

ノズル内の等エントロピー流を記述する方程式の 大きな初期値に対する時間大域解の存在

岐阜大学 柘植直樹*

Naoki Tsuge

Gifu University

故小田中教授に捧ぐ

概要

ノズル内の等エントロピー流を考える。この流れを記述するのは圧縮性オイラー方程式である。この講究録では、特に、この方程式の初期値問題を考える。そして、大きな初期値に対して、時間大域解の存在を示す。時間大域解の存在を示すとき、アприオリ評価である解の有界評価が問題となる。その問題を解決するために、古典的な不変領域の手法を拡張した、一般化された不変領域を導入する。また、この不変領域は空間変数に依存しているため、従来の近似解に適用することはできない。そこで、改良 Godunov の差分法という新しい近似解の構成法を導入する。これらの手法は、他の微分方程式や数値計算といった非線形問題へも応用が期待される。

キーワード：圧縮性オイラー方程式，ノズル流，時間大域解，一般化された不変領域，改良 Godunov の差分法，弱い緩和項，衝撃波，ランキン-ユゴニオ条件

1 導入と主定理

この論文ではノズル内の等エントロピー流を考える。この現象は以下の圧縮性オイラー方程式によって記述される。

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = a(x)m, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right)_x = a(x) \frac{m^2}{\rho}, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1.1)$$

ρ, m, p はそれぞれ気体の密度，運動量，圧力を表す。 $\rho > 0$ のとき， $v = m/\rho$ は気体の速度を表す。バロトロピックの場合は，圧力は密度の関数として， $p(\rho) = \rho^\gamma/\gamma$ となる。こ

*この研究は基盤研究 (C)17K05315 の援助を受けている。

ここで, $\gamma \in (1, 5/3]$ は比熱比である. $A \in C^2(\mathbf{R})$ は既知関数であり, x におけるノズルの断面積を表す. このとき, $a(x)$ を

$$a(x) = -A'(x)/A(x) \quad A(x) = e^{-\int^x a(y)dy}$$

とおく. 数学的には, この方程式は準線形双曲型方程式に分類される. また, この方程式の定常問題は, 物理や工学では基本的であり, 多くの興味深い現象が知られている ([LR],[T4], [奥富阪], [坂池], [松] 参照).

この方程式に, 以下の初期値

$$(\rho, m)|_{t=0} = (\rho_0(x), m_0(x)) \quad (1.2)$$

を与えて, 初期値問題を考える.

また, ベクトル $u = {}^t(\rho, m)$, $f(u) = {}^t\left(m, \frac{m^2}{\rho} + p(\rho)\right)$ と $g(x, u) = {}^t\left(a(x)m, a(x)\frac{m^2}{\rho}\right)$ を用いて, 上記の問題 (1.1)–(1.2) を, 次のように保存則の形で記述することもある.

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = g(x, u), & x \in \mathbf{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x). \end{cases} \quad (1.3)$$

ノズル流に関する既存の結果を紹介する. この方面に関する研究の先駆的な結果として, Liu [L] の結果がある. [L] では, 音速から離れたところで, Glimm の差分法を用いて, 十分小さな有界変動をもつ時間大域解を構成している. 一方, 先に挙げた参考文献からも分かるように, 応用上は音速付近の解が重要になる. また, ロケットの排出ガスや太陽風を記述する場合, 大きな振幅をもつ解を考える必要がある. しかしながら, これらを満たす時間大域解の存在は 40 年来未解決であった. この講義録では, 音速を含み, 大きな初期値に対する時間大域解の存在を示すことが目的である.

まず, 以下のリーマン不変量 z, w を導入する.

定義 1.1.

$$w = \frac{m}{\rho} + \frac{\rho^\theta}{\theta} = v + \frac{\rho^\theta}{\theta}, \quad z = \frac{m}{\rho} - \frac{\rho^\theta}{\theta} = v - \frac{\rho^\theta}{\theta} \quad \left(\theta = \frac{\gamma-1}{2}\right).$$

ここで, リーマン不変量に関する性質をまとめておく.

注意 1.1.

$v \geq 0$ のときは, $|w| \geq |z|$ かつ $w \geq 0$ である. 一方, $v \leq 0$ のときは, $|w| \leq |z|$ かつ $z \leq 0$ となる. また, リーマン不変量と未知関数との関係は以下ようになる.

$$v = \frac{w+z}{2}, \quad \rho = \left(\frac{\theta(w-z)}{2}\right)^{1/\theta}, \quad m = \rho v.$$

上記の関係から, z が下に有界かつ w が上に有界であることと, ρ と $|v|$ が有界であることは同値である.

