

ANALYTIC SOLUTIONS TO NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATIONS

加藤 圭一 (東京理科大・理) (KEIICHI KATO)

1. INTRODUCTION

次の空間 1 次元非線形 Schrödinger 方程式

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u &= f(u), \\ u(0, x) &= \phi(x), \end{cases}$$

を考える。本講演で考察する問題は、 ϕ がどのような条件の下で、解 u が実解析的になるかという問題である。Hayashi-Saitoh[5]により、初期値 ϕ が $\|e^{a|x|}\phi\| < \infty$ を満たす時、解 u は、 $t \neq 0$ で実解析的になることがわかっている。一方、Hayashi-Kato[3], Taniguchi-Kato[7]において、 $\|(x\partial_x)^k \phi\| \leq CA^k k!$ が任意の自然数 k で満たされれば、(1) は $t \neq 0$ で時空間変数に関し実解析的になることを示している。ただし、 $\|\cdot\|$ は、(1) の初期値問題を解くことができる適当な Sobolev ノルムである。

本講演では、後者と同様のことを解析接続を用いて示すことを目標とする。主結果は以下の通りである。簡単のため、 $f(u) = u^2$ とする。初期値 ϕ に次の条件を仮定する。

Assumption 1. 初期値 ϕ はその Fourier 変換 $\hat{\phi}$ がある正数 $A > 0$ に対し $\Omega_A = \{\xi + i\eta \in \mathbb{C}; 0 < \eta < A\xi \text{ or } A\xi < \eta < 0\}$ で正則で、

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \|\langle \xi \rangle \hat{\phi}(\xi - ia\xi)\|_{L_\xi^2} < \infty,$$

かつ、任意の $\epsilon > 0$ に対し、

$$\sup_{\epsilon \leq a \leq A-\epsilon} \|\partial_\xi \hat{\phi}(\xi - ia\xi)\|_{L_\xi^2} < \infty.$$

ここで、 $\langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}$ 。

Theorem 1. 上記 Assumption 1 を仮定する。そのとき、ある $T > 0$ が存在して (1) の解 u が $C([0, T]; H^1)$ で一意的存在し、さらに $\exists B > 0$ が存在し、 u は $|x| < Bt$ において実解析的。

Remark 1. この結果は部分的なものであり、この条件の下で解 u は $\mathbb{R}$ 上で実解析的であると期待される。以下の証明では、 B を任意に大きくとることはできない。

Remark 2. Hayashi-Kato[3], Taniguchi-Kato[7] では、空間次元が 1 次元の場合には初期値の条件として原点以外（あるいはある 1 点以外）は解析的を仮定している。Assumption 1 では、複数の点が解析的でなくてもよい。

2. 証明の方針

証明は以下の 3 つのステップで行なう。

(ステップ 1)

(1) を解くことは、次の積分方程式を解くことに帰着される。

$$(2) \quad \hat{u}(t, \xi) = e^{it\xi^2} \hat{\phi}(\xi) + i \int_0^t e^{i(t-s)\xi^2} \hat{u} * \hat{u}(s, \xi) ds.$$

もし、 $\hat{u}(t, \xi)$ が Ω_A まで解析接続できると仮定すると形式的に方程式(2)は次のようになる。

$$(3) \quad \begin{aligned} \hat{u}(t, \xi - ia\xi) &= e^{it(\xi - ia\xi)^2} \hat{\phi}(\xi - ia\xi) \\ &\quad + i(1 - ia) \int_0^t e^{i(t-s)(\xi - ia\xi)^2} \hat{u} * \hat{u}(s, \xi - ia\xi) ds. \end{aligned}$$

$\tilde{u}_a(t, \xi) = \hat{u}(t, \xi - ia\xi)$ とおくと、積分方程式

$$(4) \quad \tilde{u}_a(t, \xi) = e^{it(\xi - ia\xi)^2} \hat{\phi}(\xi - ia\xi) + i(1 - ia) \int_0^t e^{i(t-s)(\xi - ia\xi)^2} \tilde{u}_a * \tilde{u}_a(s, \xi) ds,$$

が得られる。(4) の解を次のように逐次近似で求める。

$$(5) \quad \tilde{u}_a^{(0)}(t, \xi) = e^{it(\xi - ia\xi)^2} \hat{\phi}(\xi - ia\xi),$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_a^{(N)}(t, \xi) &= e^{it(\xi - ia\xi)^2} \hat{\phi}(\xi - ia\xi) \\ &\quad + i(1 - ia) \int_0^t e^{i(t-s)(\xi - ia\xi)^2} \tilde{u}_a^{(N-1)} * \tilde{u}_a^{(N-1)}(s, \xi) ds. \end{aligned}$$

各 $0 < a < A$ について、関数空間

$$X_a = \{f(t, \xi) \in C([0, T], L^2) \mid \|f\|_{X_a} < \infty\}$$

を用意する。ここで、

$$\|f\|_{X_a} = \sup_{0 \leq t \leq T} \max \left\{ \|e^{4at|\xi|} \langle \xi \rangle f(t, \xi)\|_{L_\xi^2}, \|e^{4at|\xi|} \partial_\xi f(t, \xi)\|_{L_\xi^2} \right\}$$

