

矩形管内流れの安定性と乱流への遷移

同志社大学・工・足立 高弘 (Takahiro ADACHI)

同志社大学・工・水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

1 はじめに

矩形管路を流れる流れは、円管ポアズイユ流と同様に流体力学の最も基本的な流れである。しかし、これらの流れについての研究はこれまでも数多くなされてきたものの、その乱流遷移機構はあまり明確ではない。矩形管流は、円管ポアズイユ流と流体力学的特性が似ていると言われており、この流れの安定性と乱流遷移を調べることは、有名なレイノルズの実験以来、明らかにされていない円管ポアズイユ流の乱流への遷移を解明する手がかりになると期待される。

矩形管流れの安定性は、断面のアスペクト比 Γ (縦横比) に大きく依存する。アスペクト比 $\Gamma = 1$ の正方形断面の場合、矩形管流の安定性は円形断面を持つ円管ポアズイユ流の安定性と本質的には同じと考えられている。この円管ポアズイユ流の層流から乱流への遷移についての研究は、古くから多くの研究者によってなされてきた。軸対称2次元攪乱に対しては、この流れは常に安定であることが線形安定性解析によって示されている [1]。3次元攪乱に対しては明確な証明が存在せず、円管ポアズイユ流の安定性は未解決のままであるが、現在のところ円管ポアズイユ流は微小攪乱に対して常に安定であり、その線形臨界レイノルズ数は無限大と考えられている [2][3]。

一方、アスペクト比が限りなく大きくなった極限では、流れは二次元ポアズイユ流に近づく。この流れの安定性は、古くから詳しく調べられている。微小攪乱に対する線形安定性は Thomas[4] や Orszag[5] により調べられ、有限の臨界レイノルズ数 $Re_c = 5772.22$ を持つことが知られている。また、弱非線形安定性理論から、この流れは臨界点を含む広い領域で亜臨界分岐が生じるが、中立曲線に沿う下分枝上では超臨界分岐を起こすことが示されている [6][7]。

さて、Tatsumi & Yoshimura[8] (以下 TY と記す) は、矩形管流の線形安定性をアスペクト比が $1 < \Gamma < 10$ の場合について調べた。彼らは、 $\Gamma > 3.2$ の場合には平面ポアズイユ流における不安定モードの三次元版といえるモードに対して矩形管流は不安定になるが、 $\Gamma < 3.2$ の場合には、矩形管流は微小攪乱に対して常に安定であると報告し、臨界アスペクト比 $\Gamma_c = 3.2$ の存在を示した。同じように、Kerswell & Davey[9] は、楕円断面を持つ直管を通る流れの線形安定性をアスペクト比に対して調べ、臨界アスペクト比 $\Gamma_c = 10.6$ を求めた。このように、矩形断面および楕円断面のいずれの場合にも、臨界アスペクト比の存在が報告されている。

本研究においては、矩形管流れの安定性と乱流への遷移について調べる。矩形管流の線形安定性をいろいろなアスペクト比に対して調べ、弱非線形理論を用いて振幅方程式を導き、線形不安定となった主流の乱流遷移について調べる。

2 基礎方程式

高さ $2H$ 、幅 $2W$ の矩形管路を考える。座標系は図1に示すように、 x 軸を管路の中心軸に沿ってとり、 y 軸および z 軸をそれぞれ、直交する二つの壁面に平行にとる。このとき、流れの場を支配する方程式は、ナビエ・ストークス方程式と連続の式で、それぞれ無次元形で次のようにかける。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

ここで、 Δ はラプラシアンを表し、次式で定義される。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3)$$

流れの場を特徴づける無次元パラメータは、矩形断面のアスペクト比 $\Gamma \equiv H/W$ と次式で表されるレイノルズ数である。

$$Re = \frac{U_0 H}{\nu}. \quad (4)$$

ここで、 U_0 は管路中心での流速、 ν は流体の動粘性係数を表す。(1), (2) 式において、すべての物理量は U_0 , H および ν を用いて無次元化されている。

境界条件は、管路壁面で流体が滑らないことから

$$\mathbf{u} = 0, \text{ at } y = \pm 1 \text{ and } z = \pm \Gamma \quad (5)$$

で与えられる。

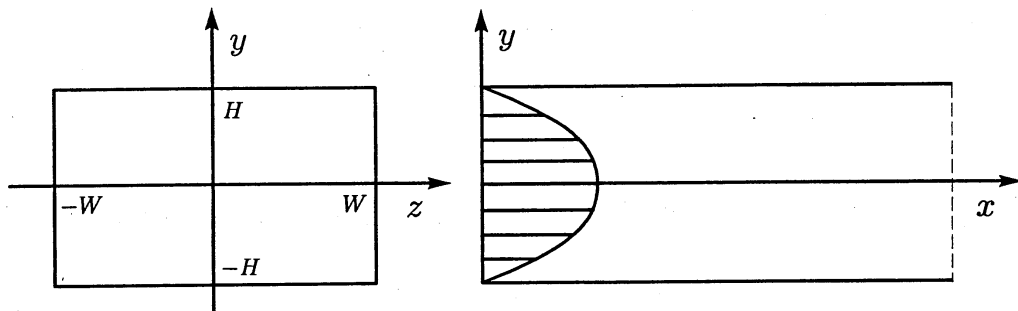


図1 座標系

3 線形安定性

3.1 主流

主流は定常で、流速は管軸に平行かつ軸方向に変化しないものとする、無次元速度および圧力は、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (U(y, z), 0, 0), \quad (6)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) \quad (7)$$

