

ラテン方阵の個数計算について

東女大・山本幸一
(文理・教)

1. n 次既約ラテン方阵の個数 L_n は $n \leq 9$ が知られている.

$$L_1 = L_2 = L_3 = 1, \quad L_4 = 4, \quad L_5 = 56, \quad L_6 = 9408, \quad L_7 = 1694\ 2080,$$

$$L_8 = 5352\ 8140\ 1856, \quad L_9 = 37\ 7597\ 5709\ 6425\ 8816.$$

非同型のものの個数 L'_n については

$$L'_4 = L'_5 = 2, \quad L'_6 = 22, \quad L'_7 = 563, \quad L'_8 = 167\ 6257$$

が知られている. またラテン方阵の種の数 L''_n については

$$L''_4 = L''_5 = 2, \quad L''_6 = 12, \quad L''_7 = 147.$$

ついでながら L_n について筆者は次の漸近式が成立つのではないかと推測している:

$$n! (n-1)! L_n \sim (n!)^n \exp\left(-\frac{n(9n-13)}{12}\right).$$

さて上の結果のうち L_8 を与える M. B. Wells (J. Comb. Th. vol. 3 (1967), 98-99) 及び L'_8 を与える J. W. Brown (J. Comb. Th. vol. 5 (1968), 177-184) はただ結果を示すだけで詳細は不明である. これらはいわば正反対の立場に立

つもので、M.B. Wells は A. Sade に由来する Hall 矩形による逐次的集計であり、J.W. Brown は置換の指標を規準にとって対象を縮小する。従ってこれらにはまるで共通点がないわけ、それら 2 つの立脚点を統合することが望ましいが、そのためにどのようなことを行ったらいいかという問題を考えた。

2. 簡単に言えば Sade 流の逐次集計に際して、同型性を考慮して計算を精密化することとなるが、Sade の方法の概要をまず説明する。

$r \times n$ ラテン矩形は n 次順列を縦に r 個並べたもので各列には文字の重複が現われないものごとである。今もし各列の中の文字の順序を無視し、各列は

$$\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$$

の部分集合であると考えたときいわゆる Hall 矩形を生ずる。すなわち、 Ω の部分集合 $B_1, B_2, \dots, B_n$ の系 (indexed subsets)

$$\mathcal{F} = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$$

があつて、

$$\#B_i = r \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

であり、しかも任意の $j \in \Omega$ に対して

$$\#\{i; j \in B_i\} = r,$$

すなわち j が丁度 r 個の B に含まれるならば $\mathcal{F}$ を $r \times n$

Hall 矩形と云う。

この際各 B_i の番号をつけかえること、 Ω に置換を施すこと、あるいは関連行列を転置すること、すなわち

$$j \in B_i \iff i \in B_j^*$$

なる性質によって

$$f^* = \{B_1^*, B_2^*, \dots, B_n^*\}$$

を作ること。この3種類の操作によって、 $r \times n$ Hall 矩形の全体に群 $S_n \times S_n \times S_2$ が作用する。この作用の下で分類して Hall 矩形の同値類を得る。同値類の個数を h_r で表わす。

又、各同値類 $\mathcal{L}$ に対して、その中に含まれる Hall 矩形の数を $\lambda(\mathcal{L})$ で表わす。この数は $\mathcal{L}$ に属する Hall 矩形 H の安定群 Q_H を知ることによって

$$\lambda(\mathcal{L}) = \frac{2(n!)^2}{\#Q_H}$$

で与えられる。

3. $r \times n$ ラテン方阵 L に 1 行を追加して $(r+1) \times n$ ラテン方阵を作る方法の数を $\nu(L)$ で表わす。これは L から出来る Hall 矩形に依存し、なおその Hall 矩形 H の属する同値類 $\mathcal{L}$ で決る。この函数を $\nu(\mathcal{L})$ とする。

Hall 矩形 H の余形 (complement)

$$f^* = \{\Omega - B_1, \Omega - B_2, \dots, \Omega - B_n\}$$

の類を $\mathcal{L}^*$ とすれば, $\nu(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}^*$ の中の f^* について, その中から相異代表系 (system of distinct representatives = SDR) を取り出す方法の数に当る. それは又 H^* の関連行列の永久式に等しい.

さて Sade の方法の要点は Hall 矩形 H を $r+1$ 列のものに拡張してえられる $\nu(\mathcal{L})$ 個を, $(r+1) \times n$ Hall 矩形の同値類ごとに分類して, 対応する個数が $m_{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$ 個であるとし,

$k_r \times k_{r+1}$ 次行列

$$M_{r,r+1} = (m_{\mathcal{L}, \mathcal{L}})$$

を求めるところにある. たとえば, その行和

$$\sum_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}, \mathcal{L}}$$

は, $\mathcal{L}$ 自身の $\nu(\mathcal{L})$ を与えている.