とする。各 $0 < a < A$ に対し、積分方程式(4)を解く。これは、通常の縮小写像の原理を用いて解くことができる。

(ステップ 2)

$U(t, \xi - ia\xi) = \tilde{u}_a(t, \xi)$ と置き、 $U(t, \zeta)$ が Ω_A で正則であることを示す。このために、次の 2 つの補題を用意する。

Lemma 1. $g(\zeta) = g(\xi - ia\xi)$ が Ω_A で正則かつ $0 < a < A$ に対し、 $g(\xi - ia\xi), \partial_\xi[g(\xi - ia\xi)], \xi g(\xi - ia\xi) \in L^2_\xi$ とする。このとき、

$$F(\xi, a) = (1 - ia) \int_{-\infty}^{\infty} g((\xi - \eta) - ia(\xi - \eta))g(\eta - ia\eta)d\eta$$

に対して、 $\tilde{F}(\zeta) = \tilde{F}(\xi - ia\xi) = F(\xi, a)$ と定めると $\tilde{F}(\zeta)$ は Ω_A で正則。

Lemma 2. K を Ω_A のコンパクト集合とすると、 $0 \leq t \leq T$ に対し、 $\tilde{u}_a^{(N)}(t, \xi)$ は K 上一様収束する。

(証明は略)

(ステップ 3)

ステップ 2 の結果から、解の積分表示

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi^2} \hat{\phi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t e^{i(t-s)\xi^2} \hat{u} * \hat{u}(s, \xi) e^{ix\xi} ds d\xi$$

において、 $|x| < \exists Bt$ なら ξ に関する積分路を $\Gamma_a = \{\xi - ia\xi; \xi \in \mathbb{R}\}$ に取り換えることができる

$$(7) \quad u(t, x) = (1 - ia)/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\xi - ia\xi)^2} \hat{\phi}(\xi) e^{ix(\xi - ia\xi)} d\xi \\ + i(1 - ia)^2/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t e^{i(t-s)(\xi - ia\xi)^2} \hat{u} * \hat{u}(s, \xi - ia\xi) e^{ix(\xi - ia\xi)} ds d\xi,$$

と表すことができる。第 1 項は、 $|e^{it(\xi - ia\xi)^2}| = e^{-2at\xi^2}$ だから積分路の変更ができることは明らか。第 2 項は、 t に関する積分を $\int_0^{t-\delta}$ と $\int_{t-\delta}^t$ に分けて考える。 $\int_0^{t-\delta}$ においては、 $|e^{i(t-s)(\xi - ia\xi)^2}| \leq e^{-2(t-s)a\xi^2} \leq e^{-2\delta a\xi^2}$ だから、 $\forall x \in \mathbb{R}$ に対し、積分路の変更ができる。 $\int_{t-\delta}^t$ においては、 $|\hat{u} * \hat{u}(s, \xi - ia\xi)| = e^{-4as|\xi|} \times |L^1 - \text{function}| \leq e^{-4a(t-\delta)|\xi|} \times |L^1 - \text{function}|$ だから、 $|ax\xi| < |4a(t-\delta)\xi|$ すなわち、 $B = 4$ ととれば、 $|x| < Bt$ で積分路の変更ができる。

(7) において、 x に関して定義域を x の複素近傍に拡張することができるから $|x| < Bt$ で実解析的であることがわかる。

REFERENCES

- [1] de Bouard, A., *Analytic solutions to non-elliptic nonlinear Schrödinger equations*, J. Diff. Equations, **104**, (1993) 196-213.
- [2] de Bouard, A., Hayashi, N., Kato, K. *Regularizing effect for the (generalized) Korteweg de Vries equation and nonlinear Schrödinger equations*, Ann.Inst. H.Poincaré, Analyse non linéaire, **9** (1995), 673-725.

- [3] Hayashi, N., Kato, K *Regularity in time of solution to nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 253–277.
- [4] Hayashi, N., Kato, K *Analyticity in time and smoothing effect of solutions to nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **184** (1997), 273–300.
- [5] Hayashi, N., Saitoh, S. *Analyticity and smoothing effect for the Schrödinger equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor. **52** (1990), 163–173.
- [6] Kato, K., Ogawa, T., *Analyticity and Smoothing Effect for the Korteweg de Vries Equation with a single point singularity*, Math. Annalen, (2000), to appear.
- [7] Kato, K., Taniguchi, K., *Gevrey regularizing effect for nonlinear Schrödinger equations*, Osaka J. Math., **33** (1996), 863–880.
- [8] Kato, T., Masuda, K., *Nonlinear evolution equations and analyticity I*, Ann.Inst.Henri Poincaré. Analyse non linéaire, **3** no. 6 (1986), 455–467.
- [9] Ukai, S. *Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff*. Japan J. Appl. Math., **1** (1984), 141–156.