のように表される。これを基礎方程式に代入すると、連続の式は自動的に満たされ、 U および P に対する方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\kappa = \text{const.}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(y, z) = -\kappa Re. \quad (9)$$

ただし、 κ は正の定数で、流れ方向の圧力勾配を表す。境界条件は、

$$U(y, z) = 0, \quad \text{at } y = \pm 1 \text{ and } z = \pm \Gamma \quad (10)$$

となる。

この方程式系は、膜のたわみを表す式と同じであり、矩形にかぎらず三角形など、さまざまな断面について解が求められている。矩形断面の場合、定常流の速度分布は三角関数と双曲線関数を用いて、次のように無限級数の形で表される。

$$U(y, z) = \frac{1 - y^2 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos my \cosh mz / m^3 \cosh m\Gamma}{1 - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n / m^3 \cosh m\Gamma}, \quad (11)$$

$$m = \frac{2n+1}{2} \pi. \quad (12)$$

3.2 主流の線形安定性

式(11), (12)で表される主流の微小攪乱に対する線形安定性を調べる。流れの場合 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ および $p(\mathbf{x}, t)$ を主流 $U(\mathbf{x})$, $P(\mathbf{x})$ と攪乱 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{p}(\mathbf{x}, t)$ の和として

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) + \hat{p}(\mathbf{x}, t) \quad (14)$$

と表す。式(13) および (14) を基礎方程式に代入すると、攪乱 $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{p}$ に対する非線形の攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\mathbf{u}}, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (16)$$

が得られる。さらに、攪乱に関する二次の項を無視すれば、微小攪乱 $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{p}$ に対する線形の攪乱方程式

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (U \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \Delta \hat{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (18)$$

が得られる。

方程式の線形性から、任意の微小攪乱の一つのフーリエモード

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)], \quad (19)$$

$$\hat{p}(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(y, z) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (20)$$

のみに着目する。ここで、 α は攪乱の x 方向の波数を表す。また、 c は一般に複素数 $c = c_r + ic_i$ であり、 c_r は攪乱の位相速度を表し、 αc_i は攪乱の増幅率を表す。主流の安定性は、この c_i の符号によって決定される。すなわち、 $c_i < 0$ ならば攪乱は時間とともに減衰するので主流は安定、 $c_i > 0$ ならば攪乱は増幅するので主流は不安定、 $c_i = 0$ ならば攪乱は減衰も増幅もしないので中立安定である。

攪乱を支配する方程式は、(19)、(20) 式を(17)、(18) に代入し圧力 $\hat{p}$ を消去することにより

$$E(y, z)\tilde{v} = O(y, z)\tilde{w}, \quad (21)$$

$$E(z, y)\tilde{w} = O(z, y)\tilde{v} \quad (22)$$

となる。ただし、 $E(y, z)$ および $O(y, z)$ は線形的作用素で

$$E(y, z) = -\left[\frac{i}{\alpha Re}\Delta + (U - c)\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (23)$$

$$O(y, z) = \left[\frac{i}{\alpha Re}\Delta + (U - c)\right]\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \quad (24)$$

である。境界条件は、連続の式を考慮し

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \pm 1, \quad (25)$$

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \pm \Gamma \quad (26)$$

で与えられる。

方程式(21)、(22) および境界条件(25)、(26) 式を満たす解は、以下に示す y 方向および z 方向に異なる対称性を持つ四つのモードに分けて考えることができる。

$$(I)\text{mode: } (\tilde{v}(e, e), \tilde{w}(o, o)),$$

$$(II)\text{mode: } (\tilde{v}(e, o), \tilde{w}(o, e)),$$

$$(III)\text{mode: } (\tilde{v}(o, e), \tilde{w}(e, o)),$$

$$(IV)\text{mode: } (\tilde{v}(o, o), \tilde{w}(e, e)).$$

ここで、例えば $\tilde{v}(e, e)$ は $\tilde{v}$ が y 方向および z 方向にそれぞれ偶関数であることを表す。この分類は、TY が行ったものと同じであり、この中で最も不安定な攪乱を与えるモードは、(I)mode であることが示されている。したがって、以下では、この (I)mode のみを取り扱うこととする。

3.3 数値計算の方法

数値計算においては、攪乱速度成分 ($\tilde{v}, \tilde{w}$) を直交多項式を用いて展開する。ここでは、計算精度の検証を行うためにルジャンドル多項式を用いた展開とチェビシェフ多項式を用いた展開の二通りを次のように行う。

$$\tilde{v} = \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} a_{mn} F_m(y) G_n(z/\Gamma), \quad (27)$$

$$\tilde{w} = \sum_{m=0}^{2M+1} \sum_{n=0}^{2N+1} b_{mn} G_m(y) F_n(z/\Gamma). \quad (28)$$

