

連立多項式の近似根の計算法について

山口大学教育学部 北本 卓也(Takuya KITAMOTO) *

1 序論

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ を変数、 α をパラメータとする多項式系 $f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, n$) が与えられたとする. このとき、 $f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_n(\mathbf{x}) = 0$ の根、 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ は α の代数関数となるが、関数 $\eta_i(\alpha)$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開を考える. $f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, n$) に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\mathbf{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}$ とするとき、次の Jacobian J

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

が正則である正則点の級数展開は、整数べきでの展開となり、第 2 章で述べるように多変数のニュートン法を用いて計算できる.

Jacobian J が正則でない点、つまり特異点での展開は分数べきの級数 (Puiseux 級数) となることが知られている. 第 3 章では、このような特異点での級数展開の計算法を述べる.

2 正則点での展開

$f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, n$) に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\mathbf{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}$ とするとき、次の Jacobian J

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2)$$

*kitamoto@po.cc.yamaguchi-u.ac.jp

が正則であるとする. このとき, $f_1(\mathbf{x}) = \cdots = f_n(\mathbf{x}) = 0$ の根, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ は α の代数関数となるが, 関数 $\eta_i(\alpha)$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開は, 次のアルゴリズムで計算できることが知られている.

アルゴリズム 1

多変数多項式の正則点での近似根の計算法

入力 : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ を変数,

α をパラメータとする多項式 $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T$

正則点 $\mathbf{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$,

この正則点をとる時のパラメータ α の値 α_0

出力 : 連立多項式の k 次の近似根 $\eta_i^{(k)}$ ($i = 1, \dots, n$);

条件 : Jacobian J が展開点において正則である.

Step 1 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の逆行列 P を計算する. $m \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\eta}^{(0)} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$ とおく.

Step 2 次式より $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を計算する. ただし, $[F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})]_{m+1}$ は $F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})$ の α^{m+1} の係数からなる定数ベクトルである.

$$\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} \leftarrow \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \alpha^{m+1} P [F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})]_{m+1}$$

Step 3 $m = k$ ならば $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ を返す. そうでなければ, $m \leftarrow m + 1$ において Step 2 へ行く.

3 特異点での展開

3.1 定義

F を要素が関数 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) である n 次元ベクトル $\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) & \cdots & f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}^T$ とする. 作用素 $\Phi(z)$, ($z = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{C}^n$) を

$$\Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial x_n} \quad (3)$$

のように定義する. 容易に確かめられるように作用素 $\Phi(z)$ は次の性質を満たす.

(P1) $\Phi(\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2) = \alpha_1 \Phi(\mathbf{u}_1) + \alpha_2 \Phi(\mathbf{u}_2)$ (ただし $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{C}^n$)

(P2) $\Phi(\mathbf{u}_1)\Phi(\mathbf{u}_2) = \Phi(\mathbf{u}_2)\Phi(\mathbf{u}_1)$ (ただし $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{C}^n$)

$$(P3) \quad \Phi(\alpha \mathbf{u})^k = \alpha^k \Phi(\mathbf{u})^k \quad (\text{ただし } \alpha \in \mathbf{C}, \mathbf{u} \in \mathbf{C}^n)$$

$$(P4) \quad \Phi(\mathbf{u}_1)F(\mathbf{u}_2) = J(\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1 \quad (\text{ただし, } \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbf{C}^n \text{ で } J(\mathbf{u}) \text{ は } (i, j) \text{ 要素が } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{u}) \text{ で与えられる行列})$$

標準的な微積分のテキストあるように $F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ は次のようにテイラー展開できる.

$$F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \Phi(\Delta \mathbf{x})F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!}\Phi(\Delta \mathbf{x})^2 F(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{k!}\Phi(\Delta \mathbf{x})^k F(\mathbf{x}) + \cdots \quad (4)$$

$f_i(\mathbf{x})$ は x_i ($i = 1, \dots, n$) の多項式なので、実際には上式は無限級数とはならず、ある自然数 q が存在して

$$F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + \Phi(\Delta \mathbf{x})F(\mathbf{x}) + \frac{1}{2!}\Phi(\Delta \mathbf{x})^2 F(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{1}{q!}\Phi(\Delta \mathbf{x})^q F(\mathbf{x}) \quad (5)$$

が成り立つ.

