

ベイズ統計モデリングの有用性を示す 認知心理学研究の紹介： 個人間・試行間のばらつきを理解する

武藤 拓之

観察可能な行動を手がかりにしてその背後にある情報処理の仕組みをモデル化し、人の心を理解しようと試みるのが認知心理学の基本的なスタンスである。認知心理学のこのような考え方は、確率モデルでデータの生成過程を表現し、その確率モデルをデータに当てはめることによって現象の理解と予測を促す統計モデリングの手法と非常に相性が良い。特に近年、Stan (Stan Development Team, 2020) や JAGS (Plummer, 2020) といったベイズ推定を実行するための確率的プログラミング言語が登場し、従来よりも容易かつ柔軟に統計モデリングを実施できる環境が整ってきたことは認知心理学にとっても追い風である。このような状況を踏まえ、本稿ではベイズ統計モデリングの強みを生かした最近の認知心理学研究を紹介する^a。

^a 行為主体がベイズの定理に基づいて信念を更新するとみなす意思決定の認知モデル (e.g., 中村, 2009; 繁樹, 1995) については本稿では扱わない。

文献紹介に先立って、ベイズ統計モデリングの基本的な考え方について簡単に整理しておく。ベイズ推定とはベイズの定理を利用したパラメータの推定法であり、確率で表現したパラメータの不確実性をデータに基づいて更新するという原則に従う。ベイズ推定の利点として、汎用的な推定アルゴリズムであるマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法を利用することで複雑なモデルであっても比較的容易にパラメータを推定できる点や、モデル評価のための優れた指標を利用できる点などが挙げられる (e.g., 浜田・石田・清水, 2019; 清水, 2018)。統計モデリングの枠組みではベイズの定理を

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathcal{M}) = \frac{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})}{p(\mathbf{y}|\mathcal{M})} \quad (1)$$

と表すと分かりやすい。ここで、 $\mathcal{M}$ は分析者が設定したモデルを表す名義変数、 $\mathbf{y}$ は観測されたデータのベクトル、 $\boldsymbol{\theta}$ はパラメータのベクトルを表す。この式を $\boldsymbol{\theta}$ の関数として見たとき、設定した確率モデルにおけるデータ $\mathbf{y}$ の尤度 $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \mathcal{M})$ の関数形 (尤度関数) およびパラメータの事前確率 $p(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$ の関数形 (事前分布) を決めることで、パラメータの事後確率 $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}, \mathcal{M})$ の関数形 (事後分布) が一意に定まる。また、右辺の分母にある周辺尤度

紹介者所属：京都大学

$p(\mathbf{y}|\mathcal{M})$ は分析者が設定したモデルの下で今回のデータが得られる確率を表すため、モデルの評価指標として利用できる。例えば 2 つの異なるモデル $\mathcal{M}_A$ と $\mathcal{M}_B$ の比較を考えたとき、両者の周辺尤度の比 $p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_B)/p(\mathbf{y}|\mathcal{M}_A)$ はベイズファクターと呼ばれ、データが $\mathcal{M}_A$ よりも $\mathcal{M}_B$ を支持する相対的な証拠の強さとして解釈される (Jeffreys, 1961; Kass & Raftery, 1995)。さらに、推定された事後分布でモデルの期待値をとった事後予測分布 (将来のデータが従うと期待される確率分布) を利用して、手元のデータとの当てはまりを確かめる事後予測チェック (Gelman, Meng, & Stern, 1996) や、真のデータ生成分布との乖離 (汎化損失) の期待値の推定量である WAIC (Watanabe, 2010) を使ったモデル比較を行うこともできる (理論のより詳細な解説については浜田他 (2019) や渡辺 (2012) などを参照)。

ベイズ統計モデリングの実践例を紹介している和書・翻訳書は多数出版されているが (e.g., 浜田他, 2019; Lee & Wagenmakers, 2013 井関 2017; 豊田, 2017, 2018, 2019), 認知心理学を含む認知科学領域におけるベイズ統計モデリングの研究事例を扱っている日本語の文献はまだ少ない。そこで本稿では特に、認知心理学の分野でデータのばらつきに着目したモデリングを実践している 2 本の論文を

紹介することで、ベイズ統計モデリングの威力と魅力を示したい。第1論文 (Haaf & Rouder, 2017) は、ストループ効果やサイモン効果といった適合性効果が全ての人に生じるのか (i.e., 全称命題)、あるいは逆向きの効果が生じる人もいるのか (i.e., 存在命題)、といった個人差についての仮説をモデル化し、複数のデータセットを用いて検証した研究である。第2論文 (Muto, in press) は、試行レベルの反応時間のばらつきをモデル化することで、文字の心的回転課題の遂行時に人が2種類の方略を使い分けていることを明らかにした研究である。認知心理学では伝統的に平均値に関する仮説を扱うことが多く、データのばらつきは極力排除されるべきノイズとして忌み嫌われることもあるが、本稿で紹介する研究ではそのようなデータのばらつきを逆手にとったモデリングによって有用な知見を引き出そうとしている点が特徴的である。なお、本稿では記法の統一や説明の便宜のために元の論文のモデル式とは形式上異なる表記を用いているが、その点についてはご了承願いたい。