ここで、 $F_m(x)$ および $G_m(x)$ は以下に示すように、 m 次のルジャンドル多項式あるいはチェビシェフ多項式 $T_m(x)$ を用いて、あらかじめ境界条件を満たすように作られた関数である。

$$F_m(x) = (1 - x^2)^2 T_m(x), \quad (29)$$

$$G_m(x) = (1 - x^2) T_m(x). \quad (30)$$

これらの展開式を方程式に代入し、ガラーキン法あるいはコロケーション法を用いると、次のような複素位相速度 c に対する行列の固有値問題に帰着される。

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = c\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (31)$$

$$\mathbf{x} = {}^t(a_{00}, \dots, a_{2M+1, 2N+1}; b_{00}, \dots, b_{2M+1, 2N+1}). \quad (32)$$

計算は、(I)mode についてのみ行うので、上述の対称性を考慮に入れると、展開係数の総数は、 $2 \times (M+1) \times (N+1)$ となる。ガラーキン法の積分には、96 点のガウス・ルジャンドル積分を行う。コロケーション法におけるコロケーションポイントは、ルジャンドル多項式およびチェビシェフ多項式のいずれの場合にも、極値を与える点を用いる。

3.4 線形安定性の結果

数値計算の結果を示す前に今回の計算の精度について検証を行う。表 1 にアスペクト比 $\Gamma = 5$, $\alpha = 0.9$, $Re = 10000$ における最大増幅率を持つ固有値 c の展開打ち切りパラメータ M, N 依存性を示す。ガラーキン法では、ルジャンドル多項式を用いてもチェビシェフ多項式を用いても、結果に差はなく収束性も良好である。一方、コロケーション法では、チェビシェフ多項式を用いた場合には、ルジャンドル多項式を用いた場合に比べて収束性が非常に悪く、収束値も他で得られた値と異なる。したがって、以下ではルジャンドル多項式でガラーキン法を用いて計算を行う。

いろいろなアスペクト比 Γ に対する主流の微小攪乱に対する線形安定性を調べる。すなわち、攪乱の増幅率 $\alpha_{c_i} = 0$ となる中立曲線を与えるパラメータの組 (α, Re) を見つける。パラメータの組 (α, Re) の中で、最もレイノルズ数が小さい組が臨界レイノルズ数 Re_c と臨界波数 α_c である。例として、アスペクト比 $\Gamma = 5$ における中立曲線を図 2 に示す。図より、中立曲線は極小値を持ち、その値が $\Gamma = 5$ における臨界レイノルズ数および臨界波数であり、 $Re_c = 10434$, $\alpha_c = 0.908$ となる。

そのほかのアスペクト比に対しても同様にして臨界レイノルズ数を求める。図 3 にアスペクト比 Γ に対する臨界レイノルズ数 Re_c を示す。今回得られた結果を○で、Tatsumi & Yoshimura(TY) の結果を×で示す。表 2 には、臨界レイノルズ数、臨界波数 α_c および臨界点での攪乱の位相速度 c_i を

TY の結果とともに示す。臨界レイノルズ数の値は、TY の値とよく一致しており、図3では今回得られた値と TY の値との区別はつかない。この臨界レイノルズ数を与える攪乱のモードは、壁近傍で最も乱れが大きくなるモードである。これは、二次元ポアズイユ流が不安定となるモードの三次元版と考えられる。このとき、攪乱の位相速度は表2より $c_i \simeq 0.2$ となる。図よりアスペクト比 Γ が減少すると臨界レイノルズ数 Re_c は増加し、TY が示した臨界アスペクト比 $\Gamma_c = 3.2$ に近づくと、 $Re_c \rightarrow \infty$ となることがわかる。ただし、今回の計算結果から得られた臨界アスペクト比は $\Gamma_c = 3.116$ である。また、臨界レイノルズ数 Re_c とアスペクト比 Γ の漸近式は次のようかける。

$$Re_c = \frac{11945}{\Gamma - 3.116} + 5772. \quad (33)$$

ここで、上式は、臨界レイノルズ数 Re_c がアスペクト比 Γ の一次式に反比例すると仮定し、 $\Gamma = 3.4, 3.5$ において臨界レイノルズ数が一致し、アスペクト比 $\Gamma \rightarrow \infty$ において $Re_c \rightarrow 5772$ となることを考慮して求めた。

表1:固有値 $c = c_r + ic_i$ の展開項数 (M, N) 依存性.