さらに、主定理を述べるために以下を仮定する。
ある非負の関数 $b \in C^1(\mathbf{R})$ が存在して以下を満たす。

$$|a(x)| < \mu b(x), \quad \max \left\{ \int_0^\infty b(x) dx, \int_{-\infty}^0 b(x) dx \right\} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{\sigma}. \quad (1.4)$$

ここで、 $\mu = \frac{(1-\theta)^2}{\theta(1+\theta-2\sqrt{\theta})}$, $\sigma = \frac{1-\theta}{(1-\sqrt{\theta})(2\sqrt{\theta}+1+\sqrt{\theta}-1)}$ である。 $0 < \sigma < 1$ であることに注意する。また、 μ と σ は、後述される図 2 の関数 $f(k)$ によって特徴づけられる。

このとき、主定理は以下である。

定理 1.1 ([T8]).

(1.4) の b と任意に固定された非負の定数 M に対して、初期値は $u_0 = (\rho_0, m_0) \in L^\infty(\mathbf{R})$

$$0 \leq \rho_0(x), \quad -Me^{-\int_0^x b(y) dy} \leq z(u_0(x)), \quad w(u_0(x)) \leq Me^{\int_0^x b(y) dy} \quad (1.5)$$

を満たすとする。この条件は、物理変数で表すと

$$0 \leq \rho_0(x), \quad -Me^{-\int_0^x b(y) dy} \leq v_0(x) - \frac{\{\rho_0(x)\}^\theta}{\theta}, \quad v_0(x) + \frac{\{\rho_0(x)\}^\theta}{\theta} \leq Me^{\int_0^x b(y) dy}$$

となる。

このとき、初期値問題 (1.3) は時間大域解を持ち、初期値と同じ不等式

$$0 \leq \rho(x, t), \quad -Me^{-\int_0^x b(y) dy} \leq z(u(x, t)), \quad w(u(x, t)) \leq Me^{\int_0^x b(y) dy} \quad (1.6)$$

を満たす。即ち、(1.5) の表す領域は、初期値問題 (1.3) の不変領域になっている。

注意 1.2. (1.5) は、任意の L^∞ 関数を初期値として与えられることを意味する。

2 困難な点

証明を述べる前に、この問題の困難な点を述べる。もし、(1.1) が滑らかな解を持つならば、上記のリーマン不変量を用いて、(1.1) は次のように対角化できる。

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x &= -a(x)\rho^\theta v, \\ w_t + \lambda_2 w_x &= a(x)\rho^\theta v. \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 λ_1 と λ_2 は特性速度であり、以下のように定義される。

$$\lambda_1 = v - \rho^\theta, \quad \lambda_2 = v + \rho^\theta. \quad (2.2)$$

(1.1) は保存則という方程式の種類に分類されている。その特徴として、滑らかな初期値を与えても、一般に不連続解（衝撃波）をもつ。この性質は、(2.1) の特性速度が未知関数に依存することが原因で起こる。また、特性速度が未知関数に依存するため、 L^∞ 以外

の関数空間では、双曲型方程式において基本的な有限伝播性が成り立たない。そのため、考える関数空間も L^∞ に限定される。この関数空間に限定されるのは、近似解のコンパクト性が他の関数空間では現在得られていないということも原因の一つである。そのため、アプリアリ評価として解の有界評価を得なくてはならない。圧縮性ナビエストークス方程式のように、エネルギー法とソボレフの不等式から有界評価を得る方法も、解の滑らかさがないため、この方程式には適用できない。そのため、有界評価を得る方法として、古典的な最大値原理を基にした不変領域という方法が取られてきた。実際、右辺の項がない場合 $a(x) \equiv 0$ (これは1次元の場合に相当する。) は、古典的な [CCS] の方法が適用できる。 $a(x) \neq 0$ の場合にも、この方法を適用することは可能である。例えば、一般的な低階の項をもつ以下の方程式を考える。

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x &= g_1(x, z, w), \\ w_t + \lambda_2 w_x &= g_2(x, z, w). \end{aligned} \quad (2.3)$$

このとき、

$$|g_1(x, z, w)| \leq C(|z| + |w|), \quad |g_2(x, z, w)| \leq C(|z| + |w|) \quad (2.4)$$

