

ある調和写像の正則性について

東大理 小野 薫 (Kaoru Ono)

§ 1. 序

Kähler 多様体間の正則写像は調和写像であることが知られている。([L]) この逆については次のことが示されている。

A) (Eells - Wood [E-W])

X, Y を閉リーマン面とし、 $f: X \rightarrow Y$ を (X, Y 上のある Kähler 計量に関する) 調和写像とする。このときもしも、

$$(*) \quad e(X) + |\deg(f) \cdot e(Y)| > 0$$

(ここに、 $e(X), e(Y)$ は X, Y の Euler 数、 $\deg(f)$ は f の写像度を表わす。)

が成り立つならば、 f は正則又は反正則写像である。

B) (Siu [S-1])

M, N を compact Kähler 多様体とし、更に N は、Siu の意味で strongly negative curvature をもつとする。 $f: M \rightarrow N$ を調和写像で、 M 上のある点での differential df の rank が 4

以上であるものとすれば、 f は正則又は反正則である。

ここでは、次の定理を証明する。

Theorem 1.

M を m 次元 compact Kähler 多様体で、第 1 Chern 類 $c_1(M)$ が negative なものとし、 N を関リーマン面で hyperbolic なものとする。もしも、調和写像 $f: M \rightarrow N$ が次の条件

$$(**) \quad m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$$

を満たすとすれば、 f は正則又は反正則である。

この定理は、前出の Eells-Wood による結果 A) の一般化になっている。Siu による結果 B) は differential に関する条件がいつも満たされないため、そのまま適用することはできない。しかし [S-1] の中で用いられた Weitzenböck formula を使って示される Lemma ([S-2]) が証明の中で使われる。

Theorem 1 の応用として次のことが証明できる。

Theorem 2.

M, N を、上述の通りとする。このとき、任意の連続写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、次の不等式が成り立つ。

$$|f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq m \cdot |c_1(M)^m [M]|.$$

これは、関リーマン面間の連続写像に関する Kneser の結果の一般化と見ることができる。

§ 2. Theorem 1. の証明。

証明のために、semi-stable vector bundle, Einstein-Hermitian vector bundle の定義と基本的な性質を復習する。

M を m 次元 compact Kähler 多様体, Φ を M 上の Kähler form とする。

Definition (2.1).

M 上の正則 vector bundle E が、 Φ -semi stable とは、
任意の coherent subsheaf $\mathcal{S}$ で、 $0 < \text{rank } \mathcal{S} < \text{rank } E$ であるものに対して、

$$\int_M \frac{c_1(\mathcal{S})}{\text{rank } \mathcal{S}} \wedge \Phi^{m-1} \leq \int_M \frac{c_1(E)}{\text{rank } E} \wedge \Phi^{m-1}$$

が満たされることである。

Definition (2.2).

(E, h, ∇) を M 上の Hermitian vector bundle (即. E は M 上の正則 vector bundle, h は E 上の Hermitian metric, ∇ は Hermitian connection) とする。 (E, h, ∇) が Einstein-Hermitian vector bundle とは、Ricci curvature K (即. curvature を M 上の Kähler metric に関して縮約したもの) が、 M 上の関数 ϕ を用いて、 $K = \phi \cdot \text{Id}_E$ と書けるもののことである。

(注意) 上で ϕ の代りに定数としても E に対する条件とし

それは同値である。

Lemma (2.3).

1) 任意の Hermitian line bundle は, Einstein - Hermitian vector bundle である。

2) 2 つの Einstein - Hermitian vector bundles の tensor 積は, Einstein - Hermitian vector bundle である。

3) Einstein - Hermitian vector bundle の dual は, Einstein - Hermitian vector bundle である。

4) Einstein - Hermitian vector bundle は Φ -semi stable である。

5) (M, Φ) を Einstein - Kähler 多様体とすると, その tangent bundle TM は, Einstein - Hermitian vector bundle となる。

以上のことについては, [K] を参照されたい。

$f: M \rightarrow N$ を Kähler 多様体間の調和写像とすると, その differential の複素化 $d^{\mathbb{C}}f$ は次の4つに分解する。

$$\partial f: T'M \rightarrow T'N \quad \bar{\partial} f: T''M \rightarrow T'N$$

$$\partial \bar{f}: T'M \rightarrow T''N \quad \bar{\partial} \bar{f}: T''M \rightarrow T''N$$

ここに $T'M, T''M$ 等は $(1,0)$ -tangent bundle, $(0,1)$ -tangent bundle を表わす。

Lemma (2.4). ([S-2])

M を compact Kähler 多様体, N を hyperbolic なリーマン面とする。このとき、調和写像 $f: M \rightarrow N$ に対し、 f^*TN は正則 line bundle となり、 ∂f は $T^*M \otimes f^*TN$ の正則 $\bar{\partial}$ -section となる。(ここで TM, TN を $T'M, T'N$ と同一視している。)

Proof of Theorem 1.