コロケーション			ガラーキン	
	ルジャンドル	チェビシェフ	ルジャンドル	チェビシェフ
$M \times N$	$(c_r, c_i \times 10^4)$	$(c_r, c_i \times 10^4)$	$(c_r, c_i \times 10^4)$	$(c_r, c_i \times 10^4)$
18×38	(0.23294,-3.7334)	(0.23306,-5.1145)	(0.23289,-3.3466)	(0.23289,-3.3466)
20×40	(0.23287,-3.3081)	(0.23309,-3.0813)	(0.23288,-3.4248)	(0.23288,-3.4248)
22×42	(0.23289,-3.3317)	(0.23309,-3.3517)	(0.23289,-3.3957)	(0.23289,-3.3957)
24×44	(0.23289,-3.3191)	(0.23163, 3.7698)	(0.23289,-3.4021)	(0.23289,-3.4021)

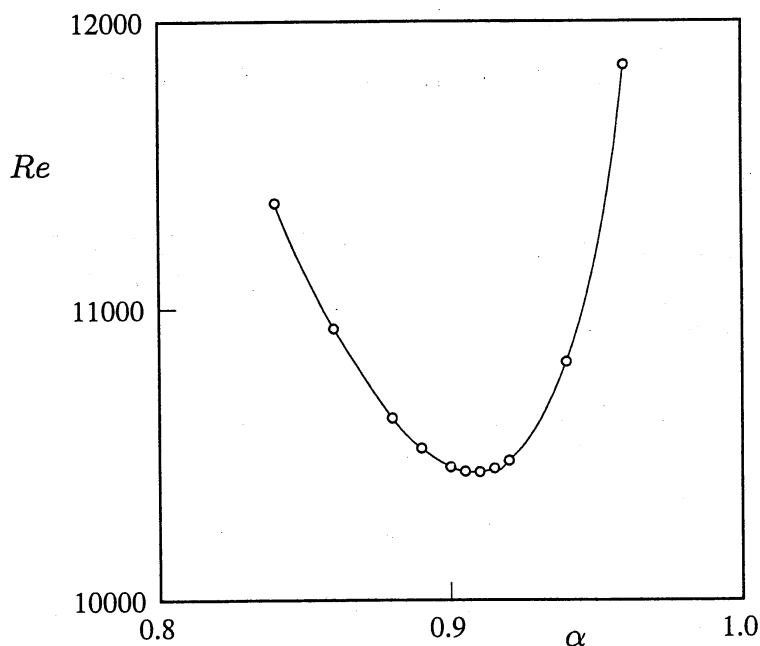


図2 アスペクト比 $\Gamma = 5$ における中立曲線

表2:各アスペクト比における臨界レイノルズ数 Re_c , 臨界波数 α_c と攪乱の位相速度 c_i .

Γ	Re_c	α_c	c_i	$Re_c(TY)$	$\alpha_c(TY)$
3.4	47832	0.669	0.163	—	—
3.5	36866	0.705	0.173	36600	0.71
4.0	18226	0.814	0.204	18400	0.80
5.0	10434	0.908	0.232	10400	0.91

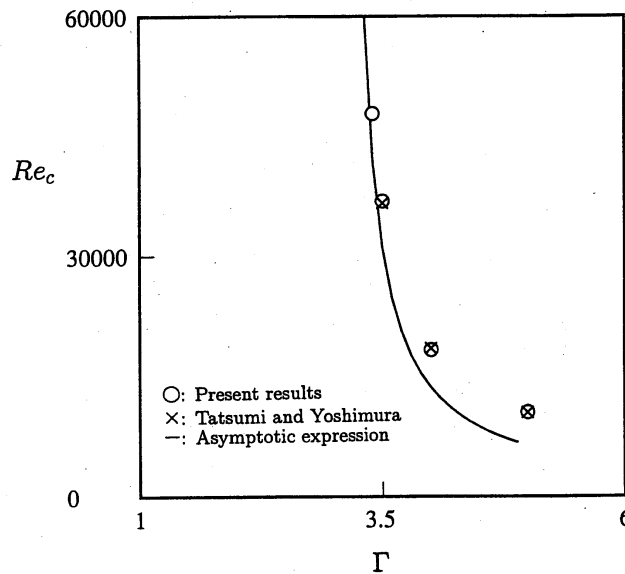


図3 各アスペクト比 Γ に対する臨界レイノルズ数 Re_c

4 弱非線形安定性

線形不安定となった主流の遷移を調べるために、弱非線形安定性を調べる．ここでは、まず攪乱の振幅方程式を導く．流れ方向に波数 α を持つ攪乱に注目し、その高調波を考えて速度と圧力を次のようにフーリエモードに分解する．

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_n \exp[in\alpha x], \quad \mathbf{u}_{-n} = \mathbf{u}_n^*, \quad (34)$$

$$\hat{p} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n \exp[in\alpha x] + P_{00}x, \quad p_{-n} = p_n^*. \quad (35)$$

ここで、* は複素共役を表す．連続の式から速度の x 方向成分 u_n は (v_n, w_n) を用いて次のよう表される．

$$u_n = -\frac{1}{in\alpha} \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{\partial w_n}{\partial z} \right) \text{ for } n \neq 0. \quad (36)$$

このとき、攪乱の方程式を $f_n = {}^t(v_n, w_n)$ で表せば、攪乱方程式 (15), (16) は形式的に以下のようにかける。

$$\frac{\partial}{\partial t} M_n f_n = L_n f_n + \frac{1}{Re} K_n f_n + \sum_k N(f_k, f_{n-k}). \quad (37)$$

