞれ衝突回数 2 回から 6 回までの素な周期軌道に関するもの。

となる。これから、最終的に Gutzwiller トレース公式は

$$d_{osc,k}(E; \phi) = \frac{d_k}{\pi \hbar} \Re \sum_p \frac{T_p}{|K_p|} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\exp[i r (\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p \pi}{2} + (\mathbf{k} - \phi) \cdot \mathbf{w}_p)]}{|\det(\mathbf{M}_p^r - \mathbf{I})|^{\frac{1}{2}}}. \quad (177)$$

となる。先に示したように Gutzwiller-Voros ゼータ関数の形に書くと、

$$\mathcal{Z}_k(E; \phi) = C \exp[-i\pi N_0(E)] \times \prod_{j_1, \dots, j_{f-1}=0}^{\infty} \prod_p \left(1 - \frac{\exp \left[i \left(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p \pi}{2} + (\mathbf{k} - \phi) \cdot \mathbf{w}_p \right) \right]}{\prod_{k=1}^{f-1} |\lambda_p^{(k)}|^{\frac{1}{2}} \lambda_p^{(k)j_k}} \right)^{m_p}, \quad (178)$$

となる。 $m_p = \frac{d_k}{|K_p|}$ は周期軌道の多重度であり、 C は適当な定数、 $\exp(-iN_0(E))$ は $\mathcal{Z}_k(E; \phi)$ が実軸を通るようにする因子で、 $N_0(E)$ は平均累積状態密度である。固有値は、

$$\mathcal{Z}_k(E(\phi); \phi) = 0 \quad (179)$$

で決まる。式 (179) を ϕ_i について二回偏微分し、 $\phi = \mathbf{0}$ で $\frac{\partial E_n}{\partial \phi_i} = 0$ であることを使って、準位速度・準位曲率の半古典表式は

$$\left. \frac{\partial E_n(\phi)}{\partial \phi_i} \right|_{E=E_n(\phi=0)} = -i\hbar \frac{\sum_k (w_{p_1}^i + w_{p_2}^i + \dots + w_{p_k}^i)^2 \tilde{t}_{p'_1+p'_2+\dots+p'_k}}{\sum_k (T_{p_1} + T_{p_2} + \dots + T_{p_k}) \tilde{t}_{p'_1+p'_2+\dots+p'_k}} \Big|_{E=E_n(\phi=0)}, \quad (180)$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_n(\phi)}{\partial \phi_i^2} \right|_{E=E_n(\phi=0)} = -i\hbar \frac{\sum_k (w_{p_1}^i + w_{p_2}^i + \dots + w_{p_k}^i)^2 \tilde{t}_{p'_1+p'_2+\dots+p'_k}}{\sum_k (T_{p_1} + T_{p_2} + \dots + T_{p_k}) \tilde{t}_{p'_1+p'_2+\dots+p'_k}} \Big|_{E=E_n(\phi=0)}, \quad (181)$$

と与えられる⁸。ただし、

$$\tilde{t}_{p'} \equiv t_{p,l} = \frac{\exp \left[i \left(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p \pi}{2} + (\mathbf{k} - \phi) \cdot \mathbf{w}_p \right) \right]}{|\Lambda_p|^{\frac{1}{2}} \Lambda_p^l}, \quad (182)$$

$$\tilde{t}_{p'_1+p'_2+\dots+p'_k} = (-1)^{k+1} \tilde{t}_{p'_1} \tilde{t}_{p'_2} \dots \tilde{t}_{p'_k}. \quad (183)$$

である。 p' は (p, l) の組を表している。この表示は対応する古典系の拡散係数の表式

$$D = \frac{1}{2d} \frac{\sum_k (-1)^k (\mathbf{w}_{p_1} + \mathbf{w}_{p_2} + \dots + \mathbf{w}_{p_k})^2 / |\Lambda_{p_1} \Lambda_{p_2} \dots \Lambda_{p_k}|}{\sum_k (-1)^k (\tau_{p_1} + \tau_{p_2} + \dots + \tau_{p_k}) / |\Lambda_{p_1} \Lambda_{p_2} \dots \Lambda_{p_k}|}. \quad (184)$$

に酷似している [3]。 d は空間の次元である。この表式は、Gutzwiller-Voros ゼータ関数 $\mathcal{Z}(E; \phi)$ から準位曲率に対して行なったと同じ偏微分を Fredholm 行列式 $Z(z, \beta)$ に対して行ない、ドリフトがないと仮定して得られる [3]。式 (181, 184) の物理的な意味は次のようなものである。分子部分は出発点から移動した距離の平均自乗偏差を周期軌道の組合せから作られる軌道に関しての平均を表しており、分母部分はその平均的な時間を表している。古典系についての式 (184) は、Green-Kubo 関係式を周期軌道の平均という形で表

⁸ $\phi \neq \mathbf{0}$ に対する表式も $\frac{\partial E_n}{\partial \phi_i} \neq 0$ に注意して求まるが、式が長くなるので割愛する。

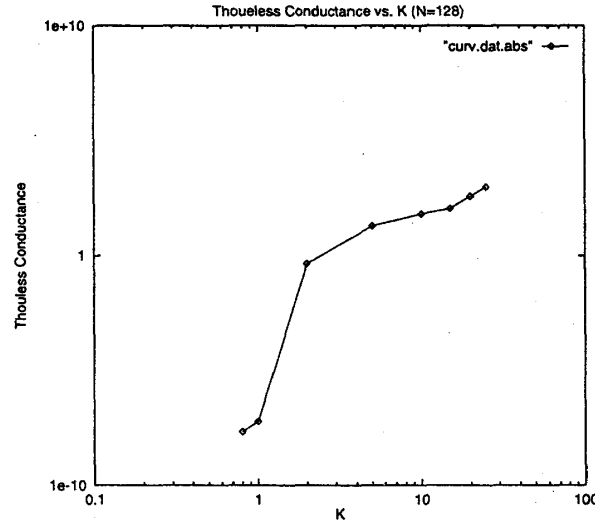


図 12: Thouless コンダクタンス g の K 依存性 : $N = \frac{2\pi}{\hbar} = 128$.

