

The Plancherel formula for $Sp(n, \mathbb{R})$

職業訓練大 佐野 茂

§§ 1 非退化連続主系列

§ 1-1 G を連結で中心有限, acceptable な実半単純 Lie 群とする。 $\mathfrak{g}$ をその Lie 環, θ を $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution とする。 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を θ に対応する Cartan 分解, K を部分環 $\mathfrak{k}$ に対応する極大コンパクト群とする。今, $P=MAN$ を Langlands 分解された cuspidal Parabolic 部分群とする。 θ -不変な Cartan 部分環 $\mathfrak{h}$ が存在して $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a} = \text{LA}(A)$) となる。 H を $\mathfrak{h}$ に対応する Cartan 部分群とする, $B=H \cap K$ とおくと, B は M のコンパクト Cartan 部分群となる。 ω を M の 2 乗可積分な既約ユニタリ表現, ν を $\mathfrak{a}$ 上の純虚数値をとる正則な線形形式とする。

$\omega \otimes \nu$ を自然に P の表現に拡張して, G の表現

$$\pi(\omega, \nu) = \text{Ind}_{P \uparrow G} \omega \otimes \nu$$

を定義する。既約ユニタリ表現となり, G の非退化連続主系列表現という。 $\Theta(\omega, \nu)$ をその指標とする。 $\Theta(\omega, \nu)$ は G 上局所可

積分関数で G' (G の正則な元全体) 上では実解析関数となる。

この論文では群 $G_n \cong Sp(n, 1R)$ を取りあつかうが、まず $\mathcal{H}(\omega, \nu)$ を G_n 上で明確に与える。次に各 Cartan 部分群上の Radon 変換の性質と、 $\mathcal{H}(\omega, \nu)$ を構成する基本的単位となる関数を調べ、各単位ごとに Parseval 公式を用いる事により G_n 上の Plancherel 公式を得る。

$$\S 1-2 \quad H_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \quad I_n = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$$

($I_n, 0_n$ は次数 n の単位行列, 零行列) とおく。群 $Sp(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, 1R)$ は

$$Sp(n, \mathbb{C}) = \{ g \in GL(2n, \mathbb{C}) ; {}^t g H_n g = H_n \}$$

$$Sp(n, 1R) = \{ g \in GL(2n, 1R) ; {}^t g H_n g = H_n \}$$

と定義される。 $Sp(n, 1R)$ は $Sp(n, \mathbb{C})$ の実形式である。ここでは $Sp(n, 1R)$ と同型な次の群を考える。

$$G_n = \{ g \in Sp(n, \mathbb{C}) ; g^* I_n g = I_n \} \quad (g^* = {}^t \bar{g})$$

以下 $G = G_n$, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする。 θ を $X = I_n X I_n (X \in \mathfrak{g})$ で定義される $\mathfrak{g}$ 上の Cartan involution, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を対応する Cartan 分解とする。

k, l, m を $k+2l+m=n$ を満足する負でない整数とする。次の θ -不変な Cartan 部分群の集合 $\{H^{k,l}, 0 \leq k, l, k+2l \leq n\}$ は G の自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。

$H^{k,l} = H_+^{k,l} H_-^{k,l}$, 部分群 $H_+^{k,l}$, $H_-^{k,l}$ は次の元全体からなる。

$$H_+^{k,l}; h_+ = \text{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_k}; e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_l}, e^{-i\theta_l}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n; e^{-i\varphi_1}, e^{-i\varphi_2}, \dots, e^{-i\varphi_k}; e^{-i\theta_1}, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{-i\theta_l}, e^{i\theta_l}; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

$$(\varphi_p, \theta_q \in \mathbb{R}, \varepsilon_r = \pm 1)$$

$$H_-^{k,l}; h_- = \begin{pmatrix} 1_k & & 0_k \\ & \text{cht}_{1,2} & \\ & \vdots & \\ & \text{cht}_{l,2} & \\ & \text{cht}_1 & \\ & \vdots & \\ & \text{cht}_m & \\ 0_k & & 1_k \\ & \text{sht}_{1,2} & \\ & \vdots & \\ & \text{sht}_{l,2} & \\ & \text{sht}_1 & \\ & \vdots & \\ & \text{sht}_m & \end{pmatrix} \quad \text{但し, } j_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\tau_q, t_r \in \mathbb{R})$$

$h = h_+ h_- \in H^{k,l}$ の固有値は $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n; \delta_1', \delta_2', \dots, \delta_n')$

$$\begin{cases} \delta_p = e^{i\varphi_p} & (1 \leq p \leq k) \\ \delta_{k+2q-1} = e^{i\varphi_q}, \delta_{k+2q} = e^{-i\varphi_q} & (1 \leq q \leq l) \\ \delta_{k+2l+r} = \varepsilon_r e^{i\tau_r} & (1 \leq r \leq m) \end{cases} \quad \mathbb{Z}_q = \tau_q + i\varphi_q$$

