

コンパクトな力学系の分解について

東大 教養 青 藤 利 弥

§1. Motivation

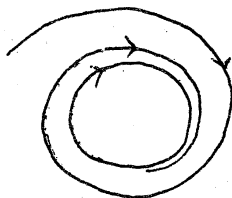
2次元球面 S^2 を相空間とする力学系に対しては、有名な Poincaré - Bendixson の理論がある。

この理論によればまず、このような力学系の minimal set は特異点か周期軌道である。これらの minimal set がすべて互に孤立している（したがって個数は有限）としよう。

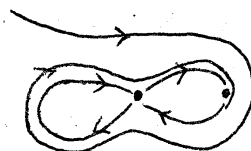
このとき、すべての軌道は空でない limit set をもち、それらは

(1) 特異点、または周期軌道であるか、または

(2) いくつかの特異点と、それをつなぐ特異点でない軌道とからつくられる閉曲線である。



(1)



(2)

したがって S^2 上の力学系においては、そのコンパクトな不変集合のうちで、特に limit set に成り得るものを全部とり出してみると、それは (1) か (2) かのどちらかになる。そこでそのようなコンパクトな不変集合を全部とり出してその和集合 N をつくと、はいめの力学系は

- 1) N 上の力学系 2) $S^2 - N$ 上の力学系

の二つに分解される。このうち 2) の方はコンパクトな不変集合を全くもたない、いわゆる不安定な力学系であって、その軌道は $t \rightarrow \pm\infty$ のとき N に漸近する。

この場合、前ページの (1), (2) の結果があるので、 N の中の力学系はきわめて簡単な構造をもっている。

さらに $S^2 - N$ 上の力学系の構造も実はきわめて簡単なものであって、それは平行流と同型 (すなわち parallelizable) であることが証明できる。

これらの事実があるために、 S^2 上の力学系の研究は、2) に属する軌道かどのような行動をとるから N に漸近するかという局所的な問題に帰着されてしまう。Poincaré-Bendixson の理論の成功の鍵はこのような事情に負うところであると思つてよいであろう。

それでは相空間がもっと一般なコンパクト空間であるとき、このような考え方を真似て、力学系を

1) * limit set になり得るようなコンパクトな不変集合全体の和の上的力学系と,

2) その残りの部分である不安定な力学系

とに分けてしまい, 2) の部分が実は平行流と同型であることが証明できるものであろうか?

もちろんこの場合には, 1) は S^2 の場合の N のような簡単な構造をもっているが, このような分解をしただけでは問題は解決しないが, とにかくこの分解によって, 本質的に大域的考察と必要とする部分 1) と, 局所的考察によって構造が決定できる部分 2) とに問題を分割することはできる.

以上がこの問題と考えるに到った動機である.

証明は [1] に詳しく述べられているので, ここでは結果を記述するに止める. また, 証明に利用されているような概念や定理のくわしい説明は [2] を参照される.

§2. 記号と定義

X は locally compact metric space, (X, π) は X を相空間とする力学系とする. 可能な R は実数全体の集合に自然な位相を入れたものとするとき

1) π は $X \times R$ から X への連続写像

2) $\forall x \in X$ に対し $\pi(x, 0) = x$

$$3) \quad \forall x \in X, \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad \text{is such that } \pi(\pi(x, s), t) = \pi(x, s+t)$$

これを π と記す記号を用いる。

$$(1) \quad C(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ を通る軌道})$$

$$(2) \quad C^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ から出る正の半軌道})$$

$$(3) \quad C^-(x) = \bigcup_{t \leq 0} \{\pi(x, t)\} \quad (x \text{ から出る負の半軌道})$$

$$(4) \quad L^+(x) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} \{\pi(x, t)\}} \quad (x \text{ の } \omega\text{-limit set})$$

$$(5) \quad L^-(x) = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} \{\pi(x, t)\}} \quad (x \text{ の } \alpha\text{-limit set})$$

さて

定義 1. $x \in X$ の positive prolongation $D^+(x)$ とは

$$y \in D^+(x) \iff \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } x_n \rightarrow x, t_n \geq 0, \pi(x_n, t_n) \rightarrow y$$

定義 2. $x \in X$ の positive prolongational limit set $J^+(x)$ とは

$$y \in J^+(x) \iff \exists \{x_n\} \subset X, \{t_n\} \subset \mathbb{R} \text{ s.t. } x_n \rightarrow x, t_n \rightarrow \infty, \pi(x_n, t_n) \rightarrow y$$

定義 1 における $t_n \geq 0$ を $t_n \leq 0$ とおきかえて negative prolongation $D^-(x)$ を定義する。