したものになっている。古典系と量子系の違いは、量子系において位相が付くことと重みが平方根になっていることである。以上の表式から容易に察しが付くように、量子カオス系の場合、Thouless 公式

$$g = \frac{1}{\Delta} \left\langle \left| \frac{\partial^2 E_n}{\partial \phi^2} \right|_{\phi=0} \right\rangle \quad (185)$$

(g はコンダクタンス。 $\Delta = 1/d_0$ は平均準位間隔。)は基本的には古典系の拡散係数を計算していることになっている⁹。図 12に量子化された kicked rotator 系の Thouless コンダクタンスの K 依存性を Plot した。古典系の拡散係数は十分大きな K に対して $D \sim K^2$ と振舞うことが知られている。この振舞いと Thouless コンダクタンスの振舞いがほぼ一致している。

また、ここでは久保公式との関係にも述べておきたい。久保公式は、

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{n_e g_s}{\Omega} \int dE \left(-\frac{df}{dE} \right) \sigma_{\mu\nu}(E), \quad (186)$$

と与えられる。ただし、

$$\sigma_{\mu\nu}(E) = \pi e^2 \hbar \text{Tr}[\hat{v}_\mu \delta(E - \hat{H}) \hat{v}_\nu \delta(E - \hat{H})], \quad (187)$$

$f(E)$ は Fermi-Dirac 分布であり、 Ω は考えている系の体積である。Akkermans と Montambaux らのランダム行列論を使ったかなり粗い議論 [71] によって、久保伝導率と Thouless コンダクタンスの比がユニバーサル定数であることが示された。Thouless コンダクタンスは平均化されたコンダクタンスなので、久保伝導率も平均化されたものを考えなければならない。この場合、平均操作はエネルギー平均である。さらに、彼らは電場が線形に時間に依存して断熱的に系に印加されるとして考え、その時間平均も考えた。 ϕ はハミル

⁹この場合、運動量方向における輸送過程を調べていることになることに注意。

古典系の結果	半古典論の結果
● 重みつき Frobenius-Perron 核 $\mathcal{L}^t(\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{x}) = e^{\beta \cdot (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x})} \delta(\hat{\mathbf{y}} - \Phi^t(\mathbf{x}))$	● Feynman 核 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t) = e^{-i\Phi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})/L} \langle \mathbf{x} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \mathbf{y} \rangle$ $\simeq e^{-i\Phi \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})/L} \sum_b A_b e^{iS_b/\hbar - i\pi\nu/4}$
● Fredholm 行列式 $\det(1 - e^z \mathcal{L}) = 0$	● スペクトル行列式 $\det(EI - \hat{H}) = 0$
● Ruelle ゼータ関数 $\frac{1}{\zeta(\beta; z)} = \prod_p (1 - t_p)$ $t_p = \frac{e^{\beta \cdot \mathbf{w}_p - z\tau_p}}{ \Lambda_p }$	● Gutzwiller-Voros ゼータ関数 $\mathcal{Z}_k(E; \phi) = \exp(-\pi N_0(E)) \prod_l \prod_p (1 - t_{p,l})$ $t_{p,l} = \exp \left[i \left(\frac{S_p}{\hbar} - \frac{\nu_p \pi}{2} + (\mathbf{k} - \phi) \cdot \mathbf{w}_p \right) \right]$ $\times \Lambda_p ^{-1/2} \Lambda_p^{-l}$
● 母関数 $Q(\beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \langle e^{\beta \cdot (\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x})} \rangle$ 固有値条件: $1/\zeta(\beta, Q(\beta)) = 0$	● 固有エネルギー $E_n^k(\phi)$ 固有値条件: $\mathcal{Z}_k(E_n^k, \phi) = 0$
● 拡散係数 $D = \frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d \left. \frac{\partial^2}{\partial \beta_j^2} Q(\beta) \right _{\beta=0}$	● 準位曲率 (有効質量の逆数 ($\phi = 0$)) $\sum_i \frac{\partial^2 E_n^k}{\partial \phi_i^2} \left(= \frac{1}{m^*} \right)$

表 1: 古典系の結果と半古典論の比較: Gutzwiller-Voros ゼータ関数は 2 次元系のものを表記している。

トニアン 式 (172) の中で展開すれば、電場と見ることができるから、 ϕ は時間を意味していると見ることもできる。(もちろん、「ベクトルになっているのをスカラーとみれば」の話である。) この結果として、久保公式に当たる部分は準位速度の相関関数として与えられる。この準位速度相関関数と Thouless コンダクタンスが比例関係になる。

$$\frac{\overline{\left\langle \frac{\partial E_n}{\partial \phi_i}(\phi) \frac{\partial E_n}{\partial \phi_i}(\phi + \phi') \right\rangle}}{\frac{1}{\Delta} \left\langle \left| \frac{\partial^2 E_n}{\partial \phi_i^2} \right|_{\phi=0} \right\rangle} \phi'=0 = C \quad (188)$$