で与えられる。 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ を h の座標にとる。そして

$$\Delta^{k,l}(h) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\delta_p + \delta_q') - (\delta_q + \delta_p') \prod_{1 \leq p \leq n} (\delta_p - \delta_p')$$

$$\Delta_R^{k,l}(h) = \prod_{1 \leq p \leq l} (1 - e^{-2i\varphi_p}) \prod_{1 \leq p \leq m} (1 - e^{-2i\tau_p}) \prod_{1 \leq p < q \leq m} (1 - \varepsilon_p \varepsilon_q e^{-i\tau_p - i\tau_q}) (1 - \varepsilon_p \varepsilon_q e^{-i\tau_p + i\tau_q})$$

$$\varepsilon_R(h) = \text{sgn} \Delta_R^{k,l}(h)$$

とおく。 δ_j に対応する微分作用素を x_j とする。すなわち,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi_p} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial \varphi_p} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbb{Z}_q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_q} + \frac{\partial}{\partial \theta_q} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbb{Z}}_q} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_q} - \frac{\partial}{\partial \theta_q} \right), \frac{\partial}{\partial \theta_q} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial \theta_q} \\ \frac{\partial}{\partial t_r} \end{cases}$$

である。多項式

$$L(y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (y_p + y_q)(y_p - y_q) \prod_{1 \leq p \leq n} y_p$$

において, $H^{k,l}$ 上の微分作用素を

$$L^{k,l}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (x_p + x_q)(x_p - x_q) \prod_{1 \leq p \leq n} x_p$$

で与える。又, $H^{k,l}$ の連結成分 $H_p^{k,l}$ ($0 \leq p \leq m$) を

$$H_p^{k,l} = \{h \in H^{k,l}; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_p = 1, \varepsilon_{p+1} = \varepsilon_{p+2} = \dots = \varepsilon_m = -1\}$$

とすると, G の自己同型で互いに共役とならない極大系列となる。さらに

$$F_p^{k,l} = \{h \in H_p^{k,l}; \tau_r > 0 \ (1 \leq r \leq l), t_1 > t_2 > \dots > t_p > 0, t_{p+1} > t_{p+2} > \dots > t_m > 0\}$$

とおく。

Notation 次の関数を定義する。

$$(1,1) \quad l_1, l_2, \dots, l_p \quad \text{負でない整数} \quad d_1 = e^{i\varphi_1}, d_2 = e^{i\varphi_2}, \dots, d_p = e^{i\varphi_p} \quad (\varphi_i \in \mathbb{R})$$

$$l_1, l_2, \dots, l_p \geq 0 \quad \nu_i = \pm 1, \quad 1 \leq i \leq p$$

$$\xi_p(d_1, d_2, \dots, d_p; \nu_1 l_1, \nu_2 l_2, \dots, \nu_p l_p) = \det(\nu_i d_i^{\nu_j l_j})_{1 \leq i, j \leq p} \\ = |\nu_1 d_1^{\nu_1 l_1}, \nu_2 d_2^{\nu_2 l_2}, \dots, \nu_p d_p^{\nu_p l_p}| d_1^{-l_1} d_2^{-l_2} \dots d_p^{-l_p}$$

$${}^+ \xi_p(\quad) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_p} \xi_p(\quad)$$

$$(1,2) \quad l_1, l_2 \geq 0, \quad \nu_1, \nu_2 = \pm 1, \quad d_1 = e^z, \quad d_2 = e^{\bar{z}}$$

$$\zeta_2(d_1, d_2; \nu_1 l_1, \nu_2 l_2) = \begin{vmatrix} -d_1^{-l_1} & -\nu_1 \nu_2 d_1^{-\nu_1 \nu_2 l_2} \\ -d_2^{-l_1} & -\nu_1 \nu_2 d_2^{-\nu_1 \nu_2 l_2} \end{vmatrix}$$

$${}^+ \zeta_2(\quad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \zeta_2(\quad)$$

$$(1,3) \quad l_1, l_2 \geq 0, \quad \nu_1, \nu_2 = \pm 1, \quad d_1 = \varepsilon e^{t_1}, \quad d_2 = \varepsilon e^{t_2}$$

$$\zeta_2(d_1, d_2; \nu_1 l_1, \nu_2 l_2) = \begin{vmatrix} -d_1^{-l_1} & -d_1^{-l_2} \\ -d_2^{-l_1} & -\nu_1 \nu_2 (d_2^{-l_2} + d_2^{l_2}) + d_2^{l_2} \end{vmatrix}$$

$${}^+ \zeta_2(\quad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \zeta_2(\quad)$$