一方拡張のし方を表わす上の函数 $\nu(\mathcal{L})$ は, Erdős-Kaplan-sky 及び著者の方法で $\mathcal{L}$ の内部構造から決定されて具体的な公式もある. 詳細は煩雑なのでここには述べないことにする. 要するに Sade の流儀は Erdős-Kaplan-sky らうラテン拡大の個数計算を, 同値類ごとに細分して, その積み重ね (つまり行列の積) として L_n を決定しようとするものである.

4. 基本的な行列 $M_{r,r+1}$ が求められたとすれば

$$P_r = M_{0,1} M_{1,2} \cdots M_{r-1,r}$$

は, その成分が $\mathcal{L}$ に属する $r \times n$ ラテン方阵の個数を示す.

$$Q_r = M_{r,r+1} \cdots M_{n-1,n}$$

については、その $\mathcal{L}$ 成分が $\mathcal{L}$ の中のラテン矩形をラテン方阵に拡張する方法の数を示す。ゆえに今

$$\Delta_r = \text{diag}\{\lambda(\mathcal{L})\}$$

とあげば対称関係

$$(1) \quad P_r = {}^t(\Delta_r Q_{n-r}) = {}^t Q_{n-r} \Delta_r$$

が成立つ。同様に i 基本的行列 $M_{r,r+1}$ についても

$$(2) \quad \Delta_{r+1} M_{n-r-1, n-r} = {}^t(\Delta_r M_{r,r+1}) = {}^t M_{r,r+1} \Delta_r$$

が成立している。

5. 7 次の場合. $r=2$ といは $p_r=4$. 4 つの類を Sade のよ
うに A, B, C, D と命名する. 表 1.

$\mathcal{L}$	$\mathcal{Q}_H$	$\# \mathcal{Q}_H$	$\lambda(\mathcal{L})$
$A = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{smallmatrix}$	$D_{12} \times D_{34} \times D_{567}$	192	105/4
$C = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{smallmatrix}$	$D_{123} \times D_{4567}$	48	105
$B = \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 3 \end{smallmatrix}$	$D_{12} \times D_{34567}$	40	126
$D = \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{smallmatrix}$	$D_{1234567}$	14	360

$r=3$ といふ $k_3=14$, Sade の名称を流用する, 但し I 以外.

$$X = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 6 & 7 & 7 \end{array} \quad [S_{123}] \times (S_{123}) \times S_{4567} \quad 864 \quad 35/6$$

$$I = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad SL(3, 2) \quad 168 \quad 30$$

$$J = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{array} \quad [12], [67], (12), (67), \\ (16)(27)[16][27][34] \quad 32 \quad 315/2$$

$$\blacksquare K = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad S_{345} \times \{(12), (67), \\ (16)(27)[15][26][37]\} \quad 48 \blacksquare \quad 210$$

$$P = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad [12], (67), \\ (12)[34], (45)[67] \quad 16 \quad 315$$

$$U = \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{array} \quad D_{1234567} \quad 14 \quad 360$$

$$N = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 5 & 7 & 7 \end{array} \quad (12)(67)[34], (34)[12], \\ (16)(27)[16][27] \quad 8 \quad 630$$

$$Y = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad [12], \\ (12), (56) \quad 8 \quad 630$$

$$W = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 4 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad S_{\frac{2}{7} \frac{3}{6} \frac{4}{5}} \quad 6 \quad 840$$

$$Z = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 7 & 6 & 7 \end{array} \quad (23)(45)[23][45], (67)[67] \quad 4 \quad 1260$$

$$R = \begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (135)(246)[123][567] \quad 3 \quad 1680$$

$$\blacksquare Q = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (12), (45)(67)[23][45][67] \quad 4^{\blacksquare} \quad 2520$$

$$V = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (17)(26)(34)[17][25][36] \quad 2 \quad 2520$$

$$T = \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \end{array} \quad (12)(34)(56)[12][34][56] \quad 2 \quad 2520$$

[説明] K, Q は反転 $f \rightarrow f^*$ によって他のものになる. これを $\blacksquare$ で示した. 他の類は反転により不変である.

安定群はその生成元を示すに止めた. その中で

(イ) $D_{a6 \dots c}$ は $a, b, \dots, c$ を頂点とする正多角形に属する 2 面体群をあらわす.