…は ϕ についての平均を表す。この式の Akkermans と Montambaux の解釈はいささか理論的にはっきりとしないが、エネルギー平均をすれば久保伝導率と Thouless コンダクタンスが金属領域において比例関係になることは重要である。準位速度相関関数の部分は半古典論によって見積もられており [36]、周期軌道の巻き数の自乗平均によって決まっている。つまり、古典的な拡散係数によって決まっているのである。一方、超対称性の方法による Fyodorov と Sommers の結果 [24] によると、Akkermans と Montambaux の指摘したユニバーサル定数 C は $C = 2\pi$ と与えられる。残念ながら、現時点では準位曲率の半古典表式からこのユニバーサル定数を見積もれない。

さて、この準位曲率の統計性について考えよう。半古典表式が得られたがその統計性はそれほど簡単には理解できるものではない。まずは、ランダム行列論からの結果によって分

かっていることを紹介しよう。Gaspard et al.[19] はランダム行列論の結果を用いて準位曲率分布 $P(K)$ が

$$P(K) \sim K^{-(\nu+2)} \quad (189)$$

であることを示した。ただし、 $\nu = 1, 2, 4$ はそれぞれ直交・ユニタリ・シンプレクティックアンサンブルを表している。その後、高見ら [20] は $K = 0$ 付近での振舞いが式 (189) から外れることを数値的に示した。また、数値計算を駆使して Zakrzewski と Delande[21] は、 $P(k)$ ($k = K/\gamma_\nu$) が次の形をしていると予想を立てた (Zakrzewski-Delande (Z-D) 予想)。

$$P(k) = N_\nu \frac{1}{(1+k^2)^{(\nu+2)/2}} \quad (190)$$

γ_ν は

$$\gamma_\nu = \nu \frac{\pi}{\beta \bar{\rho}} \quad (191)$$

であり、

$$N_1 = \frac{1}{2}, \quad N_2 = \frac{2}{\pi}, \quad N_4 = \frac{8}{3\pi} \quad (192)$$

で、 $\bar{\rho}$ は平均状態密度である。 β は Level dynamics として見た時の温度を表し、

$$\beta = \frac{1}{\left\langle \left(\frac{dE_n}{d\lambda} - \left\langle \frac{dE_n}{d\lambda} \right\rangle \right)^2 \right\rangle} \quad (193)$$

である。

その後を続いて、von Oppen[22] は超対称性の方法を用いて、GOE に対する準位曲率分布を正確に求め、Z-D 予想と一致することを示した。その後、同じく超対称性の方法で、Fyodorov[23] は準位速度分布を、Fyodorov と Sommers[24, 25] は Aharonov-Bohm flux がある系に対して準位曲率分布を求め、Z-D 予想との一致を示した。また、Yurkevich と Kravtsov[26] は超対称性の方法で非摂動部分を丁寧に計算し、準位曲率分布と Thouless コンダクタンスに対する補正項を見積もっている。

Aharonov-Bohm flux のあるメソスコピック系 (或は周期的な格子系) に対する Fyodorov と Sommers の準位速度・準位曲率分布の定義が最もシッカリしたものなので、ここでは彼らの定義を採用しよう。 ϕ を Aharonov-Bohm flux とする。まず、形式的に、

$$K(u) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \text{Tr} G^+(\phi; \epsilon) \text{Tr} G^-(\phi = 0; \epsilon) \quad (194)$$

を定義する。ここで、

$$\phi = 2 \frac{\epsilon}{u} \quad \text{準位速度分布} \quad (195)$$

$$\phi = 2 \sqrt{\frac{\epsilon}{u}} \quad \text{準位曲率分布} \quad (196)$$

と定義する。ただし、ここで $G^\pm$ は遅延 (+)・先進 (-) グリーン関数である。もしエネルギー準位に縮退がなければ（この仮定は一般の量子カオス系に対して妥当な仮定である。）、 $K(u)$ は

$$K(u) = \sum_n \frac{u^2 + iu\mathcal{K}_n}{u^2 + \mathcal{K}_n^2} \delta(E - E_n) \quad \text{準位速度分布} \quad (197)$$

$$K(u) = \sum_n \frac{u^2 + iu\mathcal{V}_n}{u^2 + \mathcal{V}_n^2} \delta(E - E_n) \quad \text{準位曲率分布} \quad (198)$$

となる。 $P(\mathcal{V})$ と $K(u)$ と、或いは、 $P(\mathcal{K})$ と $K(u)$ とは、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\pi} \Re \langle K(u) \rangle &= u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(v)}{u^2 + v^2} dv \\ &= u \int_0^{\infty} dk e^{-uk} \int_{-\infty}^{\infty} dv P(v) \cos(kv) \quad \text{準位速度分布} \end{aligned} \quad (199)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\pi} \langle K(u) \rangle &= u^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\mathcal{K})}{u^2 + \mathcal{K}^2} d\mathcal{K} \\ &= u \int_0^{\infty} dv e^{-uv} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{K} P(\mathcal{K}) e^{i\mathcal{K}v} \quad \text{準位曲率分布} \end{aligned} \quad (200)$$