$$(1,4) \quad l_1, l_2 \geq 0, \quad \nu_1, \nu_2 = \pm 1, \quad d_1 = \varepsilon e^{t_1}, \quad d_2 = -\varepsilon e^{t_2}$$

$$\chi(d_1, d_2; \nu_1 l_1, \nu_2 l_2) = \begin{vmatrix} -d_1^{-l_1} & -d_1^{-l_2} \\ -d_2^{-l_1} & -d_2^{-l_2} \end{vmatrix}$$

$${}^+ \chi(\quad) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \chi(\quad)$$

$$l_1 \geq 0, \nu_1 = \pm 1, d_1 = \varepsilon e^{t_1}$$

$$\chi(d_1, \nu_1 l_1) = -d_1^{-l_1}$$

$${}^+ \chi(\quad) = \sum_{\nu_1} \chi(\quad)$$

$$(2,1) \quad \lambda = \frac{m + \sqrt{1}\xi}{2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{m - \sqrt{1}\xi}{2}, \quad d_1 = e^z, \quad d_2 = e^{\bar{z}} \quad (z = \tau + \sqrt{1}\theta \quad \tau, \theta \in \mathbb{R})$$

$$m \geq 0 \text{ 整数}, \xi \in \mathbb{R}$$

$$H_2(d_1, d_2; \lambda, \bar{\lambda}) = (e^{Fim\theta} - e^{-Fim\theta})(e^{F\xi\tau} + e^{-F\xi\tau})$$

$$(2,2)$$

$$Z_2(d_1, d_2; \lambda, \bar{\lambda}) = 2 \begin{vmatrix} e^{\lambda t_1} & e^{\lambda t_2} + e^{-\lambda t_2} \\ -e^{-\lambda t_1} & -e^{-\lambda t_2} + e^{\lambda t_2} \end{vmatrix} \varepsilon^{\lambda + \bar{\lambda}}$$

$$(3,1) \quad \lambda_j = (\varepsilon_j, \rho_j) \quad \varepsilon_j = 0, 1, \quad \rho_j \in \mathbb{R} \quad 1 \leq j \leq p$$

$$d_j = \varepsilon_j e^{t_j} \quad (t_j \in \mathbb{R})$$

$$\Xi_p(d_1, d_2, \dots, d_p; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \prod_{j=1}^p (e^{F\rho(\sigma) t_j} + e^{-F\rho(\sigma) t_j}) \varepsilon_j^{\varepsilon(\sigma)}$$

(S_p, p 次対称群)

$k, l, m (k+2l+m=n)$ 固定する。 $k'+2l' \leq k+2l, k \leq k', 0 \leq j \leq m' (k'+2l'+m'=n)$ をみたす

k', l', m', j をとってくる。さらに $0 \leq p \leq l'$ を満足する p をとる。

整数を成分とする順序付けられた集合を次の様に定義する。

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_{k'}) \quad a_1 < a_2 < \dots < a_{k'}$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_p)$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_p) \quad b_i < c_i \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$J = \lfloor j/2 \rfloor, \quad I = \lfloor (k-k'-2p-j)/2 \rfloor \quad \text{Max}(j-m, 0) \leq j' \leq \text{Min}(j, m'-m)$$

$$\begin{cases} P=(p_1, p_2, \dots, p_{J+I}) \\ Q=(q_1, q_2, \dots, q_{J+I}) \end{cases} \quad p_i < q_i$$

$r < s$ r は $2J=j'-1$ のとき整数を, $2J=j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わすとする。 s は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を, $2I=k-k'-2p-j'$ のときは空集合 $\emptyset$ を表わす。

$\bar{A}$ は集合 $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ を表わすとする。

$$\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{P} \cup \bar{Q} \cup \{r, s\} = \{1, 2, \dots, k\}$$

整数を成分とする順序付けられた集合 D, F を次の様に定義する。

$$\begin{cases} D=(d_1, d_2, \dots, d_q) \\ F=(f_1, f_2, \dots, f_{\ell-q}) \end{cases}$$

$$\bar{D} \cup \bar{F} = \{k+1, k+3, \dots, K+2\ell-1\}$$

まとめて

$$2\mathcal{U}=(A, B, C, P, Q, r, s, D, F)$$

$$\text{sgn } 2\mathcal{U} = \text{sgn}(A, B \cdot C, P \cdot Q, r, s) \quad \text{但し, } B \cdot C = (b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_p, c_p)$$

