

対称空間上の不変微分作用素の同時固有函数

日本女子大 峰村 勝弘

1970年の Nice Congress で, S. Helgason は 単位円内部
 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の Poincaré metric

$$ds^2 = (1 - x^2 - y^2)^{-2} (dx^2 + dy^2), \quad z = x + iy$$

に対応する Laplacian

$$\Delta = (1 - x^2 - y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

の任意の固有函数は, Poisson kernel

$$p(z, e^{i\theta}) = \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2}$$

のある複素数 λ による, 境界 $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
の上のある超函数 φ の Poisson integral

$$\int_S p(z, e^{i\theta})^\lambda \varphi(e^{i\theta}) d\theta$$

として得られることを示し, 一般の対称空間への拡張を示唆

した。(Helgason's conjecture, [1]) 以後群論的な方法で Helgason's conjecture の証明が試みられたが、対称空間の rank が 1 の場合で止る。一般 Lorentz 群を除いて満足すべき結果が得られず、higher rank の場合は絶望的であった。

と云うで、Helgason's conjecture を証明するためには、各固有函数に対して、Poisson integral の left inverse と云う様な境界値がとれればよい。([4] 参照) それは 確定特異点型偏微分方程式と境界値問題の理論 [2] によって可能であることがわかった。従って Helgason's conjecture は一般の対称空間に対して (generic な固有値に対して) 成立する。以下その概略を述べよう。詳細は [6] を参照されたい。又、 $G = SL(3, \mathbb{R})$ の場合は既にわかっており (大島 [5]), 議論は $SL(3, \mathbb{R})$ の場合に平行である。

さて、 G を中心有限な、連結実半単純リー群、 K を G の一つの極大コンパクト部分群、 σ, τ をそれぞれ G, K のリー環、 $\sigma = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を一つのカルタン分解とする。 σ を $\mathfrak{p}$ における一つの極大可換部分空間とし、 σ の双対空間 σ^* に順序を一つ固定して、この順序に属する正のルート全体を R_+ 、 R_+ に対応する岩沢分解を $G = KAN$ とする。 G の元 g のこの岩沢分解による分解を $g = \kappa(g) \exp H(g) n(g)$ ($H(g) \in \sigma$) とする。 $M, \hat{M}$ をそれぞれ K における A の

中心化群, 正規化群 とする。 $W = \hat{M}/M$ とおく。 W は weyl group と呼ばれる。 $\mathcal{D}(G/K)$ で G/K 上の G -不変な微分作用素のなる環を表わす。 $\mathcal{D}(G/K)$ は $l = \text{rank}(G/K)$ 変数の多項式環に同型である。 $\mathcal{D}(G/K)$ の指標, すなわち $\mathcal{D}(G/K)$ から $\mathbb{C}$ への環準同型 χ に対して $\pi(\chi)$ により G/K 上の微分方程式系

$$\Delta u = \chi(\Delta) u, \quad \Delta \in \mathcal{D}(G/K)$$

を表わし, $\pi(\chi)$ の同時固有函数のなる空間を $\mathcal{A}(G/K, \pi(\chi))$ で表わす。 $\mathcal{D}(G/K)$ に楕円型作用素があるので, $\pi(\chi)$ の解は実解析的になる。 $\mathcal{B}(K/M)$ により K/M 上の超函数全体のなる空間を表わし, $\lambda \in \sigma_c^*$ (σ の双対空間 σ^* の複素化を σ_c^* と書く) に対して $\mathcal{B}(K/M)$ 上の G の作用を

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(kM) = e^{\lambda(H(g^{-1}k))} \varphi(k(g^{-1}k)M) \quad (g \in G)$$

で定義すると, $\mathcal{B}(K/M)$ は G -可群となる。 次は, $\varphi \in \mathcal{B}(K/M)$ に対して φ の Poisson integral $P_\lambda(\varphi)$ を

$$(P_\lambda \varphi)(gK) = \int_K e^{-(\lambda+2\rho)(H(g^{-1}k))} \varphi(kM) dk$$

で定めて, ρ は ρ は K 上の total mass 1 の Haar meas. ρ は 正ルート α の和の半分を表わす。 ρ の時容易に P_λ が G -可群 $\mathcal{B}(K/M)$ から (left translation により)

G -可群 $A(G/K, \pi(\chi_\lambda))$ の中への G -準同型に存在することがわかる。すなわち χ_λ は $\lambda \in \sigma_G^*$ に対して自然に定まる $D(G/K)$ の指標である。従って Helgason's conjecture は、任意の $\lambda \in \sigma_G^*$ に対して $\mathcal{P}_\lambda$ は onto か という問題に言い直すことが出来る。以下 $\lambda \in \sigma_G^*$ を一つ固定して考える。