定義 2 における $t_n \rightarrow \infty$ を $t_n \rightarrow -\infty$ とおきかえて negative prolongational limit set $J^-(x)$ を定義する。

$D^\pm(x) = J^\pm(x) \cup C^\pm(x)$, $J^\pm(x) \supset L^\pm(x)$ (複号同値) であり, $J^\pm(x)$ は閉不変集合である。

定義 3. M は compact な不変集合とす。

1) $[x; x \in X, \phi \neq L^+(x) \subset M]$ は M の region of positive attraction とおき, $A^+(M)$ で表わす。

2) 1) において $L^+(x) \in L^-(x)$ でありかえりえ M の region of negative attraction とし $A^-(M)$ で表わす.

3) $[x; x \in X, L^+(x) \cap M \neq \emptyset]$ は M の region of positive weak attraction とし $a^+(M)$ で表わす.

4) 3) において $L^+(x) \in L^-(x)$ でありかえりえ M の region of negative weak attraction とし $a^-(M)$ で表わす.

5) $B^\pm(M) = A^\pm(M) - M, \quad b^\pm(M) = a^\pm(M) - M$

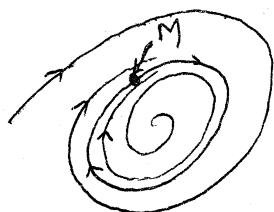
($A^\pm(M) \supset M, a^\pm(M) \supset M$ は明かである.)

$A^\pm(M), B^\pm(M), a^\pm(M), b^\pm(M)$ は必ずしも不変集合である.

定義 4. 1) $A^+(M) (A^-(M))$ が M の近傍にあるとき, M は positive (negative) attractor とし.

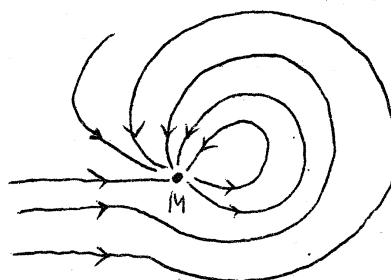
2) $a^+(M) (a^-(M))$ が M の近傍にあるとき, M は positive (negative) weak attractor とし.

attractor は weak attractor であるが, その逆は必ずしも成り立たない. attractor は必ずしも安定ではないが, もし安定ならば漸近安定である.



weak attractor の attractor へ

例は 134



安定である attractor の例

定義 5. M は compact な不変集合とする, M の近傍 U の存在して,
 $M \cap U < \delta$ かつ $U \cap U^c < \delta$ なる $C^+(x) \not\subset U, C^-(x) \not\subset U$ であるとき
 なる x のとれるとき, M は saddle set であるといふ. saddle
 set である compact な不変集合を non-saddle set といふ.

§ 3. 必要定理

定理 1. M の positive (negative) weak attractor であるとき

$$D^+(M) = \alpha^-(M) \quad (D^-(M) = \alpha^+(M)) \quad (\text{Bhatia})$$

定理 2. M の non-saddle set であるとき

$$x \notin M, L^+(x) \cap M \neq \emptyset \rightarrow M \supset J^+(x) \supset L^+(x)$$

$$x \notin M, L^-(x) \cap M \neq \emptyset \rightarrow M \supset J^-(x) \supset L^-(x) \quad (\text{Saito})$$

系 M の non-saddle set であるとき

$$\alpha^+(M) = A^+(M), \quad \alpha^-(M) = A^-(M)$$

定理 3. M の non-saddle set である minimal set であるとき孤立である

$$\text{であるとき} \quad D^+(M) = \overline{A^+(M)}, \quad D^-(M) = \overline{A^-(M)} \quad (\text{Saito})$$

定理 4. M の non-saddle set である minimal set であるとき孤立である

であるとき $B^+(M) (= \alpha^+(M)), B^-(M) (= \alpha^-(M))$ はともに空集合である. (Saito)

定義 6. 力学系 (X, π) において, $S \subset X$ と, X から $S \times \mathbb{R}$

への homeomorphism h によって条件を満たすものが存在するとき,

(X, π) は parallelizable であるといふ.

$$1) \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \pi(S, t) = X,$$

$$2) \forall x \in S, \forall t \in \mathbb{R} \text{ に対して } h(\pi(x, t)) = (x, t)$$

定理 5. X が locally compact, separable, metric ならば (X, π)

が parallelizable である必要十分条件は, $\forall x \in X$ に対して

$$J^+(x) = \emptyset \text{ (ある } x \text{ は } J^-(x) = \emptyset \text{) となることである (Nemytskii)}$$

§4. compact system の分解

X を compact metric space として力学系 (X, π) を考える.

minimal set は有限個で, しかも互に孤立してゐるもの

とすることができる. minimal set のうち saddle は $S_1, \dots, S_p$ ($0 \leq p < \infty$),

non-saddle は $F_1, \dots, F_r$ ($0 \leq r < \infty$) とする. すると

$$N = (\bigcup S_k) \cup (\bigcup F_k)$$

とすると, X が compact ならば任意の $x \in X$ に対して $L^+(x) \neq \emptyset$.