とおく。

さらに $q = \ell' - p$ とする。

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$$

$$B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q) \quad \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_q$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \{1, 2, \dots, \ell'\}$$

$$W_j = (w_1, w_2, \dots, w_{k-k'-2p})$$

$$w_1 < w_2 < \dots < w_{k-k'-2p}$$

$$\begin{aligned} \{w_1, w_2, \dots, w_{j'}\} &\subset \{k'+2\ell'+1, k'+2\ell'+2, \dots, k'+2\ell'+j'\} \\ \{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \dots, w_{k-k'-2p}\} &\subset \{k'+2\ell'+j'+1, k'+2\ell'+j'+2, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$U_j = (u_1, u_2, \dots, u_{J+I})$$

$$V_j = (v_1, v_2, \dots, v_{J+I})$$

$$v_1 < v_2 < \dots < v_{J+I}$$

$$u_i < v_i \quad (1 \leq i \leq J+I)$$

ここで w は $2J=j'-1$ のとき整数を, $2J=j'$ のときは ϕ を表わすと
する。 x は $2I=k-k'-2p-j'-1$ のとき整数を, $2I=k-k'-2p-j'$ のときは
 ϕ を表わす。

$$\begin{aligned} \{u_i, v_i (1 \leq i \leq J), w\} &= \{w_1, w_2, \dots, w_{j'}\} \\ \{u_i, v_i (J+1 \leq i \leq J+I), x\} &= \{w_{j'+1}, w_{j'+2}, \dots, w_{k-k'-2p}\} \\ \#\{u_i, v_i (1 \leq i \leq J), w\} &= j' \\ \#\{u_i, v_i (J+1 \leq i \leq J+I), x\} &= k-k'-2p-j' \end{aligned}$$

$$\bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{l-g}) \quad \bar{b}_1 < \bar{b}_2 < \dots < \bar{b}_{l-g}$$

$$\begin{aligned} b_l &= (b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+g}) \quad b_l < b_{l+1} < \dots < b_{l+g} \\ \{b_l, b_{l+1}\} &\subset \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \dots, k'+2l'+j\} \\ \text{又は } \{b_l, b_{l+1}\} &\subset \{k'+2l'+j+1, k'+2l'+j+2, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

$$\bar{\alpha}_j \cup \bar{\alpha}_j' \cup \{w, x\} \cup \bar{b} \cup b_l \cup \bar{\alpha} = \{k'+2l'+1, k'+2l'+2, \dots, n\}$$

まとめて $\mathcal{U}_j' = (A, B, W_j, U_j, V_j, w, x, \bar{b}, b_l, \bar{\alpha})$ とおく

以上の準備の下に,

$F_j^{k,l'}$ 上の関数を次の様に定義する $h \in F_j^{k,l'} (\subset H_j^{k,l'})$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_j^{k,l'}(h) &\stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{k(k+1)/2} \sum_{\mathcal{U}_j} \text{sgn} \mathcal{U}_j \sum_{\text{Max}\{j-m, 0\} \leq l \leq \text{Min}\{j, m-m\}} \sum_{\mathcal{U}_j'} \\ &\quad \xi_{k'}(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_{k'}; \lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_{a_{k'}}) \prod_{1 \leq l \leq p} Z_2(\bar{\sigma}_{k+2al-1}, \bar{\sigma}_{k+2al}; \lambda_{b_l}, \lambda_{c_l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\prod_{1 \leq l \leq J+I} Z_2(\bar{\sigma}_{u_l}, \bar{\sigma}_{v_l}; \lambda_{p_l}, \lambda_{q_l}) \chi(\bar{\sigma}_w, \bar{\sigma}_x; \lambda_r, \lambda_s) \prod_{1 \leq l \leq g} H_2(\bar{\sigma}_{k+2al-1}, \bar{\sigma}_{k+2al}; \lambda_{d_l}, \lambda_{d_l+1}) \\ &\prod_{1 \leq l \leq l-g} Z_2(\bar{\sigma}_{b_l}, \bar{\sigma}_{b_{l+1}}; \lambda_{f_l}, \lambda_{f_{l+1}}) \prod_{1 \leq l \leq m} Z_2(\bar{\sigma}_{\alpha_l}, \bar{\sigma}_{\alpha_{l+1}}; \lambda_{g_l}, \lambda_{g_{l+1}}) \end{aligned}$$

$$\prod_{1 \leq l \leq m'} (-1)^{k'l'} \sum_l^{m'+k'+1-l} \prod_{1 \leq l \leq k-k-2p} (-1)^{k(k-k'-2p)} \sum_{wl-k'-2l'}^{k-2p+1-l} \prod_{1 \leq l \leq l-g} \sum_{vl-k'-2l'}$$

但し, $p+q=l$

$$\begin{cases} \delta_l = e^{\sqrt{-1} \varphi_l} & 1 \leq l \leq k \\ \delta_{k+2l-1} = e^{\bar{z}^l}, \quad \delta_{k+2l} = e^{\bar{z}^l} & 1 \leq l \leq l \\ \delta_{k+2l+l} = \varepsilon_l e^{t_i} & 1 \leq l \leq m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_i = \nu_i l_l, \quad \nu_i = \pm 1 & 1 \leq l \leq k \\ \lambda_{k+2l-1} = (m_l, \sqrt{-1} \xi_l), \lambda_{k+2l} = (m_l, -\sqrt{-1} \xi_l) & 1 \leq l \leq l \\ \lambda_{k+2l+l} = (\varepsilon_l, \sqrt{-1} p_l) & 1 \leq l \leq m \end{cases}$$