で関係付けられている。 $K(u)$ の表式から分かるように、半古典和則におけるようにデルタ関数に Lorentzian smoothing を導入して、デルタ関数の 2 乗を 1 乗に置き換えるトリックがここで使われている。式 (194) に対して半古典和則同様の解析を行なうと前節の問題に直面する。（詳細は省略する。）つまり、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすると $K(u)$ が発散してしまうのである。原因も同様で MIT グループ或は Bogomolny と Keating の結果を用いているためである。特に、 $\phi \rightarrow 0$ は時間反転対称性が破れた系から時間反転対称性が回復した系へ移行させなければならないため、周期軌道の時間反転対称性（周期軌道の多重度）を真面目に扱う必要がある。残念ながら、現時点では、どうしたらこの問題を解決できるか分からない。

また、準位曲率が Thouless 公式を通して輸送現象に関係していることから、輸送現象にとって軌道の時間反転対称性が重要な役割を担っていることが間接的ながら理解される。この結果は、弱局在の問題（[62] とそこに挙げられている文献）にそのまま焼き直おされ、これまでに得られている結果と consistent であると思われる。

6 まとめ

この小論では、「何がランダムであるのか」という問題意識を持ちながら、「量子カオス系がなぜランダム行列論と良い一致をするのか」、「半古典論でどこまで量子カオス系のユニバーサリティ（或はランダム行列理論の結果）に肉薄できるか」、「その力学的なメカニズムはどのようなものか」を、最近の MIT グループと Bogomolny と Keating の結果を紹介する形で示した。読者の中には次のような疑問をお持ちの方もおられたかと思う。「既に、超対称性の方法によって準位統計について沢山の結果が出されているのに、なぜ半古典論でわざわざ面倒なことをしなければならないのだ。」確かに、計算手段として超対称性の方法は優れている。しかし、そこで解析されているのは、ランダムネスを

仮定したモデルであり、出てくる結果は同じであるが、我々の扱っているモデルとは基本的に異なるものである。一般に、ある理論体系の仮定となっている所を十分に検討して仮定が成り立っているか、その仮定がどのような物理・数理的意味を持っているのかを調べるのは重要なことである。ある物理的な事柄が他の方法によって示されることも必要で、物理現象は色々な角度から研究されるべきであると思うのである。実際、MIT のグループが示したように超対称性の方法は半古典論に対して非常に有用な情報をもたらした。おそらく、半古典論と超対称性の方法はこれからも相補的な関係を保つのではなかろうか。

この小論で示したことの大部分は、既に得られている結果の紹介に過ぎないが、最後に紹介した準位曲率の半古典的解析についての結果は少しばかり新しい結果である。副産物として、準位曲率分布の半古典的な導出における困難が半古典和則を示す時に現れる困難と同じようなものであることが示された。まだ、この困難が解決できるものであるのかは分からないが、いずれも $R_2(x)$ の対角項と非対角項のキャンセレーションから起因している点は面白い。これは、あたかも素数のように分布する周期軌道の間の微妙な相関がランダム行列から得られる結果とある極限で一致するために必要であることを示し、非常に興味深いことである。周期軌道の微妙な相関は、Riemann ゼータ関数からの類推として、ランダムな過程 (Poisson 過程) にプラス補正項という形のものではないかと予想され (式 (151) 参照)、さらに、式 (127) から周期軌道のペアリングに関する確率と相関の形も Riemann ゼータ関数に対する H-L 予想と同じようなものと予想がつく。数値的な研究から量子カオス系とランダム行列との一致は驚くべきものであるが、最近、直交・シンプレクティック対称性に対してはランダム行列論とズレがあるという報告がある [56]。そのずれ方にはユニバーサリティがあるようである。量子カオス系はランダム行列との一致するの否かによらず、ユニバーサルな振舞いを示すのであるならば、self-retracing な周期軌道と多重度 2 の周期軌道の間のユニバーサルな関係が存在することを示しており、数の問題としては先に示したようにユニバーサルな振舞いがあることが分かっている。これは非常に興味深い点であるので今後研究の対象として面白いであろう。ところで、二点準位相関関数について中心に話しをしてきたが、同様にスペクトル行列式についても、相関関数

$$C(\xi) = \langle \det(x - \hat{H}) \det((x + \xi) - \hat{H}) \rangle \quad (201)$$

を考えることができる。この相関関数に関しても MIT グループ、Bogomolny と Keating と consistent な結果が得られている [55]。

また、統計力学的な興味もつきない。量子カオス系のユニバーサリティが対応する古典系のエルゴード的な性質の直接の現れであることは、半古典論による解析によって古典系のエルゴード性を量子系のエルゴード性の議論に使用することができることを意味する。個人的には、今後、この方向での発展を期待したい。

謝辞

e-mail による議論につき合って頂いた Keating 氏、別刷 [24, 25] を送って頂いた Fyodorov 氏に感謝します。また、この小論を他の物理分野からの目で読んで、貴重な意見を述べて

頂いた大阪大学大学院生の齊藤圭司さんに感謝します。

Appendix

この Appendix では、古典系における Perron-Frobenius 作用素に対する Fredholm 行列式が周期軌道によって展開されることを示す [54]。まず、位相空間内で定義される密度関数 $\rho(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})$) の時間発展は、 $\delta(\mathbf{r} - \Phi^t(\mathbf{r}'))$ によって、

$$(\mathcal{L}^t \rho)(\mathbf{r}) = \int \delta(\mathbf{r} - \Phi^t(\mathbf{r}')) d\mathbf{r}' \quad (\text{A-1})$$