ゆえに $L^+(x)$ は compact な不変集合で, しかも, minimal set

と少なくとも一つを含む. ゆえに

$$L^+(x) \cap N \neq \emptyset, \quad L^-(x) \cap N \neq \emptyset$$

ゆえに N は正負両方向の ~~attractor~~ weak attractor である

$$\alpha^+(N) = \alpha^-(N) = X$$

したがって定理 1 により $D^+(N) = D^-(N) = X$. したがって

$$X = (\bigcup D^+(S_k)) \cup (\bigcup D^+(F_k))$$

$$= (\bigcup D^-(S_k)) \cup (\bigcup D^-(F_k))$$

定理 3.12 より

$$X = (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup \overline{A^-(F_k)}) = (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup \overline{A^+(F_k)})$$

これと次のように $\frac{1}{2}$ を通す

$$\begin{aligned} X &= (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup B^-(F_k)) \cup (\cup (\partial A^-(F_k) \setminus \cup F_k)) \cup (\cup F_k) \\ &= (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup B^+(F_k)) \cup (\cup (\partial A^+(F_k) \setminus \cup F_k)) \cup (\cup F_k) \end{aligned}$$

これより 3.12 の補題が成り立つ。

補題 1. $F_1, \dots, F_r$ の任意の $\gamma \in F$ を表わすと

$$\partial A^+(F) \setminus \cup F_k \subset \cup D^-(S_k), \quad \partial A^-(F) \setminus \cup F_k \subset \cup D^+(S_k)$$

これを上の関係に使う

$$\begin{aligned} X &= (\cup D^+(S_k)) \cup (\cup B^-(F_k)) \cup (\cup F_k) \\ &= (\cup D^-(S_k)) \cup (\cup B^+(F_k)) \cup (\cup F_k) \end{aligned}$$

よって

$$M = \cup F_k$$

$$P = (\cup B^+(F_k)) \cap (\cup B^-(F_k))$$

$$Q = (\cup D^+(S_k)) \cap (\cup B^+(F_k))$$

$$S = (\cup D^-(S_k)) \cap (\cup B^-(F_k))$$

$$T = (\cup D^+(S_k)) \cap (\cup D^-(S_k))$$

とすれば $X = M \cup P \cup Q \cup S \cup T$ となり、これは $M, P,$

Q, S は互いに disjoint, T は P, Q, S とは disjoint であること

が証明できる。さらに $T \cap M$ は必ずしも空集合ではない。

また、 M, P, Q, S, T はすべて不変集合で、 M, T は閉集合、

P は閉集合である。

補題 2. $T \cap M \neq \emptyset$ ならば $T \cap M = \bigcup (T \cap F_k)$ であり, $T \cap F_k \neq \emptyset$ ならばそれは T の連結成分である。

この補題から $\tilde{T} = T \cap (X - M)$ とおけば $\tilde{T}$ も閉不変集合であることがわかる。

これから

$$X = M \cup P \cup Q \cup S \cup \tilde{T}$$

なる分解が得られる。 $M, P, Q, S, \tilde{T}$ は不変集合であり互いに disjoint, $M, \tilde{T}$ は閉集合, P は閉集合である。そして $M \neq \emptyset, \tilde{T} \neq \emptyset$ ならば $P \neq \emptyset$ であり, また Q, S のうち少なくとも一方は空である。

次に述べるのが最終的な分解定理である。

主定理. $\{P_\alpha\}, \{Q_\alpha\}, \{S_\alpha\}$ とそれぞれ P, Q, S の連結成分とする。

(1) ある番号 j に対して i に対して $P_\alpha \subset B^+(F_j) \cap B^-(F_i)$ である ($j=i$ のときもあり得る。)

(2) $x \in P_\alpha \rightarrow L^+(x) = F_j, L^-(x) = F_i$

(3) (P_α, π) は parallelizable (元々 (P_α, π) は (X, π) の P_α への restriction とする)

(4) ある番号 j に対して $Q_\alpha \subset B^+(F_j)$

(5) $\partial Q_\alpha \cap M = F_j$

$$(6) \quad x \in Q_\alpha \rightarrow L^+(x) = F_j, \quad L^-(x) \subset \tilde{T}$$