(ロ) $S_{a6 \dots c}$ は $a, b, \dots, c$ に関する対称群をあらわす.

(ハ) $SL(3, 2)$ は特殊線型群. 位数 168 の単純群である.

(ニ) $(12)(67)[34]$ は文字に置換 $(12)(67)$ を施した結果に於いて列に置換 (34) を施すことを意味する.

$\lambda(\mathcal{L})$ はそれを 5040 で割った商を書いていた.

$r=3$ の 14 個の類の中で I だけがブロッコ・デザインで, I は Sade の方法では現出しない. I は有限射影平面 $PG(2, 2)$ で, その安定群が $SL(3, 2)$ で与えられる.

$$M_{01} = 5040, \quad M_{12} = \begin{matrix} A & C & B & D \\ (210, & 420 & 504 & 720) \end{matrix} \dots 1854$$

表 2

$$M_{23} = \begin{matrix} & X & I & J & K & P & U & N & Y & W & Z & R & Q & V & T \\ \begin{matrix} A \\ C \\ B \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 96 & \cdot & 48 & 96 & 48 & \cdot & \cdot & 192 & 96 \\ 2 & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & 24 & 48 & 24 & \cdot & 48 & 48 & 96 & 144 & 120 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 20 & 20 & 40 & 80 & 40 & 40 & 120 & 80 & 140 \\ \cdot & 2 & 7 & 14 & 21 & 10 & 21 & 28 & 28 & 56 & 84 & 112 & 98 & 98 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 580 \\ 578 \\ 580 \\ 579 \end{matrix}$$

$$M_{34} = \begin{matrix} & X^* & I^* & J^* & K^* & P^* & U^* & N^* & Y^* & W^* & Z^* & R^* & Q^* & V^* & T^* \\ \begin{matrix} X \\ I \\ J \\ K \\ P \\ U \\ N \\ Y \\ W \\ Z \\ R \\ Q \\ V \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 144 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & \cdot & \cdot & 56 & \cdot & 56 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 16 & 32 & 32 & \cdot & \cdot & 32 & 32 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 48 & 48 & 48 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & 24 & 16 & 32 & 16 & 32 & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & 14 & 2 & 14 & 14 & 14 & 14 & 14 & 28 & 28 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 8 & 16 & 8 & 16 & 8 & 16 & 16 & 24 & 32 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & 8 & 8 & 16 & 12 & 4 & 24 & 16 & 24 & 32 & \cdot \\ 1 & 2 & 6 & \cdot & \cdot & 6 & 12 & 9 & 6 & 12 & 10 & 24 & 24 & 36 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 4 & \cdot & 6 & 4 & 4 & 2 & 8 & 16 & 24 & 24 & 24 & 28 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 3 & 3 & 6 & 9 & 5 & 18 & 15 & 24 & 30 & 30 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 12 & 16 & 36 & 24 & 28 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 6 & 12 & 12 & 20 & 24 & 32 & 20 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & 4 & 4 & \cdot & 8 & 8 & 8 & 14 & 20 & 28 & 20 & 28 & \cdot \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 148 \\ 148 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \\ 144 \end{matrix}$$

$$M_{45} = \begin{matrix} & A^* & C^* & B^* & D^* \\ \begin{matrix} X^* \\ I^* \\ J^* \\ K^* \\ P^* \\ U^* \\ N^* \\ Y^* \\ W^* \\ Z^* \\ R^* \\ Q^* \\ V^* \\ T^* \end{matrix} & \begin{pmatrix} 18 & 36 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ \cdot & 16 & \cdot & 16 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 24 \\ 7 & 7 & 7 & 10 \\ \cdot & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & \cdot & 12 & 12 \\ 1 & 4 & 4 & 16 \\ \cdot & 3 & 3 & 18 \\ \cdot & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 6 & 4 & 14 \\ 1 & 5 & 7 & 14 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 54 \\ 24 \\ 32 \\ 24 \\ 24 \\ 31 \\ 24 \\ 30 \\ 27 \\ 25 \\ 24 \\ 26 \\ 26 \\ 27 \end{matrix}$$

$$M_{56} = \begin{matrix} A^* \\ C^* \\ B^* \\ D^* \end{matrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M_{67} = 1.$$

∴

$$M_{01} M_{12} M_{23} M_{34} M_{45} M_{56} M_{67} = 7! \cdot 121 \cdot 9829 \cdot 7600$$

∴

$$L_7 = 1694 \cdot 2080.$$

(表2, 表3の説明は末尾の補足参照)