定理1 $G' = \bigcup_{x \in G} \bigcup_{k+2l+m=n} \bigcup_{0 \leq p \leq m} U(F_p^{k,l})' x'$ が成立するから, $g \in G'$ と共役な元を $hg \in (F_p^{k,l})'$ で表わすことにする。このとき G 上の関数を

$$\textcircled{H}(\omega(\nu_1 l_1, \dots, \nu_k l_k; m_1, \dots, m_l; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \nu(\xi_1, \dots, \xi_l; p_1, \dots, p_m)) (g)$$

$$= \begin{cases} \frac{\tilde{K}_+^{k,l'}(hg)}{\Delta^{k,l'}(hg)} & hg \in (F_+^{k,l'})', \quad \begin{matrix} 0 \leq k' \leq k, 0 \leq l' \\ k+2l' \leq k+2l \end{matrix} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。不変固有超関数となる。特に $l_1 > l_2 > \dots > l_k > 0$, $m_1 > 0, m_2 > 0, \dots, m_l > 0$, $\xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \dots, \xi_l > 0, p_1 > p_2 > \dots > p_m > 0$ の場合既約ユニタリ表現, 非退化連続主系列の指標を表わす。 $l, m=0$ のときは離散系列, $k, l=0$ のときは連続系列の指標となる $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ に関する和を

$${}^+ \textcircled{H}(\omega(\nu_1 l_1, \dots, \nu_k l_k; m_1, \dots, m_l; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \nu(\xi_1, \dots, \xi_l; p_1, \dots, p_m)) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k}$$

$$\textcircled{H}(\omega(\nu_1 l_1, \dots, \nu_k l_k; m_1, \dots, m_l; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m), \nu(\xi_1, \dots, \xi_l; p_1, \dots, p_m))$$

とおく。

§2. Fourier 変換

Notation §1-2 で与えた Notation に対応して次の関数を定義する。

$$(1,1) \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_p \geq 0$$

$${}^+_p \zeta'_p(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p; l_1, l_2, \dots, l_p) = \sum_{\sigma \in S_p} (\sigma_1^{l_1} + \sigma_1^{-l_1}) (\sigma_2^{l_2} + \sigma_2^{-l_2}) \dots (\sigma_p^{l_p} + \sigma_p^{-l_p})$$

$$(1,2)$$

$${}^+_2 \zeta'_2(\sigma_1, \sigma_2; l_1, l_2) = \begin{vmatrix} \sigma_1^{-l_1} & 2(\sigma_1^{l_2} + \sigma_1^{-l_2}) \\ -\sigma_2^{-l_1} & 2(\sigma_2^{l_2} + \sigma_2^{-l_2}) \end{vmatrix}$$

$$(1,3)$$

$${}^+_3 \zeta'_3(\sigma_1, \sigma_2; l_1, l_2) = 4 \begin{vmatrix} \sigma_1^{-l_1} & \sigma_1^{-l_2} \\ -\sigma_2^{-l_1} & \sigma_2^{-l_2} \end{vmatrix}$$

$$(1,4)$$

$${}^+_X(\sigma_1, \sigma_2; l_1, l_2) = 4 \begin{vmatrix} \sigma_1^{-l_1} & \sigma_1^{-l_2} \\ -\sigma_2^{-l_1} & \sigma_2^{-l_2} \end{vmatrix}$$

$${}^+_X(\sigma_1, l_1) = 2\sigma_1^{-l_1}$$

$$(2,1)$$

$$H_2(\sigma_1, \sigma_2; \lambda, \bar{\lambda}) = (e^{-\sqrt{F}m\theta} + e^{\sqrt{F}m\theta})(e^{\sqrt{F}\xi\tau} - e^{-\sqrt{F}\xi\tau})$$

$$(2,2)$$

$$\begin{aligned} Z'_2(\sigma_1, \sigma_2; \lambda, \bar{\lambda}) &= 2e(-m\frac{t_1-t_2}{2}) \left\{ e(F\xi\frac{t_1+t_2}{2}) - e(-F\xi\frac{t_1+t_2}{2}) \right\} \varepsilon^m \\ &\quad - 2e(-m\frac{t_1+t_2}{2}) \left\{ e(F\xi\frac{t_1-t_2}{2}) - e(-F\xi\frac{t_1-t_2}{2}) \right\} \varepsilon^m \\ &\quad (e(x) = e^x \text{ で表わした}) \end{aligned}$$

$$(3,1)$$

$$\square'_p(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn} \sigma \prod_{j=1}^p (e^{\sqrt{F}\lambda_j \sigma_j} - e^{-\sqrt{F}\lambda_j \sigma_j}) \varepsilon_j^{(\sigma_j)}$$