(7) (Q_α, π) は parallelizable

(8) ある番号 j に對し $S_\alpha \subset B^-(F_j)$

$$(9) \quad \partial S_\alpha \cap M = F_j$$

$$(10) \quad x \in S_\alpha \rightarrow L^-(x) = F_j, \quad L^+(x) \subset \tilde{T}$$

(11) (S_α, π) は parallelizable

証明は $\Leftarrow$ は述べた通り、parallelizability の証明には、定理 2 と定理 5 とを使う。たゞし (Q_α, π) が parallelizable なることは次のように示す。

$x \in Q_\alpha$ とすれば (6) により、ある番号 j に對して $L^+(x) = F_j$ 。 F_j は non-saddle 点から定理 2 により $J^+(x) \subset F_j$ 。 $\Leftarrow$ より $Q_\alpha \cap F_j = \emptyset$ であるから (Q_α, π) にある x は $J^+(x) = \emptyset$ 。ゆゑに定理 5 により (Q_α, π) は parallelizable. (Q_α は compact, separable, metric なることはさう簡単で証明できる.)

この定理からわかるように P, Q, S の中の軌道はすべて平行流と同型であるから、そしてその limit set は M または $\tilde{T}$ に含まれるから、問題は M と $\tilde{T}$ の近傍での軌道の行動をいさへることにしなされる。すなわち問題を局所化した。

M の構造をいさへることはすなわち minimal set の内部構造をいさへることで、これは本質的に global な問題であり、多くの人間によつて研究されてゐるが、未だ解決には程遠い。

$\tilde{T}$ の構造をしろへるには, 力学系 $(\tilde{T}, \pi)$ を考える. $\tilde{T}$ は閉集合であるからこれはコンパクトな力学系である. この minimal set は $S_1, \dots, S_p$ であるが, このうちいくつかは $(\tilde{T}, \pi)$ にあつては non-saddle であるかもしれない. $(\tilde{T}, \pi)$ の saddle と non-saddle の両方の minimal set を含み, $\tilde{T}$ である X と考え, 上の分解を行なう. その結果得られた $\tilde{T}$ には π 同様の分解を行なう.

minimal set の数は有限個であるから, この分解は有限回で終る. すなわちこの系統は有限回くりかえすと, 最後に $\tilde{T}$ にあつた minimal set は $(\tilde{T}, \pi)$ に関して) すべての non-saddle となるが, すべての saddle となるかどうかはさておいて, その場合には, $\tilde{T}$ の分解は, $\tilde{T}$ である X とおけば

- 1) $X = M \cup P$
- 2) $X = \tilde{T}$

のどちらかとなる. 1) の場合には, P の構造がすぐにはわかっていて, それはこの力学系は平行流と同型であるから, 問題はなにか, 2) の場合には, 上のような方法ではやはり議論を進めることができません, 本質的に global な考察が必要となる. したがってこの方向で残された問題は, M の内部構造をしろへる問題, すなわち

A) minimal dynamical system の研究

および $X = \tilde{T}$ であるような場合の研究, すなわち

B) minimal set がすべて saddle set であるような力学系の研究

の二つに要約される。A) については昔から研究されているが、B) は (saddle set という概念は [3] においてはいじめて導入されたものなため) 全く手がつけられていない。

この他に、 M あるいは $\tilde{M}$ の近傍での軌道の行動をしらべる、いわゆる局所的な問題があるが、これもほとんどの手がついている。筆者は、 S^2 上の力学系の特異点の近傍の軌道の研究のために Bendixson が構築した nodal region theory を一般化することを試みたが、あまり進展をみていない。([4], [5], [6] 参照)

文 献

- [1] T. SAITO, On the structure of compact dynamical systems, Funkcial. Ekvac. 13 (1970), 147-170
- [2] N.P. BHATIA & G.P. SZEGÖ, Stability theory of dynamical systems, Springer, Berlin, Heidelberg & New York (1970)
- [3] T. URA, On the flow outside a closed invariant set; stability, relative stability and saddle sets, Contrib. Diff. Eqs, 3 (1964), 249-294
- [4] T. SAITO, On the flow outside an isolated minimal set, Proc.

U.S. - Japan Seminar on Diff. and Func. Eqs, Benjamin, New York
& Amsterdam, (1967), 301-312

[5] T. SAITO, Isolated minimal sets, Funkcial. Ekvac. 11 (1968),
155-167.

[6] T. SAITO, On a compact invariant set isolated from minimal sets, Funkcial. Ekvac. 12 (1969), 193-203