表3

E	1	1	1
A	210	8	105/4
C	420	4	105
B	504	4	126
D	720	2	360
X	1680	288	35/6
I	1440	48	30
J	1 5120	96	315/2
K	1 0080	48	210
P	1 5120	48	315
U	4 7520	132	360
N	4 5360	72	630
Y	6 0480	96	630
W	8 0640	96	840
Z	9 0720	72	1260
R	10 0800	60	1680
Q	18 1440	72	2520
V	21 1680	84	2520
T	21 1680	84	2520
X*	8 0640	1 3824	35/6
I*	36 8640	1 2288	30

J^*	193 5360	1 2288	315/2
K^*	241 9200	1 1520	210
P^*	362 8800	1 1520	315
U^*	393 9840	1 0944	360
N^*	749 9520	1 1904	630
Y^*	774 1440	1 2288	630
W^*	1032 1920	1 2288	840
Z^*	1403 1360	1 1136	1260
R^*	1903 1040	1 1328	1680
Q^*	2806 2720	1 1136	2520
V^*	2854 6560	1 1328	2520
T^*	2757 8880	1 0944	2520
A^*	1 7418 2400	663 5520	105/4
C^*	6 8705 2800	654 3360	105
B^*	8 3220 4800	660 4800	126
D^*	23 6390 4000	656 6400	360
E^*	121 9829 7600	121 9829 7600	1

これから 8 列 r 行 テン 矩形 の 総数 N_r について

$$N_2 = 1854, \quad N_3 = 107\,3760, \quad N_4 = 15518\,5920,$$

$$N_5 = 40\,5734\,4000. \quad N_2 \text{ 及び } N_3 \text{ は 別 の 方 法 で も 求 め ら れ$$

るが N_4, N_5 を 与 える 一般 公式 は 知 ら れ て い な い.

6. Sade の方法はどのように枚舉の立場からは大そう有効であるが、同型決定にはこのままでは使えない。その理由は $r \times n$ ラテン矩形 L の拡大である $(r+1) \times n$ ラテン矩形 $\tilde{L}$ があった時、それぞれをまず Hall 矩形 $H, \tilde{H}$ で置き換えるのはいいとしても、その後で H と $\tilde{H}$ とを別別に、“大まき群” $\mathcal{Q}$ の下で処理してしまうところに問題がある。同型関係については $\tilde{H}$ と H との相対関係が基本的だから、 $\tilde{H}$ を類別する群としては $\mathcal{Q}$ の代りに H の安定群 $\mathcal{Q}_H$ を使う必要がある。だから $\tilde{H}$ と同値な拡大の個数は $m_{\mathcal{Q}, \mathcal{D}}$ の構成する一部分にある所の

$$\# \mathcal{Q}_H / \# (\mathcal{Q}_H \cap \mathcal{Q}_{\tilde{H}})$$

でなければならぬ。このように $M_{r,r+1}$ を構成する $m_{\mathcal{Q}, \mathcal{D}}$ を用いて $\mathcal{Q}_H$ の下で細分することが先か必要である。一例をあげれば $M_{2,3}$ における $m_{\mathcal{D}, \mathcal{U}}$ は $=10$ であるが、 $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{U}}$ とともに 2 面体群 D_4 と同型で、この 2 つの 2 面体群の入り組み方によって $10 = 7 + 1 + 1 + 1$ のように 4 個の小類に分割する。そしてその計算は安定群の位数が $m_{\mathcal{Q}, \mathcal{D}}$ に比べて小さい所では決山の小類が生ずるため面倒になる。筆者も実のところまだこの分割を完了してはいないが、近いうちに実行したいものと考えている。

なお $n=8$ の場合、 $r_2=6, R_2=35$ で、それらの安定群もすでに決定されている。しかし r_4 は目下筆者には未知であるが、

恐らく 300 程度と思われる。このさい現われる $M_{r,r+1}$ は最大 35×300 程度の行列で、電子計算機によれば近づけない計算ではないと思われる。

文献

A. Sade : Énumération des carrés Latins. Application au 7^e ordre. Conjecture pour les ordres supérieurs, Marseille 1948.

K. Yamamoto : On the number of Latin rectangles, Sci. Rep. Tokyo Woman's Christian College, No. 7-11 (1968), pp. 86-97.

補足 (表 2 の) H^* は H の余形 (§3) を表わす。むしろ $\lambda(H^*) = \lambda(H)$ である。

²
~~分類表~~ は電子計算機に実行させたものである。

行列 P_r, Q_r の成分 ^{を表3} ~~を~~ に記す。第 1 列は各類に含まれるラテン矩形の数を $7!$ で割ったもの、第 2 列は各類の中の一つの Hall 矩形の中に含まれるラテン矩形の数をあらわす。