ここで、 M_n, L_n, K_n, N は次式で定義される。

$$M_n = \begin{pmatrix} m_1(y) & m_2(y, z) \\ m_2(z, y) & m_1(z) \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} l_1(y, z) & l_2(y, z) \\ l_2(z, y) & l_1(z, y) \end{pmatrix}, \quad K_n = \begin{pmatrix} k_1(y, z) & k_2(y, z) \\ k_2(z, y) & k_1(z, y) \end{pmatrix},$$

$$N(f_k, f_{n-k}) = \begin{pmatrix} -\partial/\partial y N_1(f_k, f_{n-k}) + i n \alpha N_2(f_k, f_{n-k}) \\ -\partial/\partial z N_1(f_k, f_{n-k}) + i n \alpha N_3(f_k, f_{n-k}) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

$$m_1(y) \equiv i n \alpha - \frac{i}{n \alpha} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad m_2(y, z) \equiv -\frac{i}{n \alpha} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \quad (39)$$

$$l_1(y, z) \equiv n^2 \alpha^2 U - U \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad (40)$$

$$l_2(y, z) \equiv -\frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} - U \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}, \quad (41)$$

$$k_1(y, z) \equiv -\frac{i}{n \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \alpha^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - n^2 \alpha^2 \right), \quad (42)$$

$$k_2(y, z) \equiv -\frac{i}{n \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - n^2 \alpha^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \quad (43)$$

$$N_1(f_k, f_{n-k}) \equiv -i(n-k) \alpha u_k u_{n-k} - v_k \frac{\partial u_{n-k}}{\partial y} - w_k \frac{\partial u_{n-k}}{\partial z}, \quad (44)$$

$$N_2(f_k, f_{n-k}) \equiv -i(n-k) \alpha u_k v_{n-k} - v_k \frac{\partial v_{n-k}}{\partial y} - w_k \frac{\partial v_{n-k}}{\partial z}, \quad (45)$$

$$N_3(f_k, f_{n-k}) \equiv -i(n-k) \alpha u_k w_{n-k} - v_k \frac{\partial w_{n-k}}{\partial y} - w_k \frac{\partial w_{n-k}}{\partial z}. \quad (46)$$

ただし、非線形成分 N_1, N_2, N_3 においては、式が複雑になるのを避けるために、 v_n, w_n のみで表すのをやめ u_n をそのまま用いている。

境界条件は

$$v_n = w_n = \frac{\partial v_n}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \pm 1, \quad (47)$$

$$v_n = w_n = \frac{\partial w_n}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = \pm \Gamma \quad (48)$$

となる。ここで、増幅率展開により攪乱の振幅方程式を導く。微小パラメータ ϵ を線形安定性解析から得られた臨界点 Re_c からのずれとして $\epsilon^2 = 1/Re_c - 1/Re$ で定義し、 f_n を ϵ のべきで次のように展開する。

$$f_n = \epsilon^{|n-1|+1} (\phi_{n0} + \epsilon^2 \phi_{n2} + \cdots). \quad (49)$$

また、時間に関して多重尺度法を導入する。すなわち、

$$t_k = \epsilon^{2k} t \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \quad (50)$$

とおく。このとき、時間に関する微分は、以下のようにかける。

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{k=0} \epsilon^{2k} \frac{\partial}{\partial t_k}. \quad (51)$$

式(49)および(50)を方程式(37)に代入し、基本波($n=1$)に着目する。 ϵ^k の各べきを等しいとおき、それぞれのオーダーで方程式を評価すると、 $O(\epsilon)$ で次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M_1 \phi_{10} = L_1 \phi_{10} + \frac{1}{Re_c} K_1 \phi_{10}. \quad (52)$$

ここで、臨界状態においては攪乱の位相速度 c_r を用いて $\partial/\partial t_0 = -i\alpha c_r$ と表される。方程式(52)は、臨界点における主流の線形安定性を支配する(21), (22)式と同じ形であり、その解 ϕ_{10} は、

$$\phi_{10} = A(t_1) g_{10}(y, z) \exp(-i\alpha c_r t_0) \quad (53)$$

とかける。ここで、 $g_{10}(y, z)$ は方程式(21), (22)の固有関数であり、振幅 $A(t_1)$ はゆっくりとした時間スケール t_1 の関数である。また、固有関数 $g_{10}(y, z)$ は、管路中心軸での値 $g_{10}(0, 0)$ を用いて規格化されているものとする。

次に、 $O(\epsilon^3)$ では次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0} M_1 \phi_{12} + \frac{\partial}{\partial t_1} M_1 \phi_{10} &= L_1 \phi_{12} + \frac{1}{Re_c} K_1 \phi_{12} - K_1 \phi_{10} \\ &+ N(\phi_{20}, \phi_{10}^*) + N(\phi_{10}, \phi_{00}) + N(\phi_{00}, \phi_{10}) + N(\phi_{10}^*, \phi_{20}). \end{aligned} \quad (54)$$

方程式(54)に対する可解条件から、振幅 $A(t_1)$ に対する方程式が次式のように得られる。

$$\frac{dA}{dt_1} = \lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A. \quad (55)$$