さらに, Fourier 変換に関係して次の関数を定義する。

(Notation に歴史をもたせておいた)

(1,2)

$${}^+\hat{z}'_2(m, \xi) = \begin{cases} \frac{\coth \pi \xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_0 \\ \frac{\tanh \pi \xi/2}{4\sqrt{-1}} & m \in \mathbb{Z}_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{Z}_0 = 2\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}_1 = 2\mathbb{Z} + 1 \end{matrix}$$

そして ${}^+\hat{z}'_2(\xi; \mathbb{Z}_p) = {}^+\hat{z}'_2(m, \xi) \quad m \in \mathbb{Z}_p \quad (p=0,1)$
 とおく

(1,3)

$${}^+\hat{z}'_2(p, \varepsilon; p_2, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{8} \{ 2 \coth \pi p_2 \coth \pi (p+p_2) - 1 \} & \varepsilon = 1 \\ \frac{1}{4} \coth \pi p_2 \operatorname{cosech} \pi (p+p_2) & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

(1,4)

$${}^+\hat{x}'(p, \varepsilon; p_2, -\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \coth \pi p, \operatorname{cosech} \pi p_2 & \varepsilon = 1 \\ -\frac{1}{4} \operatorname{cosech} \pi p, \coth \pi p_2 & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

$${}^+\hat{x}'(p, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{\coth \pi p}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon = 1 \\ \frac{\operatorname{cosech} \pi p}{2\sqrt{-1}} & \varepsilon = -1 \end{cases}$$

とおく

$${}^+\hat{x}'(p, \varepsilon; p_2, -\varepsilon) = {}^+\hat{x}'(p, \varepsilon) {}^+\hat{x}'(p_2, -\varepsilon) \quad \text{が成立.}$$

(2,2)

$$\hat{z}'_2(\xi; \varepsilon; \mathbb{Z}_0) = \frac{\coth \frac{\pi \eta}{2}}{4\sqrt{-1}}$$

$$\hat{z}'_2(\xi; \varepsilon; \mathbb{Z}_1) = \frac{\tanh \frac{\pi \eta}{2}}{4\sqrt{-1}} \varepsilon$$

 $\{l_1, l_2, \dots, l_p\}$ 上の変換群

$$W_p \left\{ \begin{array}{l} l_1, l_2, \dots, l_p \text{ の permutation} \\ l_j \rightarrow -l_j \text{ transformation} \end{array} \right\} \text{より生成される} \quad (1 \leq j \leq p)$$

とし, $l_1, l_2, \dots, l_p$ のパラメータをもつ関数 f に対して, 和を次の様に定義する.

$$\sum_{S_g(l_1, l_2, \dots, l_p) > 0} f(l_1, l_2, \dots, l_p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_p > 0} \frac{1}{|W(l_1, l_2, \dots, l_p)|} f(l_1, l_2, \dots, l_p)$$

$$\text{但し, } W(l_1, l_2, \dots, l_p) = \{w \in W_p; w(l_1, l_2, \dots, l_p) = (l_1, l_2, \dots, l_p)\}$$

すなわち, 等号の数を g とすると

$$|W(l_1, l_2, \dots, l_p)| = 2^g \cdot g.$$

補題 2.1 $F \in C_0(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C}^+) \cap C^1(\mathbb{C}^-)$ ($\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{C}^+$ 上半平面, $\mathbb{C}^-$ 下半平面)

$F(e^z) = -F(e^{\bar{z}})$ を満たすとする.

$$\sum_{S_g(l_1, l_2) > 0} \int_{\substack{\tau > 0 \\ \theta \in [-\pi, \pi]}} F(e^z) {}^+ \hat{\gamma}'_2(e^z, e^{\bar{z}}; l_1, l_2) d\theta d\tau \quad (z = \tau + i\theta)$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi) {}^+ \hat{\gamma}'_2(m, \xi) d\xi$$

$$= \sum_{p=0,1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_p} \int_{\xi \in \mathbb{R}} \hat{F}(m, \xi) {}^+ \hat{\gamma}'_2(\xi, \mathbb{Z}_p) d\xi \quad \text{が成立}$$

$$\text{但し, } \hat{F}(m, \xi) = \int_{\substack{\tau \in \mathbb{R} \\ \theta \in [-\pi, \pi]}} F(\theta, \tau) e^{F(\xi\tau + m\theta)} d\theta d\tau$$

補題 2.2 $F \in C_0(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\})$ は次の対称性を満足するものとする.