1. 第1論文

Haaf, J. M., & Rouder, J. N. (2017). Developing constraint in Bayesian mixed models. *Psychological Methods*, 22, 779–798. doi: 10.1037/met0000156

1.1 背景

心理学では効果の有無が関心の的になることが多い。例えば、赤色で書かれた「赤」という文字の色を回答する一致条件と、赤色で書かれた「緑」という文字の色を回答する不一致条件を比較して、不一致条件の平均反応時間が一致条件よりも長ければストループ効果が生じたとみなす。本研究はこのような効果の個人差に注目し、全ての人が同じ方向の効果を示すのか、それとも逆向きの効果を示す人もいるのか、といった順序制約 (order restrictions) に関する仮説の検証方法を考案した。例えば一致条件の平均反応時間が不一致条件よりも数値的に長く、見かけ上逆向きの効果を示す実験参加者がいたとしても、その参加者の真の効果が逆向きであるとは限らない。なぜならば、試行レベルの反応時間のばらつきによってたまたまサンプルとして逆向きの結果が得られた可能性を排除できないからである。そこで本研究は、効果の個人差に関する仮説を表現した4

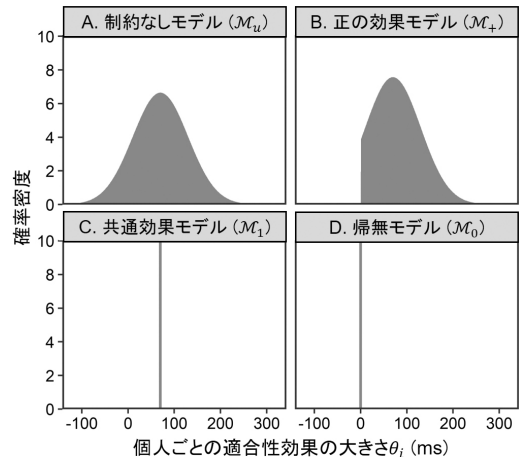


図1 Haaf & Rouder (2017) の4つのモデルによって想定される、適合性効果の大きさの個人差を表す分布。

つの階層モデルを考案し、異なる種類の適合性課題 (ストループ課題・サイモン課題・フランカー課題) のデータを用いて適合性効果 (一致条件と不一致条件の差) の個人差を検証した。

1.2 モデル

実験参加者 i の試行 j の反応時間 Y_{ij} を

$$Y_{ij} \sim \text{Normal}(\alpha_i + x_{ij}\theta_i, \sigma) \quad (2)$$

と表す。ここで、 x_{ij} は一致条件のとき $x_{ij} = 0$ 、不一致条件のとき $x_{ij} = 1$ となるダミー変数である。したがって、 α_i は一致条件における参加者 i の反応時間の試行間平均、 θ_i は参加者 i の適合性効果の大きさを表す。このように表された実験参加者ごとの各試行の平均反応時間 $\alpha_i + x_{ij}\theta_i$ に試行間変動として標準偏差 σ の正規分布ノイズが加わることで反応時間 Y_{ij} が生成されると考える。一致条件の平均反応時間 α_i の個人差が平均 μ 、標準偏差 $\sigma\sqrt{g_\alpha}$ の正規分布に従うと仮定する階層モデルを考え、

$$\alpha_i \sim \text{Normal}(\mu, \sigma\sqrt{g_\alpha}) \quad (3)$$

と表す。本研究の目的において最も重要なパラメータは、個人ごとの適合性効果の大きさを表す θ_i である。本研究ではこの θ_i の個人差に関する仮説を反映した以下の4つのモデルの比較を考えた。

1.2.1 制約なしモデル (unstructured model)

制約なしモデルでは、 θ_i の個人差が平均 ν 、標準

偏差 η の正規分布に従うと考え、

$$\mathcal{M}_u : \theta_i \sim \text{Normal}(v, \eta) \quad (4)$$

と表す。適合性効果の大きさに個人差があり、その値が正にも負にもなり得ること（すなわち、逆向きの効果を示す人がいること）を想定するのがこのモデルである（図 1A）。

1.2.2 正の効果モデル (positive-effects model)

正の効果モデルは、上記の制約なしモデルに θ_i が正の値しか取らないという制約を与えたモデルである。これは切断正規分布を使って

$$\mathcal{M}_+ : \theta_i \sim \text{Normal}_+(v, \eta) \quad (5)$$

と表される（図 1B）。このモデルでは、適合性効果の大きさには個人差があるが、その効果は誰であれ正の値になるということが想定される（e.g., 全ての人がストループ効果を示す）。