が成り立つならば、先程の不変領域と部分段階法 ([DC2]) を用いると、

$$|z(x, t)| \leq Be^{kt}, \quad |w(x, t)| \leq Be^{kt} \quad (2.5)$$

という時間に関して指数増大する評価を得ることができる。指数関数の評価が導出される理由は、(2.4) より、低階の項がリーマン不変量に関して1次の項で抑えられることと、常微分方程式 $u_t = Cu$ が $u = Be^{kt}$ を解にもつからである。この評価は時間に依存しているが、時間大域解の評価を得るためには、このような評価で十分である。ここまでの、およそ30年前までの結果である。

しかしながら、(2.1) に対しては、このような評価すら得られない。実際、(2.1) の低階の項は

$$\rho^\theta v = \frac{w+z}{2} \frac{\theta(w-z)}{2} = \frac{\theta(w^2 - z^2)}{4} \quad (2.6)$$

と変形できる。リーマン不変量に関して2次になってしまうため、(2.4) を満たさない。先程の見方をすれば、常微分方程式 $u_t = Cu^2$ を考えることになる。この方程式の解は、一般には有限時間で爆発する。そのため、従来の古典的な方法で有界評価を得る事は、ほぼ絶望的である。これが現在に至るまで、この方程式の時間大域解が得られなかった理由である。

一方、上記の方法は、時間に関しての解の評価しか行っていない。これを打開するために、解の空間方向の評価に活路を見い出す。具体的には、移流項から緩和項のような働きをする項を導き、その項を使って低階の項を処理する。

3 証明の概略

定理の証明は少々複雑である。証明の本質的な部分を理解するために、この節では形式的な議論をする、即ち、解は滑らかであるとし、密度は非負であるとする。

さて、前述したように、この問題の一番難しい点は近似解 $u^\Delta(x, t)$ の有界評価である。この評価を難しくしている原因は、(1.1) の低階の項である。実際、低階の項のない (1.1) の斉次方程式に対しては、Chueh, Conley, Smoller ([CCS]) の方法によって、有界評価を得る事ができる。しかしながら、我々の問題に、この方法を用いることはできない。

この問題を打開するために、一般化された不変領域を導入する。以下、物理的意味のある $\rho \geq 0$ (i.e., $w \geq z$) を考える。注意 1.1 を思い出せば、解の有界評価を得るためには、 $z(u)$ の下からの評価と $w(u)$ の上からの評価を得ればよい。そのために、対角化された方程式

$$\begin{aligned} z_t + \lambda_1 z_x &= -a(x)\rho^\theta v, \\ w_t + \lambda_2 w_x &= a(x)\rho^\theta v, \end{aligned}$$

に最大値原理を適用する。所望の評価を得るためには、第1式の右辺 > 0 と第2式の右辺 < 0 を示せばよい。しかしながら、最大値原理は本来単独の方程式に対する手法であるから、このような2本の方程式からなる連立方程式には不向きである。実際、右辺は z にも w にも依存しており、 $a(x)$ の符号も一定ではない。そのため、このような評価を得ることは大変難しいように思われる。

この状況を打開するために、未知関数を別のものに変更して、その未知関数に対して最大値原理を適用することを試みる。そのため、次のような変換を行う。

$$z = \tilde{z} e^{-\int_0^x b(y) dy}, \quad w = \tilde{w} e^{\int_0^x b(y) dy}. \quad (3.1)$$

このとき、(2.1) より、以下が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{z}_t + \lambda_1 \tilde{z}_x &= e^{\int_0^x b(y) dy} \{b(x)\lambda_1 z - a(x)\rho^\theta v\}, \\ \tilde{w}_t + \lambda_2 \tilde{w}_x &= -e^{-\int_0^x b(y) dy} \{b(x)\lambda_2 w - a(x)\rho^\theta v\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

これからの議論において、 $b(x)\lambda_1 z$ と $b(x)\lambda_2 w$ が緩和項（例えば、摩擦項のようなものを想定して頂きたい。）のような働きをする。即ち、低階の項の効果を打ち消す働きをする。この項を、この論文では、通常の緩和項と区別して、弱い緩和項と呼ぶことにする。(3.1) のような変換をおこなった理由は、この弱い緩和項を導出するためである。低階の項は、リーマン不変量に関して2次であることをみたが ((2.6))、この弱い緩和項もリーマン不変量に関して2次である。そのため、ちょうど低階の項の効果を打ち消すことができる。したがって、これから述べる方法では、2次の低階の項までが限界である。それより低階の項の次数が高くなった場合は、初期値の大きさを適当に小さくしなければならない。