3.2 問題設定

$F(\mathbf{x}) = 0$ の根 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ の $\alpha = \alpha_0$ での級数展開を考える. $f_i(\mathbf{x})$ ($i = 1, \dots, n$) に $\alpha = \alpha_0$ を代入したときの $\mathbf{x}$ の根が 0 次元であり、その 1 つを $\mathbf{x} = \Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$ とする. 本節では、以下の条件を満たす場合の Puiseux 級数の計算法を取り扱う.

(i) Jacobian $J(\Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)})$ のランクが $n - 1$ である.

(ii) ベクトル $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)})$ が、 $J(\Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の列ベクトルの線形結合で表されない、すなわち線形独立である. ただし、 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T$ は Jacobian $J(\Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の基底、すなわち

$$J(\Delta \boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} = 0$$

を満たすベクトルである ((i) の条件より、このようなベクトルは定数倍を除いて一意である).

後に示すように、この場合には $\eta_i(\alpha)$ は $(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}}$ のべき級数

$$\eta_i(\alpha) = \eta_{i,0} + \eta_{i,1}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \eta_{i,2}(\alpha - \alpha_0) + \eta_{i,3}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} + \cdots \quad (\eta_{i,l} \in \mathbf{C}) \quad (6)$$

の形に展開できる. ここでは (6) の係数 $\eta_{k,l}$ の計算法を述べる. 以下では、次の記法を用いる.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(k)} &= \begin{bmatrix} \eta_1^{(k)}(\alpha) & \cdots & \eta_n^{(k)}(\alpha) \end{bmatrix}^T \\ \eta_i^{(k)} &= \eta_{i,0} + \eta_{i,1}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \eta_{i,2}(\alpha - \alpha_0) + \cdots + \eta_{i,k}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{k}{2}} \quad (\eta_{i,j} \in \mathbf{C}) \\ \Delta \boldsymbol{\eta}^{(j)} &= \begin{bmatrix} \eta_{1,j} & \cdots & \eta_{n,j} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

容易に確認できるように

$$\eta^{(k)} = \Delta\eta^{(0)} + \Delta\eta^{(1)}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} + \cdots + \Delta\eta^{(k)}(\alpha - \alpha_0)^{\frac{k}{2}} + \cdots \quad (7)$$

である. また, $[f]_{(\alpha - \alpha_0)^{\frac{m}{2}}}$ で f を $(\alpha - \alpha_0)$ のべき級数に展開したときの $(\alpha - \alpha_0)^{\frac{m}{2}}$ の係数を表す. 例えば, 上式の $\eta_i^{(k)}$ に対しては

$$[\eta_i^{(k)}]_{(\alpha - \alpha_0)^{\frac{m}{2}}} = \eta_{i,m}$$

である. 表記の簡単のため, 以下では一般性を失うことなく, $\alpha_0 = 0$ とする.

3.3 アルゴリズム

3.3.1 導出

今, $F(\mathbf{x}) = 0$ を満たす根 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \eta_1(\alpha) & \cdots & \eta_n(\alpha) \end{bmatrix}^T$ の級数展開が (6) で与えられ, 定数部 $\Delta\eta^{(0)}$ は既に求まっているとする. このとき, $\Delta\eta^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots$) を次のように計算する.

(4) において $\mathbf{x} = \Delta\eta^{(0)}$, $\Delta\mathbf{x} = \Delta\eta^{(1)}\alpha^{\frac{1}{2}} + \Delta\eta^{(2)}\alpha$ とおき, 両辺の $\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha$ の係数を比較すると, それぞれ

$$0 = \Phi(\Delta\eta^{(1)})F(\Delta\eta^{(0)}) \quad (8)$$

$$0 = [F(\Delta\eta^{(0)})]_{\alpha} + \Phi(\Delta\eta^{(2)})F(\Delta\eta^{(0)}) + \frac{1}{2}\Phi(\Delta\eta^{(1)})^2F(\Delta\eta^{(0)}) \quad (9)$$

を得る. 作用素の性質 P4 より,

$$\Phi(\Delta\eta^{(1)})F(\Delta\eta^{(0)}) = J(\Delta\eta^{(0)})\Delta\eta^{(1)} \quad (10)$$