と記述される。ただし、 Φ は今考えている系のフローである。ここでは、離散的な写像系をとりあえず考える。作用素 $\mathcal{L}$ は形式的には、 $\mathcal{L} = \delta(\mathbf{r} - \Phi^t(\mathbf{r}'))$ と与えられる。ここで、Fredholm 行列式は

$$Z(z) = \det(1 - e^z \mathcal{L}) \quad (\text{A-2})$$

で定義される。次の恒等式に注意して、

$$\det M = \exp \text{Tr} \log M \quad (\text{A-3})$$

すると、

$$Z(z) = \det(1 - e^z \mathcal{L}) = \exp [\text{Tr} \log(1 - e^z \mathcal{L})] \quad (\text{A-4})$$

である。更に、式 (67) を使って、

$$Z(z) = \exp \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n} \text{Tr}(\mathcal{L}^n) \right] \quad (\text{A-5})$$

となる。今考えている系が双曲的な系であって、周期軌道が孤立してあるとすると、 $\text{Tr}(\mathcal{L}^n)$ は周期軌道の和として表すことができる。

$$\text{Tr}(\mathcal{L}^n) = \sum_{p: \mathbf{r} = \Phi^n(\mathbf{r})} \frac{1}{|\det(1 - J_p)|} \quad (\text{A-6})$$

ここで、 p でインデックスされる周期軌道の J_p は、その周期軌道に対応した $\Phi^n(\mathbf{r})$ の Jacobi 行列である。今、双曲的なハミルトン系を扱っているので、Jacobi 行列 J_p は固有値 $\Lambda_{p,1}, \dots, \Lambda_{p,e}, \Lambda_{p,e+1}, \dots, \Lambda_{p,2d}$ を持ち、その内の最初の d 個が $|\Lambda_{p,l}| > 1$ ($1 \leq l \leq d$) であって、残りの固有値は $|\Lambda_{p,l}| < 1$ ($d+1 \leq l \leq 2d$) であるとする。シンプレクティックな系だから、これらの固有値は $\Lambda_{p,l}, \Lambda_{p,e+l} = 1/\Lambda_{p,l}$ とペアを成している。ここで、このペアリングを注意しながら、絶対値が 1 より大きな固有値に関して幾何級数で展開すると、最終的に、

$$Z(z) = \prod_{k_1 k_2 \dots k_d} \prod_{l_{d+1} l_{d+2} \dots l_{2d}} \frac{1}{\zeta_{k_1 \dots l_{2d}}(z)} \quad (\text{A-7})$$

$$\frac{1}{\zeta_{k_1 \dots k_d l_{d+1} \dots l_{2d}}(z)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{|\Lambda_p|} \frac{\Lambda_{p,d+1}^{l_{d+1}} \Lambda_{p,d+2}^{l_{d+2}} \dots \Lambda_{p,2d}^{l_{2d}}}{\Lambda_{p,1}^{k_1} \Lambda_{p,2}^{k_2} \dots \Lambda_{p,d}^{k_d}} e^{z n_p} \right), \quad (\text{A-8})$$

が得られる。ただし、 $\Lambda_p = \prod_{j=1}^d \Lambda_{p,j}$ とした。 $Z(z)$ は Ruelle ゼータ関数の逆数の無限積となっている。また、 $Z(z)$ の平衡状態に対応するゼロ点、つまり、 $z=0$ を考える時は、それぞれの Ruelle ゼータ関数のゼロ点と極がキャンセルし合う構造になっているので、 $l_i = 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) の Ruelle ゼータ関数だけを考えれば良い。

連続なフローの系では Poincaré 断面を設定して議論をすることになり、少々導出が長くなるので、ここでは最終的な表式についてのみ記す。最終表式は、離散写像系の場合における e^{zn_p} を e^{zT_p} で定義し直せば良く [54]。

$$\begin{aligned} Z(z) &= \exp \left[- \sum_p \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{e^{zT_p r}}{|\det(\mathbf{1} - \mathbf{M}_p^r)|} \right] \\ &= \prod_{k_1 k_2 \dots k_e} \prod_{l_{e+1} l_{e+2} \dots l_f} \frac{1}{\zeta_{k_1 \dots l_f}(z)}, \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

ただし、 $\mathbf{M}_p$ は周期軌道 p に対する (Poincaré 写像の) monodromy 行列であり、Poincaré 断面をとっているのとハミルトニアンが定数であることから、 d 次元系に対して f と e は $f = 2(d-1), e = d-1$ であり、

$$\frac{1}{\zeta_{k_1 \dots k_e l_{e+1} \dots l_f}(z)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{|\Lambda_p|} \frac{\Lambda_{p,e+1}^{l_{e+1}} \Lambda_{p,e+2}^{l_{e+2}} \dots \Lambda_{p,f}^{l_f}}{\Lambda_{p,1}^{k_1} \Lambda_{p,2}^{k_2} \dots \Lambda_{p,e}^{k_e}} e^{zT_p} \right). \quad (\text{A-10})$$

である。 $1/Z(z)$ は以下のような性質を持つ。

$$1/Z(z) \sim -\frac{G}{\pi z} + H \quad \text{as } z \rightarrow 0, \quad (\text{A-11})$$