次に主定理で述べられた不変領域について考える。この不変領域を Δ_x とかく。

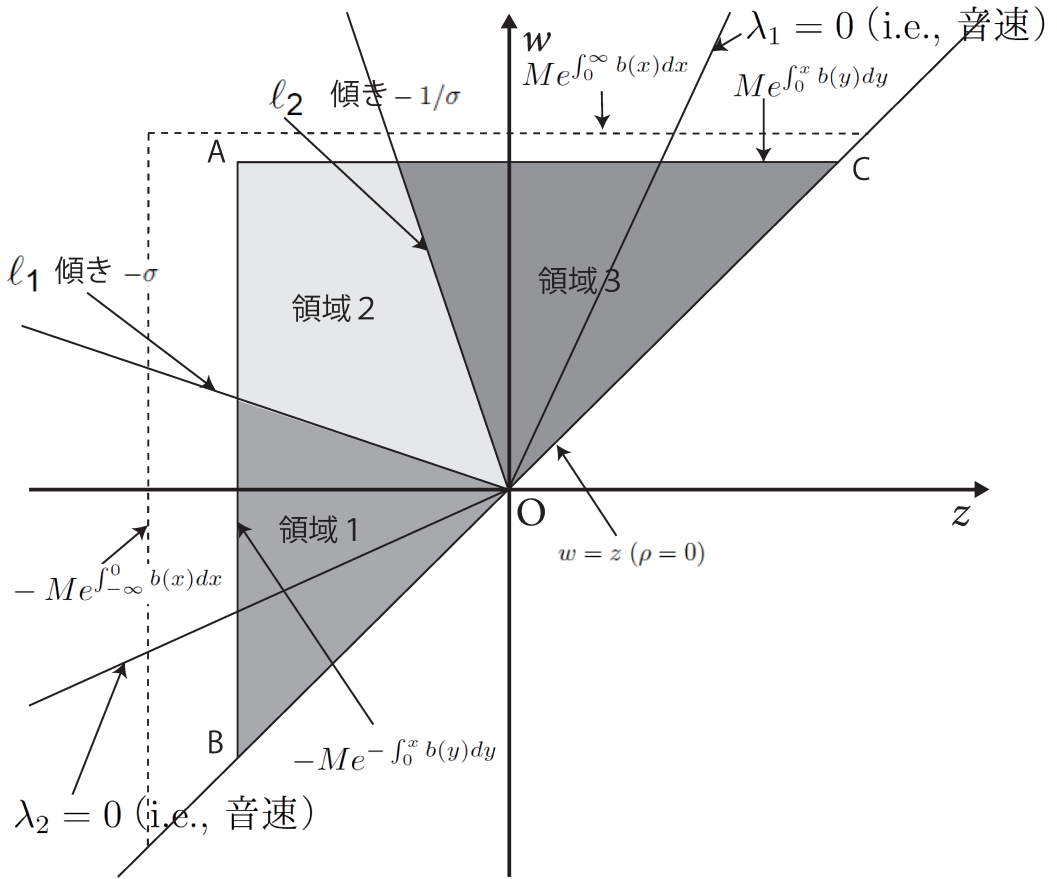


図 1: (z, w) における不変領域 Δ_x

まず、以下が成り立つ。

補題 3.1. (1.4) より、図 1 の三角形の頂点 A は、直線 l_1 と l_2 の間にある。

ここで、直線 l_1 と l_2 は、原点を通る傾きがそれぞれ $-\sigma$ と $-1/\sigma$ の直線であり、 $\sigma = \frac{1-\theta}{(1-\sqrt{\theta})(2\sqrt{\theta+1}+\sqrt{\theta}-1)}$ である。実際、OA の傾きは $-e^2 \int_0^x b(y)dy$ であるから、(1.4) より、OA の傾きは $-1/\sigma$ と $-\sigma$ の間の値をとる。