$$F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) = -F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) = -F(\xi e^{t_2}, \xi e^{t_1})$$

$$\sum_{\substack{Sg(l_1, l_2 > 0) \\ t_1, t_2 > 0}} \int F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) {}^+\chi'_2(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}; l_1, l_2) dt_1 dt_2$$

$$= \int_{p_1, p_2 \in \mathbb{R}} \hat{F}(p_1, \xi; p_2, \xi) {}^+\hat{\chi}'_2(p_1, \xi; p_2, \xi) dp_1 dp_2$$

が成立。但し, $\hat{F}(p_1, \xi; p_2, \xi) = \int_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) e^{i\Gamma(p_1 t_1 + p_2 t_2)} dt_1 dt_2$

補題 2.3 (1) $F \in C_0'(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\xi e^{t_1}, -\xi e^{t_2}) = -F(\xi e^{t_1}, -\xi e^{t_2}) = -F(\xi e^{t_1}, -\xi e^{-t_2}) = F(-\xi e^{t_2}, \xi e^{t_1})$$

$$\sum_{\substack{Sg(l_1, l_2 > 0) \\ t_1, t_2 > 0}} \int F(\xi e^{t_1}, -\xi e^{t_2}) {}^+\chi'_2(\xi e^{t_1}, -\xi e^{t_2}; l_1, l_2) dt_1 dt_2$$

$$= \int_{p_1, p_2 \in \mathbb{R}} \hat{F}(p_1, \xi; p_2, -\xi) {}^+\hat{\chi}'_2(p_1, \xi; p_2, -\xi) dp_1 dp_2$$

が成立

(2) $F \in C_0'(\mathbb{R}^*)$ は次の対称性を満足するものとする。

$$F(\xi, e^{t_1}) = -F(\xi, e^{-t_1})$$

$$\sum_{\substack{Sg(l_1 > 0) \\ t_1 > 0}} \int F(\xi e^{t_1}) {}^+\chi'_1(\xi e^{t_1}; l_1) dt_1$$

$$= \int_{p_1 \in \mathbb{R}} \hat{F}(p_1, \xi) {}^+\hat{\chi}'_1(p_1, \xi) dp_1$$

が成立。

補題 2.4 $F \in C_0(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*)$ 補題 2.2 の対称性を満たすとする。

$$\sum_{\substack{S_g(m>0) \\ m \in \mathbb{Z}_p}} \int_{t_1 > t_2 > 0} F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) Z'_2(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}; \lambda_1, \lambda_2) dt_1 dt_2$$

$$= \int_{\eta \in \mathbb{R}} \hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta + \xi)}{2}, \xi; \frac{\sqrt{-1}(-\eta + \xi)}{2}, \xi\right) \hat{Z}'_2(\eta; \xi; \mathbb{Z}_p) d\eta \quad (P=0.1)$$

が成立。但し、 $\hat{F}\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta + \xi)}{2}, \xi; \frac{\sqrt{-1}(-\eta + \xi)}{2}, \xi\right) = \int_{t_1, t_2 \in \mathbb{R}} F(\xi e^{t_1}, \xi e^{t_2}) e^{\left(\frac{\sqrt{-1}(\eta + \xi)}{2} t_1 + \frac{\sqrt{-1}(-\eta + \xi)}{2} t_2\right)} dt_1 dt_2$

補題 2.5 $F \in C_0(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C}^*) \cap C^1(\mathbb{C})$ 補題 2.1 の対称性を満たすとする。

$$\sum_{\substack{S_g(m>0) \\ \theta \in [-\pi, \pi] \\ \tau > 0}} \int F(e^z) H'_2(e^z, e^{\bar{z}}; \lambda_1, \lambda_2) d\theta d\tau$$

$$= \hat{F}(m, \xi) \quad \text{が成立。}$$

§ 3 Plancherel 公式

dq を G 上の正規化された Haar 測度, $H^{k,l}$ 上の Haar 測度を

$$d^{k,l}h = d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_k d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_l dt_1 dt_2 \dots dt_l dt_1 dt_2 \dots dt_m$$

で定義する。 $d^{k,l}\tilde{g}$ を $G/H^{k,l}$ 上の左不変測度で $dq = d^{k,l}\tilde{g} d^{k,l}h$

を満足するものとする。 $f \in C_0^\infty(G)$ に対して $(H^{k,l})$ 上の関数

$$K_f^{k,l}(h) = E_R^{k,l}(h) \operatorname{conj} \Delta^{k,l}(h) \int_{G/H^{k,l}} f(g h g^{-1}) d^{k,l} \tilde{g} \quad (h \in (H^{k,l})')$$

を定義すると

$$\int_G f(g) dg = \sum_{k,l} \alpha^{k,l} \int_{(H^{k,l})'} K_f^{k,l}(h) E_R^{k,l}(h) \Delta^{k,l}(h) d^{k,l} h$$

$$\alpha^{k,l} = 1/|W(G, H^{k,l})|$$

が成立。

補題 3.1 $f \in C_0^\infty(G)$ に対して, $\left(c = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{p=0}^n (n-p)!}{2^{1/2} (n+1) n(n+1)^{1/2}}, \varrho = \frac{1}{2}n(3n+2) \right)$ を