対称空間 G/K の元則元全体は、 G/K の稠密な開部分多様体となり、自然な対応で、 $\Omega_+ = K/M \times (0, 1)^l$ ($l = \dim(G/K)$) と同型になる。 $\Omega = K/M \times (-1, 1)^l$ とおき、 $\Omega_+ \subset \Omega$ と考える。 $D(G/K)$ の元 Δ は制限により Ω_+ の微分作用素となるが、 Δ が G -不変であることから Δ が実解析的に Ω 上の微分作用素に拡張出来ることが示されるので、それをやはり Δ で表す。

さて、 Ω の超平面 N_i ($i=1, \dots, l$) を

$$N_i = \{(x, y) \in K/M \times (-1, 1)^l \mid y = (y_1, \dots, y_l), y_i = 0\}$$

で定める。そこで各 N_i に対して、 N_i に属して弱 ∞ 型で確定特異点型の微分作用素 P_i で、任意の $u \in A(G/K, \pi(\chi_\lambda))$ に対して $P_i u = 0$ を満たすものが存在する。 ([6] 参照) 従って [2] により、 Ω 上の超函数 $\tilde{u}$ で、

$$\Delta \tilde{u} = \chi_\lambda(\Delta) \tilde{u}, \quad \Delta \in D(G/K),$$

$$\tilde{u}|_{\Omega_+} = u$$

$$\text{supp } \tilde{u} \subset \overline{\Omega_+}$$

存在も α が唯一つ存在する $\Rightarrow \epsilon$ がわかる。更に $\Delta \in D(GK)$ は edge $K/M \times \{0\} \subset \Omega$ に属して確定特異点型であるからやはり [2] によつて、 λ の次の級定

$$(A) \text{ 任意のルート } \alpha \text{ に対して } \frac{2\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \text{ は整数となる。}$$

を満足しているとき、 $\Gamma S^* \Omega$ の subset

$$V = \{ (x, y, \Gamma(\xi, \eta)) \in \Gamma S^* \Omega \mid y=0, \xi=0, \eta_i \neq 0 (i=1, \dots, l) \}$$

の近傍で定義された 0 階の micro-differential operator A_w ($w \in W$) が存在し、 $\tilde{u}(x, y)$ は K/M 上の超函数 φ_w ($w \in W$) により

$$(*) \quad \text{sp } \tilde{u} = \sum_{w \in W} A_w (\varphi_w y^{\lambda(w)})$$

と表わされる。ここで、 $\alpha_i (i=1, \dots, l)$ は単純ルートを表わし $w \in W$ に対して $\lambda^w = w(\lambda + \rho) - \rho$ とおく。 $-\lambda^w = \sum_{i=1}^l \lambda_i \alpha_i$ により $\lambda_i (i=1, \dots, l) \in \mathbb{C}$ を定め、 $y^{\lambda(w)} = y_1^{\lambda_1} \cdots y_l^{\lambda_l}$ とおく。さて、(*) において、 A_w の symbol $\sigma_0(A_w)$ が V 上恒等的に 1 という条件の下に A_w と φ_w ($w \in W$) が一意的に存在

す。 $\Sigma = \Sigma$ $u \in A(G/K, \pi(\chi_\lambda))$ に対して. (*) で定まる超
 関数 φ_1 を対応させた写像を β_λ と定めると, β_λ は次の性
 質を持つことが証明出来る。

1) β_λ は $A(G/K, \pi(\chi_\lambda))$ から $B(K/M)$ への G -準同型:

$$2) \beta_\lambda \circ P_\lambda = C_\lambda \circ \text{id}$$

C_λ は Harish-Chandra の c -function により, $C_\lambda =$
 $C(-\sqrt{1}(\lambda + \rho))$ と表わされる。

1), 2) と. K -両側不変な球関数の積分表示の理論とを合
 わせて, 次の定理を得る。

定理 仮定(A)の下で. Poisson integral

$$P_\lambda: B(K/M) \longrightarrow A(G/K, \pi(\chi_\lambda))$$

は上の G -同型と一致する。

References

- [1] Helgason, S., Group Representations and Symmetric Spaces, Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 313 à 319.
- [2] Kashiwara, M. and T. Oshima, Systems of differential equations with regular singularity and their boundary value problem, preprint.
- [3] 峰村-田中-岡本, ランク 1 の対称空間上のディリクレ問題, 数理研講究録「対称空間上の不変微分方程式」に掲載予定.
- [4] 岡本-峰村, 対称空間上の境界値問題について, 数理研講究録 227 (1975), 70-74.
- [5] 大島利雄, 対称空間における境界値問題について, 数理研講究録「対称空間上の不変微分方程式」に掲載予定.
- [6] Kashiwara, M., A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, Eigenfunctions of Invariant Differential Operators on a Symmetric Space, preprint.