であるから, これを (8) に代入すると,

$$0 = J(\Delta\eta^{(0)})\Delta\eta^{(1)} \quad (11)$$

となり, $\Delta\eta^{(1)}$ は $J(\Delta\eta^{(0)})$ の零空間に含まれる事がわかる. 問題設定の条件 (i) より $J(\Delta\eta^{(0)})$ の零空間の次元は 1 次元であり, その基底は $\mathbf{h}$ であるから $\Delta\eta^{(1)}$ は

$$\Delta\eta^{(1)} = t\mathbf{h} \quad (12)$$

(ただし, t は定数) と書ける. ここで一般性を失うことなく, $h_n \neq 0$ と仮定する (ただし, h_n は $\mathbf{h}$ の第 n 要素である). (9) については作用素の性質 P3, P4 より

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\eta^{(2)})F(\Delta\eta^{(0)}) &= J(\Delta\eta^{(0)})\Delta\eta^{(2)} \\ \frac{1}{2}\Phi(\Delta\eta^{(1)})^2F(\Delta\eta^{(0)}) &= \frac{1}{2}t^2\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\eta^{(0)}) \end{aligned}$$

であるから、

$$J(\Delta\eta^{(0)})\Delta\eta^{(2)} + \frac{1}{2}t^2\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\eta^{(0)}) = -[F(\Delta\eta^{(0)})]_\alpha \quad (13)$$

となる. ここで、 $h_n \neq 0$ の仮定より、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{h}$ は基底であるので、 $\Delta\eta^{(2)}$ を次のように書き表すことができる (ただし、 $\xi_{i,2}$ は未知変数) .

$$\begin{aligned} \Delta\eta^{(2)} &= \xi_{1,2}\mathbf{e}_1 + \dots + \xi_{n-1,2}\mathbf{e}_{n-1} + \xi_{n,2}\mathbf{h} \\ &= \begin{bmatrix} \xi_{1,2} & \dots & \xi_{n-1,2} & 0 \end{bmatrix}^T + \xi_{n,2}\mathbf{h} \end{aligned}$$

これを (13) に代入し、 $J(\Delta\eta^{(0)})\mathbf{h} = 0$ に注意すると

$$\begin{bmatrix} J_1(\Delta\eta^{(0)}) & \dots & J_{n-1}(\Delta\eta^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\eta^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1,2} \\ \vdots \\ \xi_{n-1,2} \\ t^2 \end{bmatrix} = -[F(\Delta\eta^{(0)})]_\alpha \quad (14)$$

を得る (ただし、 $J_i(\Delta\eta^{(0)})$ は $J(\Delta\eta^{(0)})$ の第 i 列である) . 問題設定における仮定より上式の左辺の行列は正則であるので、その逆行列が存在する. よって

$$\begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} J_1(\Delta\eta^{(0)}) & \dots & J_{n-1}(\Delta\eta^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\eta^{(0)}) \end{bmatrix}^{-1} [F(\Delta\eta^{(0)})]_\alpha \quad (15)$$

とおけば、

$$\begin{bmatrix} \xi_{1,2} & \dots & \xi_{n-1,2} & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_{n-1} & \pm\sqrt{u_n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

を得る. 以上より $\eta^{(1)}$ は

$$\eta^{(1)} = \Delta\eta^{(0)} + t\alpha^{\frac{1}{2}}\mathbf{h} \quad (17)$$

とかける. また $\Delta\eta^{(2)}$ は

$$\Delta\eta^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} + \xi_{n,2}\mathbf{h} \quad (18)$$

$$\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (19)$$

とかける. ただし、上式右辺の $u_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ は (15) で定義されたものであり、 $\xi_{n,2}$ は未知変数である. 次に (4) において $x = \eta^{(1)}$, $\Delta x = \alpha\Delta\eta^{(2)} + \alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\eta^{(3)}$ とおくと

$$0 = F(\eta^{(1)}) + \Phi(\alpha\Delta\eta^{(2)} + \alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\eta^{(3)})F(\eta^{(1)}) + \frac{1}{2}\Phi(\alpha\Delta\eta^{(2)} + \alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\eta^{(3)})^2F(\eta^{(1)}) + \dots \quad (20)$$