とる) $L^{n,0} K_f^{n,0}(e) = (-1)^\varrho c f(e)$ (e は G の単位元) が成立。

$\oplus$ を G 上の不変固有超関数とする。 G 上解析関数 $\oplus(g)$ が存在

して

$$(\oplus, f) = \int_{G'} f(g) \oplus(g) dg \quad (f \in C_0^\infty(G))$$

となる。

$$K_f^{k,l}(h) = E_R^{k,l}(h) \Delta^{k,l}(h) \oplus(h) \quad (h \in (H^{k,l})')$$

とおくと

$$\int_G f(g) \oplus(g) dg = \sum_{k,l} \alpha^{k,l} \int_{(H^{k,l})'} K_f^{k,l}(h) K^{k,l}(h) dh$$

が成立。

補題 3.2 $f \in C_0^\infty(G)$ に対して次式が成立

$$\sum_{k,l} \alpha^{k,l} \int_{(H^{k,l})'} L^{k,l} K_f^{k,l}(h) L^{k,l} K^{k,l}(h) d^{k,l} h = (-1)^{\varrho} L(\mu)^2 (\oplus, f)$$

ここで μ は $\oplus$ の無限小指標によって決まる線形形式 (T. Hirai [2] 参照), $L(\mu)$ は k, l によらず一定。

補題 3.3 $f \in C_0^\infty(G)$ に対して

$$\sum_{k,l} \alpha^{k,l} \int_{(H^{k,l})'} L^{k,l} K_f^{k,l}(h) {}^{k,l}K'(h) dh = L(\mu)(\oplus, f)$$

但し, ${}^{k,l}K' = L^{k,l}(\mu^{k,l})^{-1} L^{k,l} K^{k,l}$, この式は前の補題 3.2 より無限小指標が正則の時成立するが, 正則でない場合にも成立する。

定理 2 $f \in C_0^\infty(G)$ に対して次式が成立

$$f(e) = \sum_{\substack{0 \leq k,l \\ k+2l+m=n}} c(k,l) \sum_{\substack{l_1 > l_2 > \dots > l_k > 0 \\ m_1 > 0 \dots m_l > 0 \\ \epsilon_1, \dots, \epsilon_m = 0,1}} \left| L(l_1, l_2, \dots, l_k, \frac{m_1 + \sqrt{-1}\xi_1}{2}, \frac{m_1 - \sqrt{-1}\xi_1}{2}, \dots, \frac{m_l + \sqrt{-1}\xi_l}{2}, \frac{m_l - \sqrt{-1}\xi_l}{2}, \right. \\ \left. \sqrt{-1}\rho_1, \sqrt{-1}\rho_2, \dots, \sqrt{-1}\rho_m) \right| \\ \xi_1 > 0, \dots, \xi_l > 0 \\ \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_m > 0$$

$$\prod_{0 \leq p \leq l} \vartheta(\xi_p; m_p - 1) \prod_{1 \leq p < q \leq m} \vartheta(\rho_p + \rho_q; \epsilon_p + \epsilon_q) \vartheta(\rho_p - \rho_q; \epsilon_p - \epsilon_q)$$

$$\prod_{0 \leq p \leq m} \vartheta(\rho_p; k + \epsilon_p) ({}^+(\oplus)(\omega(l_1, \dots, l_k, m_1, \dots, m_l, \epsilon_1, \dots, \epsilon_m), \nu(\xi_1, \dots, \xi_l, \rho_1, \dots, \rho_m)), f) \\ d\xi_1, d\xi_2, \dots, d\xi_l d\rho_1, d\rho_2, \dots, d\rho_m$$

但し,

$$\vartheta(\xi; p) = \begin{cases} \tanh \frac{\pi \xi}{2} & p \equiv 0 \pmod{2} \\ \coth \frac{\pi \xi}{2} & p \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

$c(k,l)$ 正の定数。

文 献

- Harish-Chandra ; (1) Discrete series for semisimple Lie groups I, II, Acta math., 113(1965), 241-318; 116(1966), 1-111.
- T. Hirai ; (1) The Plancherel formula for $SU(p, q)$, J. Math. Soc. Japan., 22(1970), 134-179.
- (2) Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II. General theory for semisimple Lie groups, Japan.J.Math., New Ser. 2 (1976), 27-89.
- (3) ----, IV. Explicit forms of the characters of discrete series representations for $Sp(n, R)$, Japan. J. Math., New Ser. 3 (1977), 1-48.
- M. Sugiura ; (1) Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras, J.Math.Soc.Japan, 11(1959) 374-434.