さて、これから (3.2) に最大値原理を適用する。(1.5) より、 $\tilde{z}_0 \geq -M$ 、 $\tilde{w}_0 \leq M$ であることに注意する。そのため、AB 上で (3.2)₁ の右辺 > 0 と AC 上で (3.2)₂ の右辺 < 0 を示せば、最大値原理より、 $\tilde{z} \geq -M$ 、 $\tilde{w} \leq M$ が従う。実際、初期値が不変領域 Δ_x の内部にあったとする。解が、この不変領域から外に出るとすれば、AB か AC を通過しなければならない。仮に、 $(\bar{x}, \bar{t})$ において、AB を最初に通過したとする。そのとき、この点において、 $\tilde{z}_t \leq 0$ 、 $\tilde{z}_x = 0$ が成り立つ。しかし、これは、AB 上で (3.2)₁ の右辺 > 0 であ

ることに矛盾する。したがって、解はABを通過することはできない。同様に、ACも通過できないから、解は三角形ABCから外に出ることはできない。詳しい議論は、[S, Chapter 14, §B]を参照されたい。また、不変領域は最大値原理が基になっている。最大値原理に関しては、[K, Chapter 8]が参考になる。

それでは、領域1と2(図1参照)における $(3.2)_1$ の低階の項を評価しよう。まず、次の事実に注意する。

補題 3.2. $f(k) = \frac{2\{(1-\theta)k+1+\theta\}}{\theta|k^2-1|}$ は、閉区間 $[-1/\sigma, 1]$ 上で $f(k) \geq \mu$ を満たす。ここで、 μ と σ は(1.4)で定義された定数である。

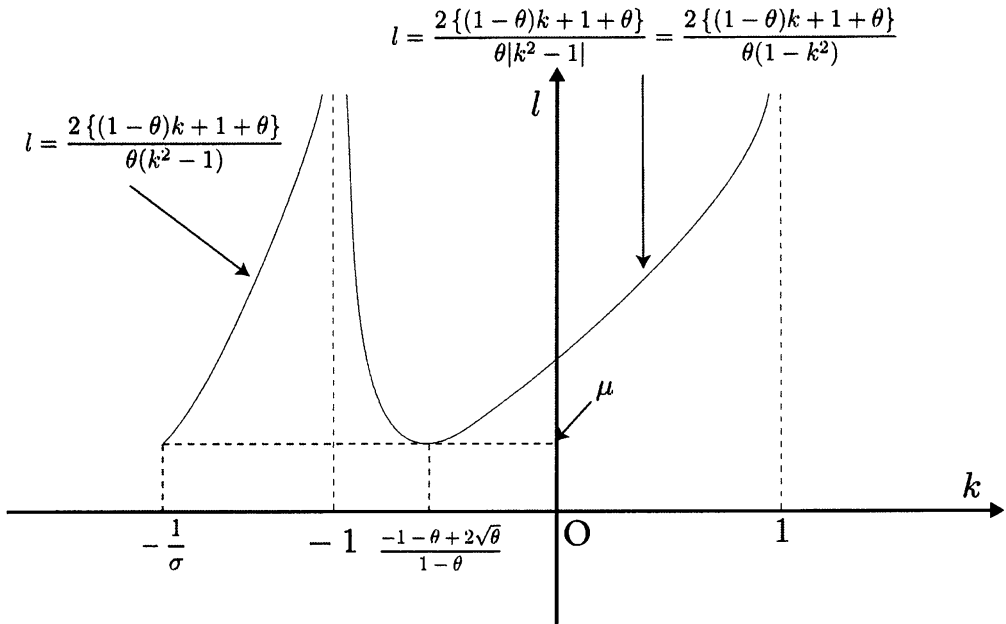


図 2: $l = f(k)$ のグラフ

さらに、これらの領域においては、 z と w は次を満たす。

$$-Me^{-\int_0^x b(y)dy} \leq z, w \leq Me^{\int_0^x b(y)dy}, -1/\sigma \leq w/z \leq 1, z \leq 0. \quad (3.3)$$

ここで、 $k = w/z$ とおくと、注意 1.1 より、

$$\lambda_1 = \frac{(1-\theta)k+1+\theta}{2}z, v = \frac{k+1}{2}z, \rho^\theta = \frac{\theta(k-1)}{2}z, -1/\sigma \leq k \leq 1 \quad (3.4)$$

を得る。

このとき、直線 $k = w/z$ に沿って、 $(2.1)_1$ の低階の項を評価しよう。(1.4) と補題 3.2 から、領域 1 と 2 において、以下を得る。