となるが、右辺の第 3 項以降は $\alpha^{\frac{3}{2}}$ の係数には影響しない. また、第 1, 2 項は作用素の性質

P1～P4 より

$$\Phi(\alpha\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)} + \alpha^{\frac{3}{2}}\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) + \alpha^{\frac{3}{2}}\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) \\ F(\boldsymbol{\eta}^{(1)}) &= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} + \alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h}) \\ &= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \Phi(\alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \frac{1}{2}\Phi(\alpha^{\frac{1}{2}}t\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \dots \\ &= F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \alpha^{\frac{1}{2}}t\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \frac{1}{2}\alpha t^2\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(2)}) &= \Phi(\mathbf{k}^{(2)} + \xi_{n,2}\mathbf{h}) \\ &= \Phi(\mathbf{k}^{(2)}) + \xi_{n,2}\Phi(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (22)$$

となるので (20) の両辺の $\alpha^{\frac{3}{2}}$ の係数を比較すると

$$0 = [F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})]_{\alpha^{\frac{3}{2}}} + \left(\Phi(\mathbf{k}^{(2)}) + \xi_{n,2}\Phi(\mathbf{h}) \right) t\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + \Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \quad (23)$$

を得る. ここで (14) と同様に $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ を

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \mathbf{k}^{(3)} + \xi_{n,3}\mathbf{h} \\ \mathbf{k}^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \xi_{1,3} & \dots & \xi_{n-1,3} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (24)$$

と表すと

$$\Phi(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}) = \Phi(\mathbf{k}^{(3)}) + \xi_{n,3}\Phi(\mathbf{h}) \quad (25)$$

となる. これを (23) に代入し整理すると

$$\xi_{n,2}t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) + J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(3)} + \xi_{n,3}J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} \quad (26)$$

$$= -[F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})]_{\alpha^{\frac{3}{2}}} - t\Phi(\mathbf{k}^{(2)})\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \quad (27)$$

ここで

$$\Phi(\mathbf{k}^{(2)})\Phi(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) = \Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)}$$

$$J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{h} = 0$$

に注意すると (26) は

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \dots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1,3} \\ \vdots \\ \xi_{n-1,3} \\ \xi_{n,2} \end{bmatrix} \\ &= -[F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})]_{\alpha^{\frac{3}{2}}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} \end{aligned} \quad (28)$$

問題設定の仮定より左辺の行列は正則であり、上式の解 $\xi_{1,3}, \dots, \xi_{n-1,3}, \xi_{n,2}$ は一意に定まる。以上より

$$\boldsymbol{\eta}^{(2)} = \boldsymbol{\eta}^{(1)} + \alpha(\mathbf{k}^{(2)} + \xi_{n,2}\mathbf{h}) \quad (29)$$

が計算された。また $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ は (28) の解 $\xi_{1,3}, \dots, \xi_{n-1,3}$ を用いて

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \mathbf{k}^{(3)} + \xi_{n,3}\mathbf{h} \\ \mathbf{k}^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \xi_{1,3} & \cdots & \xi_{n-1,3} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

と書ける（ただし、 $\xi_{n,3}$ は未知変数）。

以下同様にして、 $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ が

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} &= \mathbf{k}^{(m+1)} + \xi_{n,k}\mathbf{h} \\ \mathbf{k}^{(m+1)} &= \begin{bmatrix} \xi_{1,3} & \cdots & \xi_{n-1,3} & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

（ただし、 $\xi_{n,k}$ は未知変数）の形で求まり、 $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ も求まったならば、 $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)}$ と $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を次のように計算できる。

(I) 線形方程式

$$A \begin{bmatrix} \xi_{1,m+2} \\ \vdots \\ \xi_{n-1,m+2} \\ \xi_{n,m+1} \end{bmatrix} = -[F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})]_{\alpha \frac{m+2}{2}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(m+1)} \quad (30)$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (31)$$

を解いて、 $\xi_{1,m+1}, \dots, \xi_{n-1,m+1}, \xi_{n,m}$ を求める（問題設定の仮定より、上式は一意解を持つ）。

(II) $\Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)}, \boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ を次式で計算する。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(m+2)} &= \begin{bmatrix} \eta_{1,m+2} & \cdots & \eta_{n-1,m+2} & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Delta\boldsymbol{\eta}^{(m+2)} &= \mathbf{k}^{(m+2)} + \xi_{n,m+1}\mathbf{h} \\ \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(m)} + \alpha \frac{m+1}{2} (\mathbf{k}^{(m+1)} + \xi_{n,m+1}\mathbf{h}) \end{aligned}$$