ここで、 G と H は実定数である。

また、Ruelle-Pollicot 共鳴 (Perron-Frobenius 作用素 $\mathcal{L}$ の固有値は $\{e^{-\gamma_\mu}\}$) の複素平面上の様子は図 13 のようになる。 γ_0 は平衡状態に対応している。

参考文献

- [1] P.Gaspard, G.Nicols *Phys.Rev.Lett.*, **65**, 1693 (1990); P.Gaspard *J.Stat.Phys.*, **68**, 673 (1992); J.R.Dorfman, P.Gaspard *Phys.Rev.*, **E51**, 28 (1995); P.Gaspard, F.Baras *Phys.Rev.*, **E51**, 5332 (1995); P.Gaspard, J.R.Dorfman *Phys.Rev.*, **E52**, 3525 (1995).
- [2] P.Gaspard *Chaos*, **3**, 427 (1993); S.Tasaki, P.Gaspard *J.Stat.Phys.* **81**, 935 (1995); P.Gaspard *Phys.Rev.* **E53**, 4379 (1996).
- [3] P.Cvitanović P.Gaspard T.Schreiber. *Chaos*, **2**, 85 (1992); P.Cvitanović J.-P.Eckmann P.Gaspard. *Chaos, Solitons, Fractals*, **6**, 113 (1995).
- [4] M.C.Gutzwiller *J.Math.Phys.*, **12**, 343 (1971).
- [5] M.V.Berry in *Chaotic Behaviour in Deterministic Systems*, Les Houches 1981, Session XXXVI, ed. G.Ioos, R.H.G.Helleman, R.Stora, (North-Holland, Amsterdam, 1983), pp.171

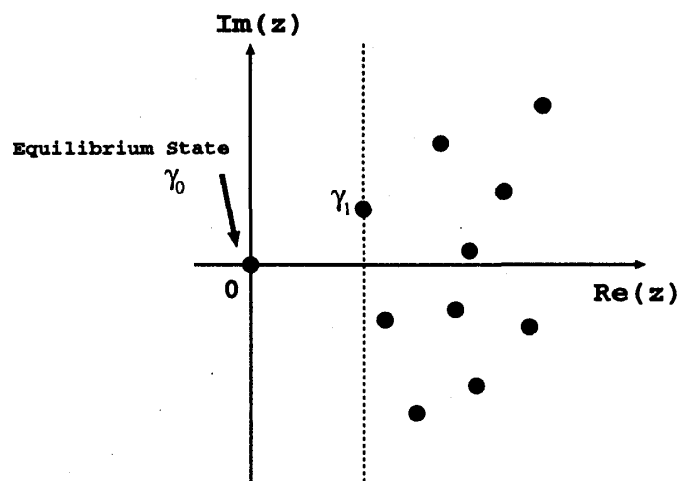


図 13: Ruelle-Pollicot 共鳴の複素平面上での様子: $\gamma_0 = 0$ は平衡状態。

- [6] M.V.Berry "Some Quantum-to-classical Asymptotics", in *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches, Session LII, 1989, Ed. M.J.Giannoni, A.Voros and J.Zinn-Justin, (North-Holland, Amsterdam, 1991), pp.251
- [7] R.Balian, C.Bloch *Ann.Phys.*, **60**, 401 (1970); *ibid.*, **63**, 592 (1971); *ibid.*, **64**, 271 (1971); *ibid.*, **69**, 76 (1972); *ibid.*, **85**, 514 (1974).
- [8] M.C.Gutzwiller *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, (Springer-Verlag, New York, 1990).
- [9] *Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, ed. G.Casati, J.Ford, (Springer, Berlin, 1979); *Chaotic Behaviour in Deterministic Systems*, Les Houches 1981, Session XXXVI, ed. G.Ioos, R.H.G.Helleman, R.Stora, (North-Holland, Amsterdam, 1983); *Chaos and Quantum Physics Les Houches 1989, Session LII*, ed. M.J.Giannoni, A.Voros, J.Zinn-Justin, (North-Holland, Amsterdam, 1991); *Quantum Chaos*, ed. by H.A.Cardaria, R.Ramaswamy, M.C.Gutzwiller and G.Casati (Singapore, World Scientific, 1991); *Quantum Chaos*, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXIX, ed. G.Casati, I.Guarneri, and U.Smilansky, (North-Holland, Amsterdam, 1993); *Quantum Chaos*, ed. G.Casati, B.Chirikov, (Cambridge Press., New York, 1995)
- [10] M.L.Mehta, *Random Matrices*, (Academic, London, 1991); C.E.Porter, *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, (Academic, New York, 1965); T.A.Brody, J.Flores, J.B.French, P.A.Mello, A.Pandey, S.S.M.Wong *Rev.Mod.Phys.*, **53**, 385, (1981).
- [11] F.J.Dyson *J.Math.Phys.*, **3**, 166 (1962); F.J.Dyson *Comm.Math.Phys.*, **19**, 235 (1962); M.L.Mehta *Comm.Math.Phys.*, **20**, 245 (1962);
- [12] I.C.Percival *Adv.Chem.Phys.*, **36**, 1 (1977).
- [13] O.Bohigas, M.J.Giannoni, C.Schmit *Phys.Rev.Lett.*, **52**, 1 (1984).
- [14] O.Bohigas, M.J.Giannoni *Lecture Notes in Physics*, vol.209, p.1 (Springer, Berlin, 1984).
- [15] *Mesoscopic Quantum Physics*, Les Houches 1994, Session LXI, ed. E.Akkermans, G.Montambaux, J.-L.Pichard, J.Zinn-Justin, (North-Holland, Amsterdam, 1995)