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}_t + \lambda_1 \tilde{z}_x &= e^{\int_0^x b(y) dy} \{ b(x) \lambda_1 z - a(x) \rho^\theta v \} \\
 &> e^{\int_0^x b(y) dy} b(x) z^2 \left\{ \frac{(1-\theta)k + 1 + \theta}{2} - \mu \frac{\theta|1-k^2|}{4} \right\} \\
 &\geq e^{\int_0^x b(y) dy} b(x) z^2 \frac{\theta|1-k^2|}{4} \{ f(k) - \mu \} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

本来、低階の項は 2 変数であるが、 $k = w/z$ に沿って評価することで、実質 k だけの 1 変数になったことに注意する。

そのため、 $(3.2)_1$ の低階の項は、領域 1 と 2 において、正だということがわかる。同様にして、 $(3.2)_2$ の低階の項は、領域 2 と 3 において、負だということもわかる。以上から、最大値原理を適用すると、 $\tilde{z} \geq -M$ が $\tilde{w} \leq M$ が成り立つ。これは、

$$\Delta_x = \left\{ (z, w); \rho \geq 0, -Me^{-\int_0^x b(y) dy} \leq z, w \leq Me^{\int_0^x b(y) dy} \right\}$$

が、初期値問題 (1.3) の不変領域であることを意味する。ここで、 Δ_x は x に依存することに注意する。この点が、古典的な Chueh, Conley, Smoller の不変領域と異なる点である。古典的な不変領域は 2 次元の領域であるが、 Δ_x は x にも依存しているので 3 次元の領域である。この意味で、一般化された不変領域は、古典的な不変領域の次元を一つ増やしたことになる。これが解の有界評価を得る上での重要なアイデアである。

ここで、今の議論に関して 4 つ注意を述べる。まず、 $[L]$ を思い出すと、音速が問題であった。ここで、音速になるということは、特性速度が 0 になるということに他ならない。音速は、我々の方法でも都合が悪い。実際、(3.5) で重要な働きをする弱い緩和項が 0 になってしまう。しかしながら、例えば (3.5) のように、 z の下からの評価をするときは、領域 1 と 2 のみを考えればよかった。一方、この場合、弱い緩和項が 0 になるのは $\lambda_1 = 0$ のときで、それは領域 3 に含まれる (図 1 参照)。そのため、問題となる音速の場合を回避することができるのである。これが音速を含んで解の存在を示すことができる理由である。これが可能なのは不変領域を考えているからであって、 $[L]$ のように全変動を考えた場合は、かなり困難なように思われる。次に、補題 3.1 の図 1 の頂点 A が ℓ_1 と ℓ_2 の間にあるということは、上記の議論において不可欠である。実際、これが成り立たないと、上記の議論は破綻する。この事実が成り立つために、(1.4) において、 a の L^1 ノルムが十分小さいという条件が必要であったことに注意する。さらに、古典的な評価 (2.5) では、有界評価は時間に依存するが、(1.6) では依存しない。このことから、不変領域に含まれる定常解は安定であることがわかる。この不変領域には、応用上重要な亜音速から超音速へ変わる定常解も含んでいる。最後に、(3.2) の弱い緩和項が、リーマン不変量に関して 2 次であることが、(3.5) の最初の不等式から分かる。(2.3) も 2 次だから、ちょうど低階の項の影響を打ち消すことができるのである。例えば、半線形であれば、弱い緩和項は 1

次であるから、このような評価はできない。準線形であることは、この方程式の解析を困難にしているが、(3.5) をする上では有利に働いている。

上記の議論は形式的なものではあるが、本質的である。[T8] では、(3.5) の議論を暗に用いている。近似解を構成するとき、従来は Godunov や Lax-Friedrichs の差分法 ([DC1],[DC2] 参照) が用いられてきた。しかしながら、この議論を正当化するためには、これらの近似解は使えない。そのため、改良 Godunov の差分法を導入する。この近似解は上述した不変領域に対応して構成される。(3.1) を考慮して、部分段階法を用いて、セル $j\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x$, $n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t$ において、近似解を

$$\begin{aligned} z^\Delta(x, t) &= \bar{z}^\Delta(x) + g_1^*(x, \bar{u}^\Delta(x))(t - n\Delta t), \\ w^\Delta(x, t) &= \bar{w}^\Delta(x) + g_2^*(x, \bar{u}^\Delta(x))(t - n\Delta t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