ここで、

$$\lambda_0 = -\frac{\int \int \tilde{g}_{10} K g_{10}}{\int \int \tilde{g}_{10} M g_{10}}, \quad \lambda_1 = \frac{\int \int \tilde{g}_{10} \{N\}}{\int \int \tilde{g}_{10} M g_{10}} \quad (56)$$

である。関数 $\tilde{g}_{10}(y, z)$ は(52)式に対する随伴方程式を満足する随伴関数であり、次式を満たす。

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \tilde{M} \tilde{g}_{10} = \tilde{L} \tilde{g}_{10} + \frac{1}{Re_c} \tilde{K} \tilde{g}_{10}. \quad (57)$$

ここで、 $\tilde{M}, \tilde{L}, \tilde{K}$ は、以下に示す M_1, L_1, K_1 の随伴作用素を表す。

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= M_1, \quad \tilde{K} = K_1, \\ \tilde{L} &= \begin{pmatrix} \tilde{l}_1(y, z) & \tilde{l}_2(y, z) \\ \tilde{l}_2(z, y) & \tilde{l}_1(z, y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (58)$$

$$\tilde{l}_1(y, z) \equiv \alpha^2 U - U \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (59)$$

$$\tilde{l}_2(y, z) \equiv -U \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (60)$$

方程式(54)の非線形項に現れる ϕ_{20} , ϕ_{00} について考える。これらは、波数 $n = 2$ および $n = 0$ の攪乱を表す。波数 $n = 2$ を持つ攪乱を表す関数 ϕ_{20} が満たすべき方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M_2 \phi_{20} = L_2 \phi_{20} + \frac{1}{Re_c} K_2 \phi_{20} + N(\phi_{10}, \phi_{10}) \quad (61)$$

であり、その解は次式のようにかける。

$$\phi_{20} = A^2 g_{20} \exp(-i2\alpha c_r t_0). \quad (62)$$

波数 $n = 0$ の攪乱を表す ϕ_{00} については、特別な注意が必要である。というのも、(54)式の非線形成分を計算する際に $\phi_{00} = {}^t(v_{00}, w_{00})$ から速度の x 成分 u_{00} を求めることが必要となるが、これを連続の式から求めることができないためである。波数 $n = 0$ の攪乱 $\phi_{00} = {}^t(v_{00}, w_{00})$ を支配する方程式は、 $O(\epsilon^2)$ を考えると、形式的に次式のようにかける。

$$\frac{\partial}{\partial t_0} M_0 \phi_{00} = L_0 \phi_{00} + \frac{1}{Re_c} K_0 \phi_{00} + N_0(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + N_0(\phi_{10}^*, \phi_{10}). \quad (63)$$

ここで、 M_0 , L_0 , K_0 および N_0 は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} M_{00} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial z & -\partial/\partial y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \partial/\partial y & \partial/\partial z \end{pmatrix}, \\ K_{00} &= \begin{pmatrix} \Delta_2 \partial/\partial z & -\Delta_2 \partial/\partial y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N_{00}(f_k, f_{-k}) &= \begin{pmatrix} \partial/\partial z N_2(f_k, f_{-k}) - \partial/\partial y N_3(f_k, f_{-k}) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (64)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (65)$$

また、 $u_0 = \epsilon^2 u_{00}$ とおくと、 u_{00} を支配する方程式は

$$\frac{\partial u_{00}}{\partial t_0} + v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00} + \mathcal{N}(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + \mathcal{N}(\phi_{10}^*, \phi_{10}) + P_{00}, \quad (66)$$

$$\mathcal{N}(f_k, f_{-k}) = ik\alpha u_k u_k^* - v_k \frac{\partial u_k^*}{\partial y} + w_k \frac{\partial u_k^*}{\partial z}$$

となる。ただし、波数 $n = 0$ の場合には $\partial/\partial t_0 = 0$ である。これら波数 $n = 0$ の攪乱は主流の変形を表し、主流の流れ方向変形成分 u_{00} を求める際に、(i) 圧力勾配一定条件と (ii) 流量一定条件とでは得られる結果に違いが生じることが知られている [10]。 (i) 圧力勾配一定条件のときには、流れ方向の圧力勾配が一定であることから、

$$P_{00} \equiv 0 \quad (67)$$

とおくことができ、これより u_{00} についてのポアソン方程式

$$v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00} + \mathcal{N}(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + \mathcal{N}(\phi_{10}^*, \phi_{10}) \quad (68)$$

が得られる。これを解くことにより、圧力勾配一定条件の下での u_{00} が求められる。次に、(ii) 流量一定条件のときには、方程式(69)を満たす解を、次のように表す。

$$u_{00} = u_{00}^{(1)} + P_{00}u_{00}^{(2)}. \quad (69)$$

ここで、 $u_{00}^{(1)}$ および $u_{00}^{(2)}$ は(69)式から、それぞれ次式を満たす。

$$v_{00} \frac{\partial U}{\partial y} + w_{00} \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Re_c} \Delta u_{00}^{(1)} + \mathcal{N}(\phi_{10}, \phi_{10}^*) + \mathcal{N}(\phi_{10}^*, \phi_{10}), \quad (70)$$

$$\frac{1}{Re_c} \Delta u_{00}^{(2)} = -1. \quad (71)$$

さらに、 u_{00} による管路断面での流量を Q_{00} とすると、

$$Q_{00} = \int \int u_{00}^{(1)} dy dz + P_{00} \int \int u_{00}^{(2)} dy dz \quad (72)$$

