

# 学 位 審 査 報 告 書

|                                                                                        |                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| ( ふ り が な )<br>氏 名                                                                     | さいごう はやと<br>西郷 甲矢人                       |
| 学位 (専攻分野)                                                                              | 博 士 ( 理 学 )                              |
| 学 位 記 番 号                                                                              | 理 博 第 号                                  |
| 学位授与の日付                                                                                | 平成 年 月 日                                 |
| 学位授与の要件                                                                                | 学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当                  |
| 研 究 科 ・ 専 攻                                                                            | 理学研究科 数学・数理解析 専攻                         |
| (学位論文題目)<br><br>From Combinatorics to Noncommutative<br>Probability<br>(組合せ論から非可換確率論へ) |                                          |
| 論 文 調 査 委 員                                                                            | (主査) 小 嶋 泉 准教授<br>中 島 啓 教授<br>山 田 道 夫 教授 |

( 続紙 1 )

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                     |    |        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|----|--------|
| 京都大学                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 博士 (理学)                                                             | 氏名 | 西郷 甲矢人 |
| 論文題目                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | From Combinatorics to Noncommutative Probability<br>(組合せ論から非可換確率論へ) |    |        |
| (論文内容の要旨)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                     |    |        |
| <p>確率論の数学的展開は、Kolmogorov による公理化以降、測度空間 <math>\Omega</math> の <math>\sigma</math>-algebra <math>F</math> とその上に定義された確率測度 <math>\mu</math> から成る確率空間 <math>(\Omega, F, \mu)</math> を標準的枠組としてなされてきたが、可換ノルム環 <math>A</math> に対する Gel'fand 表現, <math>A \simeq L^\infty(\Omega, \mu)</math> (<math>\Omega \simeq \text{Spec}(A)</math>), を考慮すると、確率変数が非可換な場合にも <math>*</math>-環 <math>M</math> とその上の期待値汎関数 <math>\phi</math> の対 <math>(M, \phi)</math> [ : これを「代数的確率空間」と呼ぶ ] を考えることで、確率論の重要な諸概念・諸帰結のかなりのものが非可換状況に一般化され得る。こういう視点から確率論と量子論との概念的統合を図る研究が、「非可換確率論」または「量子確率論」と呼ばれて展開されてきた。その中で特に著しい結果は、統計的独立性の概念の非可換拡張は一意ではなく、同じ特徴づけで定まる「可換独立性」以外に、「自由独立性」、「単調独立性」、「ブール独立性」の3種の独立性概念が存在して、本質的にこの4つで尽くされ、各々に特徴的な「中心極限定理」の成立が明らかにされたことである。</p> <p>「自由独立性」に基づく「自由確率論」が、自由群の群環および「ランダム行列論」との深いつながりで注目され、「ブール独立性」がフェルミ統計との関連で研究されるのに対して、「単調独立性」は、確率変数 <math>X</math> の確率変数 <math>Y</math> に対する単調独立性が <math>Y</math> の <math>X</math> に対する独立性を帰結しないという意味で「非対称性」を特徴とするために、当該理論誕生の2002年来、「単調中心極限定理」の成立機構、その本質は、永らく明らかになっていなかった。</p> <p>学位申請者の西郷甲矢人氏による単著論文 ("A simple proof for monotone CLT") および同氏と長谷部高広氏との共著論文 ("The monotone cumulants") では、この問題に対して、前者において得られた組合せ論的機構に基づく証明の大幅な簡略化に引き続き、G. C. Rota が可換環的文脈で展開した "umbral calculus" を非可換領域に持ち込み上記組合せ論的方法との有機的結合を図ることを通じて、単調独立性にも適用可能な形で「キュムラント (cumulants)」概念の定義を一般化することに成功した。それを用いて得られた自然な証明は、「単調中心極限定理」の仕組みとその本質を解明する課題に正面から応えたものである。</p> <p>この研究によって得られた成果は、"umbral calculus" に基づく「キュムラント (cumulants)」概念の一般化が「単調独立性」と「単調中心極限定理」との論理的関係を明らかにするというだけに留まるものではなく、一般化キュムラントとモーメントとの間の組合せ論的關係 (モーメント・キュムラント公式) を発見すると共に、"umbral calculus" における "dot product" の概念を有効に用いることで、一般化キュムラントの一意性と存在に関する定理をも確立している。</p> <p>提出された thesis 形式の学位請求論文は、非可換確率論の基本的骨格の解明に引き続いて、以上の業績を詳述するものである。</p> |                                                                     |    |        |

(論文審査の結果の要旨)

直接目で見ることのできない微視的量子世界の動力学・構造を、測定過程を通じて目に見える測定データに変換しようとするとき、不可欠の役割を果たすのは、Born の統計公式に基づく確率解釈であり、その意味で、非可換環で記述された物理量を持った量子論は、確率論を不可欠の理論的前提として成立する科学理論である。他方、物理量全体から成る環が可換積の構造を持てば、それは Kolmogorov による確率論の公理系を満たすから、確率論は数学理論としての量子論の特殊ケースであるとも見なせる。非可換確率論（または、量子確率論）は、量子論と確率論のこの微妙な論理的関係を数学的構造それ自身のうちに内包するものとして、概念的・認識論的には微視的世界の量子性と巨視的世界の古典性を橋渡しする上で、きわめて重要な役割を担うべき領域である。

しかし、独自の科学分野として自律的研究が行われるようになって未だ日が浅いため、自由群およびランダム行列論とのつながりを通じて大きく発展した自由確率論の分野を別にすると、非可換確率論には多く未開拓の領域が残され、理論の展開はきわめて不均等な形で行われている。そのような中で申請者は独自の視点から、特に未展開な状況に取り残されていた単調確率論の領域とその重要性に着目してきた。

そこで、従来扱われていたのとは大きく異なる斬新な形で組合せ論的手法を導入し、単調独立性の証明を大幅に簡略化しただけでなく、更に、全く関係を想定されていなかった G.C.Rota の “umbral calculus” の概念・方法を当該分野に持ち込むことによってキュムラント概念の一般化に成功し、それを用いて、単調独立性から単調中心極限定理に至る道筋を透明化した。ここでは、キュムラントは独立同分布に従う確率変数  $N$  個の総和の期待値において、個数  $N$  に比例する項の係数として一意的普遍的に同定され、単調独立性に特徴的な非対称性は困難なくキュムラントに引き継がれて、その非可換性の特徴をあらわに保つ。

このような戦略の立て方、問題の解き方は、申請者の圏論的素養に基づく代数構造、幾何構造への洞察を背景とするもので、一見、無縁に見える領域、方法、概念を深い考察に基づいて結びつける申請者の力量の具体的顕れであり、今後そのような視角から非可換確率論が有力な数学的・数理物理学的分野として大きな発展を遂げることが期待される。

以上のように、本申請論文は、深い独創性と広い視野に立って有望な概念・方法を用い、未開拓の領域に新たな展望を切り拓いた研究として、高く評価すべき内容を備え、理学博士の学位論文として十分価値あるものと認められる。なお、平成 23 年 1 月 17 日に、主論文・thesis に報告された研究業績を中心としこれに関連した研究分野について口頭試問をおこなった結果、合格と認めた。