Lemma (2.4) により、 ∂f は $T^*M \otimes f^*TN$ の正則 $\bar{\partial}$ -section である。 f が反正則でなければ ∂f は恒等的には 0 ではなく、従って任意の開集合上恒等的には 0 ではない。従って、 ∂f の生成する $\mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$ の subsheaf は M の構造層 $\mathcal{O}_M$ と同型である。これを $\mathcal{E}$ と書くことにする。

一方、 M の第 1 Chern 類が negative であるから、Aubin-Yau の定理により、 M 上には Einstein-Kähler metric が存在する。Lemma (2.3) 3), 5) から、 T^*M は、(上述の M 上の Einstein-Kähler metric に関して) Einstein-Hermitian vector bundle である。 f^*TN は正則 line bundle であるから、(上述の M 上の Einstein-Kähler metric に関して) Einstein-Hermitian vector bundle である。Lemma (2.3) 2), 4) から

$T^*M \otimes f^*TN$ は μ -semi stable (ここで μ は上述の M 上の

Einstein-Kähler metric の Kähler form) となる。 Φ -semi-stable vector bundle の定義と $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}(T^*M \otimes f^*TN)$ から、

i) $0 \leq \{m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1} [M]$ が得られる。

N の複素構造を逆にしたものを $\bar{N}$ と書くことにする。
 $f: M \rightarrow N$ が正則でないとする。 $f: M \rightarrow \bar{N}$ は反正則ではなく、従って先の議論により、

ii) $0 \leq \{-m \cdot f^*c_1(N) - c_1(M)\} \cdot \{-c_1(M)\}^{m-1} [M]$ が得られる。

f が、正則でも反正則でもないとする。 i), ii) から、
 $m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq |c_1(M)^m [M]|$
 となるが、一方、仮定から、

$m \cdot |f^*c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$
 であるからこれは矛盾である。従って f は正則又は反正則である。 (終)

§ 3. 正則写像の energy の評価.

smooth な写像 $f: M \rightarrow N$ に対し energy $E(f)$ を次式で定義する。

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 dv_M$$

Proposition (3.1).

M を compact Kähler 多様体で、その Ricci curvature が
 下から $\frac{k}{\dim_{\mathbb{R}} M}$ (k は 負の定数) で抑えられているもの
 とし、 N を non-positively curved Kähler 多様体で、その
 holomorphic sectional curvature が 上から (負の定数) K
 で抑えられているものとする。このとき 正則写像

$f: M \rightarrow N$ の energy は、

$$E(f) \leq \frac{|k| \cdot \text{vol}(M)}{2 |K|}$$

を満たす。

証明には、次の Weitzenböck formula が用いられる。

(Weitzenböck formula for harmonic maps, [E-L], [E-S])

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \|df\|^2 &= - \|\nabla df\|^2 + \sum_{s,t} \langle R^N(df(e_s), df(e_t)) df(e_t), df(e_s) \rangle \\ &\quad - \sum_s \langle df(\text{Ric}^M(e_s)), df(e_s) \rangle \end{aligned}$$

ここに $\{e_s\}$ は TM の orthonormal frame, R^N は
 N の curvature tensor, Ric^M は M の Ricci curvature
 tensor を 線型写像 $TM \rightarrow TM$ と見たものを表す。

§ 4. Theorem 2. の証明。

$$f \text{ が } m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1}[M]| \leq |c_1(M)^m[M]|$$

を満たしているときは何も示さないのでよいから、

$$m \cdot |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| > |c_1(M)^m [M]|$$

であるとしてよい。Eells-Sampson [E-S] により、 f と homotopic な harmonic map が存在することがわかるので、 f は harmonic map であるとしてよい。すると Theorem 1. から f は正則又は反正則となる。 f が正則として証明すれば十分である。

正則写像 $f: M \rightarrow N$ に Proposition (3.1) を適用すると

$$E(f) \leq \frac{|k| \cdot \text{vol}(M)}{2 \cdot |K|}.$$

ここで、 $K = -1$, $k = -2m$ (M 上の Kähler form ω_N が Ricci form の -1 倍となるようにとればよい。) を代入して、

$$E(f) \leq \frac{m}{(2\pi)^m} \cdot \frac{(2\pi)^m}{m!} \cdot |c_1(M)^m [M]|.$$

一方、

$$\frac{1}{m!} |f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| = \frac{E(f)}{(2\pi)^m}.$$

従って、

$$|f^* c_1(N) \cdot c_1(M)^{m-1} [M]| \leq m \cdot |c_1(M)^m [M]|$$

を得る。 (終)

REFERENCES.

- [E-L] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, CBMS Regional Conf., 1981
- [E-S] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. Joun. Math. 86 (1964), 109-160
- [E-W] J. Eells and J. C. Wood, Restrictions on harmonic maps of surfaces, Topology 15 (1976), 263-266
- [K] S. Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles, Iwanami Shoten and Princeton University Press 1987
- [L] A. Lichnerowicz, Applications harmoniques et variétés kählériennes, Symp. Math. III . (Bologna) 1970, 341-402
- [O] K. Ono, On the holomorphicity of harmonic maps from compact Kähler manifolds to hyperbolic Riemann surfaces, Preprint, 1986
- [S-1] Y. T. Siu, The complex analyticity of harmonic maps and strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. Math. 112 (1980), 73-111
- [S-2] Y. T. Siu, Some Recent Results in Complex Manifold Theory related to Vanishing Theorems for semi-positive case, Springer Lecture Notes in Math. 1111 (1985), 169-192