- [16] E.B.Efetov *Adv.Phys.*, **32**, 53 (1983); J.J.M.Verbaarschot, H.A.Widenmüller, M.R.Zirnbauer *Phys.Rep.*, **129**, 367 (1985); M.R.Zirnbauer *Nucl.Phys.*, **B265**, 375 (1986)
- [17] W.Parry Lecture Notes in Mathematics, vol. 1342, 617, (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [18] M.C.Gutzwiller *Physica*, **7**, 341 (1983).
- [19] P.Gaspard S.A.Rice H.J.Mikeska K.Nakamura *Phys.Rev.*, **A42**, 4015 (1990); D.Saher F.Haake P.Gaspard *Phys.Rev.*, **A44**, 7841 (1991).
- [20] T.Takami, H.Hasegawa *Phys.Rev.Lett.*, **68**, 419 (1992).
- [21] J.Zakrzewski D.Delande *Phys.Rev.*, **E47**, 1650, 1665 (1993).
- [22] F.von Oppen *Phys.Rev.Lett.*, **73**, 798 (1994).
- [23] Y.V.Fyodorov *Phys.Rev.Lett.*, **73**, 2688 (1994).
- [24] Y.V.Fyodorov H.-J.Sommers *Phys.Rev.*, **E51**, R2719 (1995).
- [25] Y.V.Fyodorov H.-J.Sommers *Z.Phys.*, **B99**, 123 (1995).
- [26] I.V.Yurkevich V.E.Kravtsov Preprint, cond-mat/9609106, 1996.
- [27] V.E.Kravtsov M.R.Zirnbauer *Phys.Rev.*, **B46**, 4332 (1992).
- [28] B.L.Altshuler, B.I.Shklovskii *Sov.Phys.JETP*, **64**, 127 (1986).
- [29] A.V.Andreev, B.Altshuler *Phys.Rev.Lett.*, **75**, 902 (1995).
- [30] O.Agam, B.Altshuler, A.V.Andreev *Phys.Rev.Lett.*, **75**, 4389 (1995).
- [31] A.V.Andreev, O.Agam, B.D.Simons, B.Altshuler preprint, cond-mat/9601001, 1996.
- [32] A.V.Andreev, B.D.Simons, O.Agam, B.Altshuler preprint, cond-mat/9605204, 1996.
- [33] O.Agam S.Fishman *Phys.Rev.Lett.*, **76**, 726 (1996).
- [34] J.H.Hannay A.M.Ozorio de Almeida *J.Phys.*, **A17**, 3429 (1984).
- [35] M.V.Berry *Proc.Roy.Soc.Lond.*, **A400**, 229 (1985).
- [36] M.V.Berry, J.P.Keating *J.Phys.*, **A27**, 6167 (1994).
- [37] N.Argaman, Y.Imry, U.Smilansky *Phys.Rev.*, **B47**, 4440 (1993).
- [38] G.H.Hardy J.E.Littlewood *Acta Math.*, **44**, 1 (1923).
- [39] N.Argaman, E.Doron, J.Keating, A.Kitaev, M.Sieber, U.Smilansky *Phys.Rev.Lett.*, **71**, 4326 (1993).
- [40] M.V.Berry Lecture Notes in Physics, vol. 263, 1 (Springer-Verlag, Berlin, 1986).
- [41] M.V.Berry *Nonlinearity*, **1**, 399 (1988).
- [42] M.V.Berry, J.P.Keating *J.Phys.*, **A23**, 4839 (1990); *Proc.Roy.Soc.Lond.*, **A437**, 151(1992)
- [43] J.P.Keating *Proc.Roy.Soc.Lond.*, **A436**, 99 (1992).