とおく。ここで、 Δx は空間差分、 Δt は時間差分、 $j \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $\bar{z}^\Delta(x) = \bar{z}e^{-\int_0^x b(y)dy}$, $\bar{w}^\Delta(x) = \bar{w}e^{\int_0^x b(y)dy}$, $\bar{z}$ と $\bar{w}$ は定数、

$$\begin{aligned} g_1^*(x, \bar{u}^\Delta(x)) &= -a(x)\bar{v}^\Delta(x)(\bar{\rho}^\Delta(x))^\theta + b(x)\lambda_1(\bar{u}^\Delta(x))\bar{z}^\Delta(x), \\ g_2^*(x, \bar{u}^\Delta(x)) &= a(x)\bar{v}^\Delta(x)(\bar{\rho}^\Delta(x))^\theta - b(x)\lambda_2(\bar{u}^\Delta(x))\bar{w}^\Delta(x) \end{aligned}$$

である。(3.6) は (2.1) の近似解である。このことは、(2.1) から、

$$\begin{aligned} z_t - g_1^*(x, u) &= -\lambda_1(z_x + b(x)z), \\ w_t - g_2^*(x, u) &= -\lambda_2(w_x - b(x)w) \end{aligned} \quad (3.7)$$

となることと、 $\bar{z}^\Delta(x), \bar{w}^\Delta(x)$ が (3.7) の右辺の解であることからわかる。この近似解の有界評価は (3.5) の類似である。実際、 $g_1^*(x, \bar{u}^\Delta(x)) \geq 0$ と $g_2^*(x, \bar{u}^\Delta(x)) \leq 0$ がそれぞれ領域 1-2 と領域 2-3 において成り立つことを示す。

近似解は、各セルにおいて、区分的に (3.6) の形をしている。構成する際には、2つの困難な点、(P1) 不連続直線と (P2) 真空付近、がある。(P1): 我々の近似解は従来の区分的に定数の近似解と異なり、区分的に x の関数である。そのため、保存則の不連続解が、不連続直線全体で満たすべき、いわゆるランキン-ユゴニオ条件を満たさない。そこで、ランキン-ユゴニオ条件を、各セル内の不連続直線の中点だけで満たすように近似解を構成する。このとき、近似解と真の解との間に残差が生じるが、近似解が収束するためには十分に小さなものになる。(P2): 真空では、方程式の型が狭義双曲型ではなくなる。そのため、構成の仕方を変えなくてはならない。一方、この場合、低階の項は十分小さくなる。そのため、(1.1) の低階の項がない斉次方程式の解、リーマン解を近似解として採用する。結果として、真空付近では斉次方程式の近似解と同じくなる。

最後に、上記の手法の他の方程式や数値計算への応用について述べる。まず、この近似解は、この論文で扱った不変領域だけに対応するものではないことを注意しておく。(3.1) の関数を変えることで、 x や t に依存する様々な不変領域にも対応することができる。例えば、外力項のついた場合 ([T6])、球対称流 ([T1])、低階の項のついた単独方程式 ([T5] と [T7]) にも適用できる。また、ここで述べた一般化された不変領域のアイデアは、

保存則特有の性質を用いているわけではない。したがって、移流項のついた反応拡散系や、非線形波動にも適用できると思われる。さらに、ここで得られた有界評価は、数値計算にも有用である。例えば、数値計算の安定条件に Courant-Friedrichs-Lewy 条件がある。

$$\sup_u \max_{i=1,2} |\lambda_i(u)| < \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

ここで、 λ_1 と λ_2 は以下で定義される特性速度

$$\lambda_1 = v - \rho^\theta, \quad \lambda_2 = v + \rho^\theta$$

であり、 Δx と Δt はそれぞれ空間差分と時間差分である。 z と w が有界であることと、 λ_1 と λ_2 が有界であることは同値であるから、(1.6) は CFL 条件を満たすための十分条件を与える。さらに、ここで使われている改良 Godunov の差分法も数値計算に応用できる可能性がある。

