

ある種の非線形二階常微分方程式の解の挙動について

(Large-time behavior for some second order nonlinear ODE's)

浅川秀一 岐阜大学工学部 (Hidekazu ASAKAWA)

ここに述べることは、広島大学（学校教育）の池畠良氏との共同研究によるものです。次の非線形二階常微分方程式

$$\begin{aligned} u''(t) + \delta |u'(t)|^{q-1} u'(t) &= |u(t)|^{p-1} u(t) \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = u_1 \end{aligned} \quad (1)$$

の解 $u \equiv u(\cdot; u_0, u_1)$ の挙動について考える。ただし、 $\delta \in \mathbf{R}$, $q > 0$, $p > 1$ は定数である。 $v \equiv u'$ とおくと、方程式 (1) は一階常微分方程式系

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t) \quad (0 \leq t < T_m), & u(0) &= u_0, \\ v'(t) &= |u(t)|^{p-1} u(t) - \delta |v(t)|^{q-1} v(t), & v(0) &= u_1 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。 $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ を

$$f_1(u, v) = v, \quad f_2(u, v) = |u|^{p-1} u - \delta |v|^{q-1} v$$

で定義すると、関数 $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ は、 $\mathbf{R}^2$ 上で、連続であり、とくに $q \geq 1$ のときは C^1 級である。ペアノの存在定理により、方程式系 (2) の C^1 局所解が任意の初期値に対して存在する。したがって、方程式 (1) の C^2 局所解が任意の初期値に対して存在することになる。また、 $q \geq 1$ の場合には、常微分方程式の一般論から、 F の局所リプシッツ連続性により、方程式 (1) の局所解の一意性も保証される。しかし、 $0 < q < 1$ の場合には、 $(u, v) = (0, 0)$ で F の局所リプシッツ連続性が崩れるため、方程式 (1) の初期値 $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ に対する局所解の一意性は保証されない。実際、次のようになっている。

$0 < q < 1$ の場合に、初期値 $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ に対する方程式 (1) の解は、 $\delta \geq 0$ のときには、前方一意性が示せて、 $u(\cdot; 0, 0) \equiv 0$ であり、 $\delta < 0$ のときには、任意の時刻 $t_0 \geq 0$ に自明解 $u \equiv 0$ から分岐する非自明解 $u(\cdot; 0, 0; t_0)$ が存在し、前方一意性は崩れる。後者の場合の非自明解 $u(\cdot; 0, 0; t_0)$ は、 $u(t; 0, 0; t_0) = u(t - t_0; 0, 0; 0)$ ($t \geq t_0$) を満たしている。また、 $\delta < 0$ のとき、任意の解 $u(t)$ が、ある時刻 t_0 で $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 0$ なら、 $u(t) = u'(t) = 0$ ($t \leq t_0$) が成り立つ。

さて、 $T_m \equiv T_m(u_0, u_1)$ で初期値 $u(0) = u_0$, $u'(0) = u_1$ に対する方程式 (1) の前方最大存在時間を表すことにする。ただし、 $0 < q < 1$ かつ $\delta < 0$ 場

合には、上記のように、初期値 $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ に対する方程式 (1) の解に前方一意性がないから、 $T_m(0, 0)$ は、 $u(\cdot; 0, 0; 0)$ の前方最大存在時間を表こととする。これは、方程式 (1) の初期値 $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$ に対する解の最小の前方最大存在時間と一致する。

方程式 (1) と類似の方程式

$$\begin{aligned} u''(t) + \delta |u'(t)|^{q-1} u'(t) &= -|u(t)|^{p-1} u(t) \quad 0 \leq t < T_m, \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

の解の挙動は、 $\delta > 0$, $q, p > 1$ の場合について、Souplet [4] に詳しく述べられていて、殆どの初期値 (u_0, u_1) に対して、解 u は有限時間で爆発することが知られている。また、この場合には、方程式の形から簡単にわかるように、後方 (t が負の向き) へは大域解が必ず存在する ([6] 等参照)。

一方、方程式 (1) の解の挙動については、非線形波動方程式等の偏微分方程式の解の挙動との関連から、Li-Zhou [5], Souplet [2] 等で調べられていて、 $p > q$ のとき、 $u_0 \cdot u_1 > 0$ なる初期値に対しては、解 u が有限時間で爆発することが知られている。しかし、[4] における方程式 (3) の場合のような任意の初期値に対する挙動についての研究は見あたらないように思う。Asakawa-Ikehata [1] では、Souplet [2] 等の解の爆発の結果を用いて、 $q = 1$ の場合に次を示した。

定理 1 $q = 1$ とする。 $h(0) = 0$ なる狭義単調減少関数 $h \equiv h(\cdot; \delta, p, 1) \in C(\mathbf{R})$ があって、次のことが成り立つ。

(1) $u_1 = h(u_0)$ のとき、 $T_m = +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t, u_0, u_1) = 0;$$

(2) $u_1 > h(u_0)$ のとき、 $T_m < +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = +\infty;$$