となる。流量一定条件の下では $Q_{00} \equiv 0$ とすることにより P_{00} が決定され、(69) 式より u_{00} が求められる。このとき、流量一定条件の下では、 $P_{00} \neq 0$ となる解が可能であり、一般に圧力勾配一定条件と流量一定条件は両立しないことがわかる。

さて、ゆっくりとした時間スケール t_1 に対する振幅方程式(55) を、 $t_1 \rightarrow \epsilon^2 t$ および $\epsilon A \rightarrow A$ と $1/Re_c - 1/Re = \epsilon^2$ を用いて、もとの変数で書き換えることにより振幅方程式

$$\frac{dA}{dt} = (1/Re_c - 1/Re)\lambda_0 A + \lambda_1 |A|^2 A \quad (73)$$

が得られる。ここで、 $(1/Re_c - 1/Re)\lambda_0$ は線形増幅率を表す。

この振幅方程式の係数を求めれば、分岐の振る舞いを知ることができる。すなわち、線形増幅率が正の値を持つときに、 $\text{Re}[\lambda_1] < 0$ ならば図4 (a)に示すように超臨界分岐、 $\text{Re}[\lambda_1] > 0$ ならば図4 (b)に示すように亜臨界分岐が結論できる。Kao & Park[11]の実験によると、アスペクト比 $\Gamma = 8$ の場合には、線形安定性から得られる臨界値よりも小さなレイノルズ数において主流は不安定になる。このことから、 $\Gamma = 8$ においては、図4 (b)のような亜臨界分岐が生じていると考えられる。

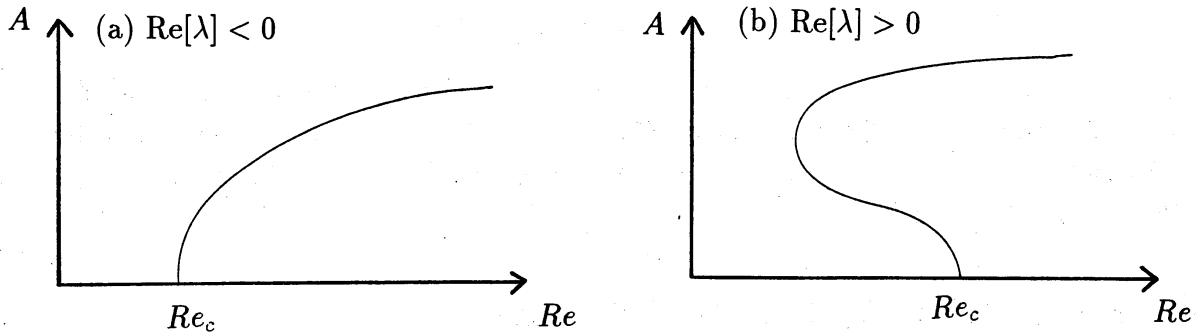


図4 分岐ダイアグラム

矩形管流の振幅方程式の係数を評価する．表 3 に， $\Gamma = 100$, $Re = 5772$, $\alpha = 1.02$ の場合の弱非線形解析から得られた線形増幅率とランダウ係数の値と平面ポアズイユ流 ($\Gamma \rightarrow \infty$) の値とを示す．また，図 5 に $\Gamma = 100$, $Re = 5772$, $\alpha = 1.02$ における固有関数 $v_{10}(y, z)$ の実部を示す．図 5 (a) は， $z = 0$ における断面図であり，図 5 (b) は， $v_{10}(y, z)$ の実部の等高線である． $z = 0$ 断面における固有関数 $v_{10}(y, 0)$ の分布は，対応する平面ポアズイユ流の固有関数の分布に一致する．図 5 (b) より，固有関数の分布は， $z = 0$ 近傍では 2 次元性が保たれているものの， $z = \pm\Gamma$ 近傍では壁の影響で 2 次元性が破れている．矩形管のアスペクト比が大きくなると，線形増幅率およびランダウ係数の値は平面ポアズイユ流 ($\Gamma \rightarrow \infty$) の値に漸近すると考えられるが， $\Gamma = 100$ においてもそれらの値は，平面ポアズイユ流の値に近い値をとることがわかる．

臨界アスペクト比 $\Gamma_c = 3.116$ の近傍についても振幅方程式の係数を評価することを試みたが，信頼できる値は得られなかった．その理由としては，まず空間分解能の不足が考えられる．振幅方程式の係数を決定するには，線形方程式のみならず線形固有関数の積が含まれる非線形の方程式を解く必要があり，線形安定を調べたとき以上の展開項数が必要となるが，計算機のパフォーマンス上それは不可能であった．また，得られた行列の性質が非常に悪く，機械精度の範囲内で正しい解が得られなかった．これらは，今後の課題である．