4 今後の研究および未解決問題

最後に、今後扱おうとしている問題をいくつか述べて、本稿を閉じたいと思う。

一つ目は、有限領域や周期境界条件に対する不変領域についてである。上記の方法にも欠点はある。全空間や半空間に適用することはできるが、有限区間では不変領域を構成することはできない。同様に、周期境界条件にも適用できない。この原因は次のような上述した一般化された不変領域の性質による。今まで得られた全ての不変領域 ([T1]–[T8]) の上界と下界は、ともに単調増加関数になっている。例えば、定理 1.1 の上界、下界はそれぞれ $Me^{\int_0^x b(y)dy}$, $-Me^{-\int_0^x b(y)dy}$ であり、ともに単調増加関数である。このことは、我々の不変領域を構成するために必要であった。実際、上界および下界の微分が正であることを用いて、低階の項を処理している。そのため、例えば、周期境界条件に対して、空間周期的な不変領域を構成するためには、さらなるアイデアが必要である。例えば、オイラー方程式に空間および時間に関して周期的な外力を与えて、時間周期解が存在するかという問題は基本的な問題であるが、残念ながら今だ未解決である。

二つ目は、微分方程式とその不変領域の幾何学的性質についてである。今回の不変領域は三角形であったが、他の方程式の不変領域として、円、四角、楕円等の形をしたものも存在する。また、一般化された不変領域は x や t に依存する。これらを考慮して、微分方程式が、どのような条件を満たすときに、対応する初期値問題・境界値問題の不変領域がどのような形状になるのかを調べたい。

三つ目は、3 本以上の連立微分方程式に対する不変領域についてである。今回、2 本の連立微分方程式を扱った。その際、不変領域は 2 次元であり、 $k = w/z$ という直線に沿って、低階の項を評価をした。例えば、3 本の連立微分方程式では、不変領域は 3 次元であり、平面（場合によっては曲面）に沿って評価をするはずである。このような問題に対しても、今回のアイデアが適用できるのか否かは興味深いと考えている。

参考文献

- [CCS] Chueh, K. N., Conley, C. C. and Smoller, J. A.: Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations. *Indiana Univ. Math. J.* **26**, 373–392 (1977)
- [DC1] Ding, X., Chen, G.-Q., Luo, P.: Convergence of the Lax–Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(II). *Acta Mathematica Scientia* **5**, 415–432, 433–472 (1985)
- [DC2] Ding, X., Chen, G.-Q., Luo, P.: Convergence of the fractional step Lax–Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics. *Commun. Math. Phys.* **121**, 63–84 (1989)
- [K] Krylov, N. V.: *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Holder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Amer Mathematical Society (1996).
- [L] Liu, T.-P.: Quasilinear hyperbolic systems. *Commun. Math. Phys.* **68**, 141–172 (1979)
- [LR] Liepmann, H.W. and Roshko, A.: *Elements of gas dynamics*. Galcit aeronautical series. Wiley/Chapman & Hall, New York/London, 1957
- [S] Smoller, J.: *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York (1983)
- [T1] Tsuge, N.: Global L^∞ solutions of the compressible Euler equations with spherical symmetry. *J. Math. Kyoto Univ.* **46**, 457–524 (2006)
- [T2] Tsuge, N.: Existence of global solutions for unsteady isentropic gas flow in a Laval nozzle. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **205**, 151–193 (2012)
- [T3] Tsuge, N.: Isentropic gas flow for the compressible Euler equation in a nozzle. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **209**, 365–400 (2013)
- [T4] Tsuge, N.: Isentropic Gas Flow in a Laval Nozzle —Physical Phenomena of Steady Flow and Time Global Existence of Solutions—, 数理解析研究所講究録第 1830 巻, 2013 年, 171–181
- [T5] Tsuge, N.: Existence of a global solution to a scalar conservation law with a source term for large data. *J. Math. Anal. Appl.* **432**, 862–867 (2015)
- [T6] Tsuge, N.: Existence and Stability of Solutions to the Compressible Euler Equations with an Outer Force. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **27**, 203–220 (2016)

- [T7] Tsuge, N.: Existence of a Global Solution for a Scalar Conservation Law with a Source Term. *Acta Appl. Math.* **147**, 177–186 (2016)
- [T8] Tsuge, N.: Global entropy solutions to the compressible Euler equations in the isentropic nozzle flow for large data: Application of the generalized invariant regions and the modified Godunov scheme. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **37**, 217–238 (2017)
- [奥富阪] 奥住聡, 富永真太郎, 阪上雅昭: 遷音速流でつくる「音のブラックホール」, *ながれ* **28** 391–398 (2009)
- [坂池] 坂下志郎, 池内了: 宇宙流体力学, 培風館 (1996)
- [松] 松尾一泰: 圧縮性流体力学, 理工学社 (1994)