上の (I),(II) を繰り返すことによって $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ を任意の次数まで計算することが可能である。

3.4 アルゴリズムの記述

アルゴリズム 2

多変数多項式の特異点での近似根の計算法

入力 : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ を変数、

α をパラメータとする多項式 $F = \begin{bmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{bmatrix}^T$

特異点 $\mathbf{x} = \Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)} = \begin{bmatrix} \eta_{1,0} & \cdots & \eta_{n,0} \end{bmatrix}^T$ 、

この特異点をとる時のパラメータ α の値 α_0

出力 : 連立多項式の近似根の Puiseux 級数展開、

条件 : 条件 (i),(ii)

Step 1 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の零空間の基底 $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T$ を求める. 以下では一般性を失うことなく、 $h_n \neq 0$ と仮定する.

Step 2 $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ と $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ を計算し、 $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ が $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の各列と線形かどうかをチェックする. もし、線形独立でなければこのアルゴリズムは適用できないので、「アルゴリズム適用不可」を返す. 以下では $J_i(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ は $J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})$ の第 i 列を表すものとする.

Step 3 次の線形方程式を $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ について解く.

$$\begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \frac{1}{2}\Phi^2(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}F(\boldsymbol{\eta}^{(0)})) \end{bmatrix} \mathbf{y} = -[F(\boldsymbol{\eta}^{(0)})]_{\alpha-\alpha_0} \quad (32)$$

ベクトル $\mathbf{k}^{(2)}$ を $\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T$ 、 t を $t = \sqrt{y_n}$ と置く. 上の線型方程式が $\mathbf{y}$ に関して唯一解を持つことは、先に述べた条件 (i),(ii) より保証されている.

Step 4 $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ を次のように置き、

$$\boldsymbol{\eta}^{(1)} = \boldsymbol{\eta}^{(0)} + t(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \quad (33)$$

$m = 1$ と置く.

Step 5 次の線形方程式を $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ について解く.

$$A\mathbf{y} = -[F(\boldsymbol{\eta}^{(m)})]_{(\alpha-\alpha_0)^{\frac{m+2}{2}}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(m+1)} \quad (34)$$

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} J_1(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & \cdots & J_{n-1}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) & t\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} \quad (35)$$

ベクトル $\mathbf{k}^{(m+2)}$ を $\mathbf{k}^{(m+2)} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^T$ 、 $\xi_{n,m+1}$ を $\xi_{n,m+1} = y_n$ と置く. 上の線型方程式が $\mathbf{y}$ に関して唯一解を持つことは、先に述べた条件 (i),(ii) より保証されている.

Step 6 $\eta^{(m+1)}$ を次式で計算する.

$$\eta^{(m+1)} = \eta^{(m)} + (\alpha - \alpha_0)^{\frac{m+1}{2}} \left(\mathbf{k}^{(m+1)} + \xi_{n,m+1} \mathbf{h} \right) \quad (36)$$

Step 7 m が十分大きければ、 $\eta^{(m)}$ を近似根として返す. そうでなければ、 m を 1 つ増やし、Step 5 へ行く.

3.5 数値例

$F(\mathbf{x})$ を次のように置き、

$$F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1 + \alpha x_1 + x_2 + \alpha - 3 \\ x_2^2 - x_1 x_2 - 2 + \alpha x_2 - \alpha \end{bmatrix} \quad (37)$$

3 次の近似根 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \eta_1^{(3)}(\alpha) & \eta_2^{(3)}(\alpha) \end{bmatrix}^T$ の $\alpha_0 = -2.28471$ の級数展開を計算する. $\alpha = \alpha_0$ とおき、 $F(\mathbf{x}) = 0$ を解くと、 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -0.346817 & -0.335927 \end{bmatrix}^T$ を得る. $\Delta\eta^{(0)} = \begin{bmatrix} -3.46817 & -0.335927 \end{bmatrix}^T$ とおくと、Jacobian J は

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \alpha + 1 & 1 + x_1 \\ -x_2 & -x_1 + 2x_2 + \alpha \end{bmatrix} \quad (38)$$

であるので、

$$J(\Delta\eta^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1.62064 & -2.46817 \\ 0.335927 & 0.511604 \end{bmatrix} \quad (39)$$

であるが、上の $J(\Delta\eta^{(0)})$ は正則でないので、 $\mathbf{x} = \Delta\eta^{(0)}$ は特異点である. よってアルゴリズム 2 を用いて、近似根の Puiseux 級数を計算する.