(3) $u_1 < h(u_0)$ のとき、 $T_m < +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = -\infty.$$

$\tilde{u}(t) \equiv u(-t)$ とおく。 u が方程式 (1) の解なら、 $\tilde{u}(t)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{u}''(t) - \delta |\tilde{u}'(t)|^{q-1} \tilde{u}'(t) &= |\tilde{u}(t)|^{p-1} \tilde{u}(t), \\ \tilde{u}(0) &= u_0, \quad \tilde{u}'(0) = -u_1 \end{aligned} \quad (4)$$

の解である。このことを考慮に入れた上で、 $q = 1$ の場合を微分方程式系 (2) の方でみれば、定理 1 から以下のことがわかる。 uv -相平面を考えると、 $(u, v) = (0, 0)$ は、 $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : v = h(u; \delta, p, 1)\}$ を”安定多様体”， $\{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : v = -h(u; -\delta, p, 1)\}$ を”不安定多様体”とする”鞍点”のようなものである。時間 t を正の方向へは、”安定多様体”上を通過して $(0, 0)$ に漸近するもの以外の解は、すべて有限時間で爆発する。また、時間 t を負の方向へは、”不安定多様体”上を通過して $(0, 0)$ に漸近するもの以外の解は、すべて有限時間で爆発する。

ここで、報告するのは、 $q \neq 1$ の場合にも同様のことが成り立つことである。

定理 2 . $0 < q < \min\{2, p\}$ とする。 $h(0) = 0$ なる狭義単調減少関数 $h \equiv h(\cdot; \delta, p, q) \in C(\mathbf{R})$ があって、次のことが成り立つ。

(1) $u_1 = h(u_0)$ のとき、 $T_m = +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t, u_0, u_1) = 0.$$

$0 < q < 1$ かつ $\delta > 0$ の場合には、 $T_0 \equiv T_0(u_0, u_1) \geq 0$ があって、 $u(T_0, u_0, u_1) = u'(T_0, u_0, u_1) = 0$ となる。

(2) $u_1 > h(u_0)$ のとき、 $T_m < +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = +\infty;$$

(3) $u_1 < h(u_0)$ のとき、 $T_m < +\infty$ であり、

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = -\infty.$$

指数 q に関する条件は、 $0 < q < p$ にまで緩められるものと思われるが、技術的な問題があって、今のところ、 $0 < q < \min\{2, p\}$ でしかできていない。

$q \geq 1$ の場合には、方程式系 (2) の $(u, v) = (0, 0)$ における線形化方程式

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = DF(0, 0) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

を考えることができる。

$$DF(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p|u|^{p-1} & -\delta q|v|^{q-1} \end{pmatrix} \quad (6)$$

であるから、行列 $DF(0, 0)$ は、 $q = 1$ の場合、 $q \geq 1$ の場合に、それぞれ、

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる. このとき, 行列 $DF(0, 0)$ の固有値は $q = 1$ の場合が $0, -\delta$ であり, $q \geq 1$ の場合が $0, 0$ であって, いずれの場合も $(0, 0)$ は, 線形化方程式 (5) の鞍点にはなっていない. これは, 方程式系 (2) の解の挙動が, $(u, v) = (0, 0)$ の近辺においてさえも $(u, v) = (0, 0)$ での線形化方程式の解の挙動からの遺伝によるものではないことを意味している.

定理 2 の証明のあらまし

一意性等の煩雑さを避けるため, $1 \leq q < \min\{2, p\}$ の場合について, 定理 2 の証明の道筋をざっと述べることにする. 基本的な線は, $q = 1$ の場合と同じであるから, 詳しくは, [1] を参照して頂きたい. $\delta = 0$ の場合は, 直接計算により容易にでるから省略する. $\delta > 0$ と $\delta < 0$ の場合に分けて考えるのであるが, どちらの場合でも殆ど同じであるから, $\delta > 0$ の場合のみについて述べることにする.

以下では, $\delta > 0, p > 1, 1 \leq q < \min\{2, p\}$ を仮定することにする.

補題 1 v と w が, $C^1[0, T)$ に属する関数で, $v', w' \in AC_{loc}[0, T)$ であり,

$$\begin{aligned} v''(t) - w''(t) &+ \delta(|v'(t)|^{q-1}v'(t) - |w'(t)|^{q-1}w'(t)) \\ &\geq |v(t)|^{p-1}v(t) - |w(t)|^{p-1}w(t), \quad a.e. \ t \in (0, T) \\ v(0) &\geq w(0), \quad v'(0) > w'(0) \end{aligned}$$

を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned} v'(t) - w'(t) &> 0 \quad (0 < T) \\ v(t) - w(t) &> 0 \quad (0 < t < T) \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 2 (*Souplet [2]*) $u_0 > 0$ かつ $u_1 > 0$ とすると, $T_m < +\infty$ であり, $t \in (0, T_m)$ に対して, $u(t) > 0, u'(t) > 0$ が成り立つ.