- [44] J.P.Keating “*The semiclassical sum rule and Riemann’s zeta function*”, in *Quantum Chaos*, ed. by H.A.Cardaria, R.Ramaswamy, M.C.Gutzwiller and G.Casati (Singapore, World Scientific), 1992, pp.280.
- [45] J.P.Keating “*The Riemann zeta function and quantum chaology*”, in *Quantum Chaos*, ed. by G.Casati, I.Guarneri, and U.Smilansky, (North-Holland, Amsterdam), 1993, pp.145.
- [46] E.B.Bogomolny J.P.Keating *Phys.Rev.Lett.*, **77**, 1472 (1996).
- [47] E.B.Bogomolny J.P.Keating *Nonlinearity*, **8**, 1115 (1995); *ibid.*, **9**, 911 (1996)
- [48] B.Eckhardt, J.Main, S.Fishman, J.P.Keating *Phys.Rev.*, **E52**, 5893 (1995); B.Eckhardt,J.Main *Phys.Rev.Lett.*, **75**, 2300 (1995).
- [49] J.T.Edwards D.J.Thouless. *J.Phys.*, **C5**, 807 (1972); D.J.Thouless. *Phys.Rep.*, **13**, 93 (1974).
- [50] M.M.Sano *Phys.Rev.* **E54**, 3591 (1996).
- [51] J.P.Keating *private communication*.
- [52] T.Harayama, A.Shudo *J.Phys.*, **A25**, 4595 (1992).
- [53] T.Harayama, A.Shudo 物性研究, “Dispersing Billiards の半古典論”, **61-1**, 222 (1993).
- [54] R.Artuso, E.Aurell, P.Cvitanović, *Nonlinearity*, **3**, 325 (1990); *ibid.*, 361, (1990); P.Cvitanović, B.Eckhardt, *Phys.Rev.Lett.*, **63**, 823 (1989); *J.Phys.*, **A24**, L237 (1991)
- [55] S.Kettemann, D.Klakow, U.Smilansky preprint, “Characterization of Quantum Chaos by the Autocorrelation Function of Spectral Determinants”, chao-dyn/9611001; U.Smilansky preprint, “Quantum Chaos and Random Matrix Theory- Some New Results”, chao-dyn/9611001.
- [56] F.Haake, M.Kús, H.-J.Sommers, H.Schomerus, K.Życzkowski *J.Phys.*, **A29**, 3641, (1996).
- [57] B.Grammaticos, A.Voros *Ann.Phys.*, **123**, 359, (1979); N.L.Balazs B.K.Jennings *Phys.Rep.*, **104**, 347 (1984).
- [58] H.P.Baltes, E.R.Hilf *Spectra of Finite Systems*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1978.
- [59] M.V.Berry, C.J.Howls *Proc.Roy.Soc.Lond.*, **A447**, 527 (1994).
- [60] 長谷川洋, 物理学最前線 28, “量子系の準位統計-量子カオス序論”, (共立出版, 東京, 1991).
- [61] 戸田幹人, 足立聡, 長谷川洋 “量子カオスとζ関数” 日本物理学学会, **44**, 599, (1989)
- [62] 長岡洋介・安藤恒也・高山一, “局在・量子ホール効果・密度波”, 岩波現代の物理学 1 8, (岩波書店, 東京, 1993).
- [63] G.Tanner, P.Scherer, E.B.Bogomolny, B.Eckhardt, D.Wintgen, *Phys.Rev.Lett.*, **67**, 2410 (1991).
- [64] M.Sieber, F.Steiner, *Phys.Rev.Lett.*, **67**, 1941 (1991); C.Matthies, F.Steiner, *Phys.Rev.*, **A44**, R7877 (1991); R.Aurich, C.Matthies, M.Sieber, F.Steiner, *Phys.Rev.Lett.*, **68**, 1629 (1992).

- [65] C.Beck, F.Schlögl *Thermodynamics of chaotic systems: an introduction*, (Cambridge Univ. Press., London, 1993)
- [66] R.Bowen *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics 470, (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
- [67] D.Ruelle *Thermodynamics Formalism*, Encyclopedia of mathematics and its applications 5, (Addison-Wesley Pub., New York, 1978).
- [68] P.Walters *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics 79, (Springer-Verlag, New York, 1982).
- [69] Ya.G.Sinai, Introduction to ergodic theory, (Princeton Univ. Press., 1976).
- [70] P.Gaspard, S.A.Rice *J.Chem.Phys.*, **90**, 2225, (1989); *ibid.*, **90**, 2242, (1989); *ibid.*, **90** 2255, (1989).
- [71] E.Akkermans G.Montambaux. *Phys.Rev.Lett.*, 68(1992)642; E.Akkermans. *Physica*, A200(1993)530.
- [72] A.I.Shnirelman, *Usp.Mat.Nauk.*, **29**/6, 181 (1974).
- [73] S.Zeldovitch *Duke J.Math.*, **55**, 919 (1987).
- [74] Y.Colin de Verdiere *Commun.Math.Phys.*, **102**, 497 (1985); Y.Colin de Verdiere *Chaos and Quantum Physics, Les Houches Lecture Notes, Session LII*, M.J.Giannoni, A.Voros, J.Zin-Justin (eds), (North-Holland, Amsterdam, 1991), p.p.305.
- [75] B.Helffer, A.Martinez D.Robert *Commun.Math.Phys.*, **109**, 313 (1987).
- [76] M.Combescure, D.Roberts *Ann.Inst.Henri Poincaré*, **61**, 443 (1994).
- [77] M.V.Berry *Phil.Trans.R.Soc.*, **A287**, 237 (1977).
- [78] M.V.Berry *J.Phys.*, **A10**, 2083 (1977).
- [79] A.Voros *Ann.Inst.Henri Poincaré*, **A24**, 31 (1976); *ibid.*, **A26**, 343 (1977)
- [80] E.J.Heller *Phys.Rev.Lett.*, **53**, 1515 (1984); *Chaos and Quantum Physics, Les Houches Lecture Notes, Session LII*, M.J.Giannoni, A.Voros, J.Zin-Justin (eds), (North-Holland, Amsterdam, 1991), p.p.547.
- [81] E.B.Bogomolny *Physica*, **31D**, 169 (1988).
- [82] M.V.Berry *Proc.R.Soc.*, **A423**, 219 (1989).
- [83] O.Agam, S.Fishman *J.Phys.*, **A26**, 2113 (1993); *Phys.Rev.Lett.*, **73**, 806 (1994).
- [84] N.Argaman. *Phys.Rev.Lett.*, **75**, 2750 (1995); Semiclassical analysis of the quantum interference corrections to the conductance of mesoscopic systems, 1995. *Phys.Rev.B* in press.
- [85] S.Tasaki 物性研究, “複素固有値問題に基づく非平衡統計力学理論- 複素スペクトル理論-”, 60-1, 1 (1993); *ibid.*, “講義ノート「エルゴード的力学系における相関関数のふるまい-非平衡統計力学の視点から-」”, 64-3, 199 (1995).