Step 1 $J(\Delta\eta^{(0)})$ の零空間の基底 $\mathbf{h}$ を求めると

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -0.835908 & 0.54887 \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

を得る.

Step 2 $\Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\eta^{(0)})$ は

$$\begin{aligned} \Phi^2(\mathbf{h})F(\Delta\eta^{(0)}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\Delta\eta^{(0)})h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(\Delta\eta^{(0)})h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\Delta\eta^{(0)})h_2^2 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\Delta\eta^{(0)})h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(\Delta\eta^{(0)})h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\Delta\eta^{(0)})h_2^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.917609 \\ 1.52013 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので、 $\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\eta^{(0)})$ と $J(\Delta\eta^{(0)})$ の各列は線形独立である. よってアルゴリズムは適用可能である.

Step 3

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_1 & \frac{1}{2}\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -0.458805 \\ 0.335927 & 0.760063 \end{bmatrix} \\ -[F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})]_{(\alpha-\alpha_0)} &= \begin{bmatrix} 2.46817 \\ 1.33593 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

であるから、ベクトル $\mathbf{y}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -0.458805 \\ 0.335927 & 0.760063 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2.46817 \\ 1.33593 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2.30953 \\ 2.77841 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (42)$$

と計算される. $\mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2.30953 & 0 \end{bmatrix}^T$, $t = \sqrt{2.77841} = 1.6685$ と置く.

Step 4 $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ を次のように計算し、 $m = 1$ と置く.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(0)} + t(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \\ &= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Step 5

$$\begin{aligned} &\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 x_2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_1 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})h_2 \end{bmatrix} \mathbf{k}^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} 0.54887 & -0.835908 \\ 0.287038 & 1.93365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.30953 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.2676 \\ -0.66292 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_1 & t\Phi(\mathbf{h})^2 F(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1.62064 & -1.52952 \\ 0.335927 & 2.53383 \end{bmatrix} \\ -[F(\boldsymbol{\eta}^{(1)})]_{\alpha-\alpha_0}^{\frac{3}{2}} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 3.5063 \\ -3.02785 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1.18388 & -1.03801 \end{bmatrix}^T$ を得る.

よって $\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} -1.18388 & 0 \end{bmatrix}$, $\xi_{2,2} = -1.18388$ と置く.

Step 6 $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$ を次式で計算する.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{(2)} &= \boldsymbol{\eta}^{(1)} + \left(\mathbf{k}^{(2)} + \boldsymbol{\eta}_{2,2} \mathbf{h} \right) (\alpha - \alpha_0) \\ &= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 1.44185(\alpha - \alpha_0) \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 0.569735(\alpha - \alpha_0) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Step 7 $m \leftarrow 2$ とし、Step 5 へ行く.

Step 5

$$- [F(\boldsymbol{\eta}^{(2)})]_{(\alpha - \alpha_0)^2} - t\Phi(\mathbf{h})J(\Delta\boldsymbol{\eta}^{(0)})\mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} 3.5063 \\ -3.02785 \end{bmatrix}$$

より、 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1.19443 & 0.15184 \end{bmatrix}^T$ となるので、

$$\mathbf{k}^{(4)} = \begin{bmatrix} -1.19443 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \xi_{2,3} = 0.15184$$

と置く.

Step 6 $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}^{(3)} &= \boldsymbol{\eta}^{(2)} + \left(\mathbf{k}^{(3)} + \xi_{2,3} \mathbf{h} \right) (\alpha - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} \\ &= \begin{bmatrix} -3.46817 - 1.39334(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 1.44185(\alpha - \alpha_0) - 1.3108(\alpha - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} \\ -0.335927 + 0.914886(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{2}} - 0.569735(\alpha - \alpha_0) + 0.0833405(\alpha - \alpha_0)^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる.

Step 7 $m = 3$ なので、 $\boldsymbol{\eta}^{(3)}$ を近似根として返す.