表 3: 圧力勾配一定条件で求めた線形増幅率とランダウ係数

	λ_0	λ_1
平面ポアズイユ流	3.696	29.684-143.76 i
矩形管流 ($\Gamma = 100$)	3.686	22.241-117.15 i

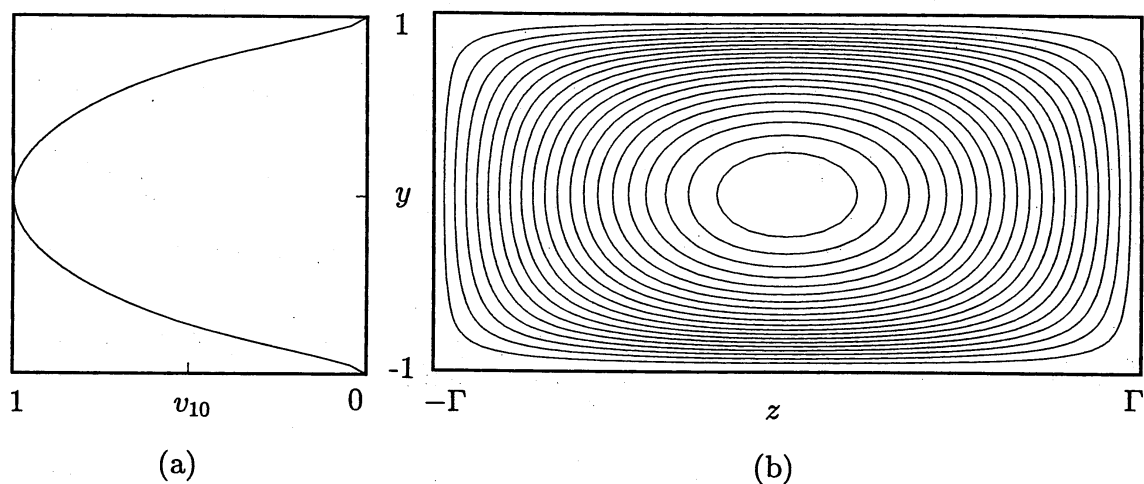


図 5 固有関数の分布

5 まとめ

矩形管内流れの線形安定性を矩形断面のアスペクト比に対して調べ、その臨界レイノルズ数を求めた。矩形管流が不安定となる攪乱は、mode(I)の攪乱で、その中でも壁近傍で乱れが大きくなるモードである。この攪乱は臨界アスペクト比 $\Gamma_c = 3.116$ に近づくと、臨界レイリー数無限大を与えることが示された。

線形安定性解析に続いて、臨界点の近傍で摂動展開することにより攪乱の弱非線形段階における分岐の振る舞いを調べた。増幅率展開と多重尺度展開を用いて、攪乱の振幅に関する方程式を導き、その係数をアスペクト比 $\Gamma = 100$ の場合について評価した。アスペクト比 $\Gamma = 100$ の矩形管流れにおける線形増幅率およびランダウ係数は、平面ポアズイユ流の値に漸近していることが示された。

今後は、矩形管の臨界アスペクト比 Γ_c 近傍での線形増幅率およびランダウ係数を弱非線形解析から求め、遷移の振る舞いを調べることが目標である。その場合には、空間方向の分解能を上げて精度良く計算を行うことが必要であり、それに加えて行列の性質を良くする工夫が必要である。

6 参考文献

- [1] 巽友正, 後藤金英(1976):流れの安定性理論. (産業図書). p89-94.
- [2] A. T. Patera & S. A. Orszag, Finite amplitude stability of axisymmetric pipe flow. J. Fluid Mech. 112(1981)467.
- [3] H. Salwen, F. W. Cotton & C. E. Grosch, Linear stability of Poiseuille flow in a circular pipe. J. Fluid Mech. 98(1980)273.
- [4] L. H. Thomas, The stability of plane Poiseuille flow. Phys. Rev. 91(1953)780.
- [5] S. A. Orszag, Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. J. Fluid Mech. 50(1971)689.
- [6] C. L. Pekeris and B. Shkoller, Stability of plane Poiseuille flow to periodic disturbances of finite amplitude in the vicinity of the neutral curve. J. Fluid Mech. 29(1967)31.
- [7] W. C. Reynolds and M. C. Potter, Finite-amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech. 27(1967)465.
- [8] T. Tatsumi & T. Yoshimura, Stability of the laminar flow in a rectangular duct. J. Fluid Mech. 212(1990)437.
- [9] R. R. Kerswell & A. Davey, On the linear stability of elliptic pipe flow. J. Fluid Mech. 316(1996)307.
- [10] 水島二郎, 藤村薫, 柳瀬真一郎, 平面ポアズイユ流中の2次元攪乱の非線形発展. 京大数理研講究録 601(1986)154.
- [11] T. Kao & C. Park, Experimental investigations of the stability of channel flows. Part 1. Flow of a single liquid in a rectangular channel. J. Fluid Mech. 43(1970)145.