補題 1 は, 背理法を用いれば単純な計算よりでる. また, 補題 2 の結論が, $u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, u_0^2 + u_1^2 \neq 0$ の場合にも成り立つことが簡単にわかる. このとき, さらに,

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = +\infty$$

が成り立つことが, 等式

$$e(t) + \delta \int_0^t |u'(s)|^{q+1} ds = e(0) \quad (8)$$

よりでる。ここで,

$$e(t) = \frac{1}{2}u'(t)^2 - \frac{1}{p+1}|u(t)|^{p+1}$$

である。方程式 (1) の対称性から

$$u(\cdot, -u_0, -u_1) = -u(\cdot, u_0, u_1), \quad T_m(-u_0, -u_1) = T_m(u_0, u_1).$$

であることに注意すれば, $u_0 \leq 0, u_1 \leq 0, u_0^2 + u_1^2 \neq 0$ の場合にも, $T_m < +\infty$ であり, $t \in (0, T_m)$ に対して, $u(t) < 0, u'(t) < 0$ と

$$\lim_{t \rightarrow T_m} u(t, u_0, u_1) = \lim_{t \rightarrow T_m} u'(t, u_0, u_1) = -\infty$$

が成り立つことがわかる。これで, $u_0 \cdot u_1 \geq 0$ の場合の挙動がわかった。

補題 3 $t \in [0, T_m)$ に対して, $u(t) > 0, u'(t) < 0$ であれば, $T_m = +\infty$ であり, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0$. が成り立つ

補題 3 の証明 : 方程式 (1) より,

$$u''(t) = |u(t)|^{p-1}u(t) - \delta |u'(t)|^{q-1}u'(t) > 0 \quad (9)$$

であるから, u' は単調増加であり, $u'(t) < 0$ より, u は単調減少である。したがって,

$$0 < u(t) \leq u_0, \quad 0 > u'(t) > u_1 \quad (0 \leq t < T_m)$$

であり, $T_m = +\infty$ がわかる。 $\lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) < 0$ なら, 十分大なる t に対して $u(t) < 0$ となり, また, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) > 0$ なら, (9) 式より, 十分大なる t に対して $u'(t) > 0$ となるから, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u'(t) = 0$ でなければならない。 ■

$u_0 > 0$ に対して,

$$A(u_0) = \{u_1 \in (-\infty, 0) \mid u(t) > 0, u'(t) > 0 \text{ 十分大なる } t\},$$

$$B(u_0) = \{u_1 \in (-\infty, 0) \mid u(t) < 0, u'(t) < 0 \text{ 十分大なる } t\}.$$

と定義する。ただし, $u(t) = u(t; u_0, u_1), u'(t) = u'(t; u_0, u_1)$ である。

補題 4 $u_0 > 0$ とするとき, 次のことが成り立つ。

(1) $A(u_0), B(u_0)$ は空でない $(-\infty, 0)$ の開集合であり, $A(u_0) \cap B(u_0) = \emptyset$.

(2) $u_1 \in A(u_0)$ かつ $0 > r > u_1$ なら $r \in A(u_0)$.

(3) $u_1 \in B(u_0)$ かつ $u_1 > r$ なら $r \in B(u_0)$.

補題 4 は, 上で述べた補題 1 - 3 と常微分方程式の一般論からの帰結である. 証明の議論は単純であるが長くなるので, $B(u_0)$ が空でないことを示すときに, 条件 $q < \min\{2, p\}$ が必要となることを注意するだけに留める.

補題 4 より, $u_0 > 0$ のとき,

$$0 > \inf A(u_0) \geq \sup B(u_0) > -\infty$$

がわかるが, 補題 1 を使うと,

$$\inf A(u_0) = \sup B(u_0) (\equiv k(u_0))$$

を示すことができる. この k を用いて,

$$h(u_0) = \begin{cases} k(u_0) & (u_0 > 0), \\ 0 & (u_0 = 0), \\ -k(-u_0) & (u_0 < 0), \end{cases}$$

と定義すると, 補題 2, 3 より, h は所望の狭義単調減少関数であることがわかり, 一件落着となる.

- [1] H. Asakawa, R. Ikehata, Behavior of Solutions for the Liénard Equation with Blow-up Terms, preprint
- [2] P. Souplet, *Nonexistence of global solutions to some differential inequalities of the second order and applications*, Portugal. Math. 52 (1995) 289–299.
- [3] P. Souplet, *Existence of exceptional growing-up solutions for a class of non-linear second order ordinary differential equations*, Asymptotic Anal. 11 (1995) 185–207.
- [4] P. Souplet, *Critical exponents, special large-time behavior and oscillatory blow-up in nonlinear ODE's*, Differential Integral Equations 11 (1998) 147–167.
- [5] T. T. Li, Y. Zhou *Breakdown of solutions to $\square u + u_t = |u|^{1+\alpha}$* , Discrete Contin. Dynam. Systems 1 (1995), 503–520.
- [6] L. A. Peletier, J. Serrin, H. Zou, *Ground states of a quasilinear equation*, Differential Integral Equations 7 (1994), 1063–1082.