1.2.3 共通効果モデル (common-effect model)

制約なしモデルと正の効果モデルでは適合性効果の大きさに個人差があることを認めていたが、共通効果モデルでは θ_i が個人間で共通の定数であることを仮定し

$$\mathcal{M}_1 : \theta_i = v \quad (6)$$

と表現する（図 1C）。効果の大きさに個人差が存在しないという仮定は現実的ではないが、このモデルの当てはまりが良かった場合には、個人差が（あったとしても）極めて小さい可能性や、実験が個人差を十分捉えられるようにデザインされていなかった可能性（e.g., 試行数が少なく個人間変動と試行間変動を区別できなかった）を考えることができるという点で有用である。

1.2.4 帰無モデル (null model)

帰無モデルは適合性効果が誰にも生じないことを想定したモデルであり、

$$\mathcal{M}_0 : \theta_i = 0 \quad (7)$$

と表現される（図 1D）。

1.3 方法

von Bastian, Souza, & Gade (2016) および Pratte, Rouder, Morey, & Feng (2010) が収集したストループ課題（3 種）、サイモン課題（3 種）、およびフランカー課題（1 種）のそれぞれの正反応時間データに対し、制約なしモデル・正の効果モデル・共通効果モデル・帰無モデルを当てはめ、主にベイズファクターを使って各々の仮説を評価した。パラメータの事前分布としては、計算の便宜と事前知識を考慮した弱情報事前分布である *g*-prior (Zellner, 1986) を採用した（本稿では詳細は割愛する）。分析のためのスクリプト¹⁾ およびデータ²⁾ は著者の GitHub で公開されている。

ストループ効果に関しては、全ての人が正の適合性効果を示すことを想定したモデルがどのデータセットでも最もよく支持された（3 つのデータセットのうち 2 つで正の効果モデル、残り 1 つで共通効果モデルが支持された）。この結果は、熟達した読み手にとって文字読みが高速かつ自動的であることがストループ効果の原因であると考えられる従来の説明と整合的である（この説明によれば、効果が逆転することはあり得ない）。一方、サイモン効果に関しては、3 つのデータセットのうち 2 つで制約なしモデルが、残りの 1 つで正の効果モデルが支持され、サイモン効果が万人に生じるとは言えないことが示された。この結果は、自動的な処理の後で制御的な処理が行われるというサイモン効果の認知過程が反映された結果であると推測される。フランカー効果に関しては、反応時間において適合性効果が見られなかったデータセットを使用したということもあり、本研究のモデル比較では帰無モデルが支持された。

1.4 結果と考察

2. 第 2 論文

Muto, H. (in press). Evidence for mixed processes in normal/mirror discrimination of rotated letters: A Bayesian model comparison between single- and mixed-distribution models. *Japanese Psychological Research*. doi: 10.1111/jpr.12306

2.1 背景

本研究は、反応時間データの試行間のばらつきをモデル化することによって、傾いた文字が正像

1) <https://github.com/PerceptionAndCognitionLab/ctx-indiff>
2) <https://github.com/PerceptionCognitionLab/data0/tree/master/contexteffects>

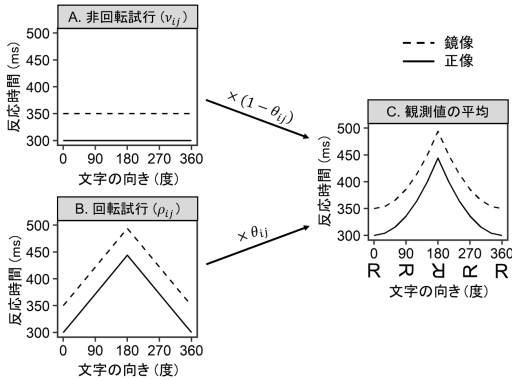


図2 非回転試行(A)と回転試行(B)の混合を仮定することで、傾いた文字の正像・鏡像判断実験で得られる平均反応時間のパターン(C)を説明するモデルの概要。

か鏡像かを判断する際の認知プロセスの解明を試みた研究である。文字の正像・鏡像判断に要する反応時間の平均値は、図2Cのように、文字の向きが正立(0°)から倒立(180°)に近づくにつれて単調増加することが知られている。これは、頭の中で文字を回転させる操作、すなわち心的回転(mental rotation)が実行されるためであると考えられている。2物体の異同判断を求めるオリジナルの心的回転課題(Shepard & Metzler, 1971)とは異なり、文字を用いた心的回転課題では、平均反応時間が文字の向きの線形関数とはならず、湾曲した関数形となる。この非線形性を説明するために、Hammら(Kung & Hamm, 2010; Searle & Hamm, 2012)は、反応時間が文字の向きに依存しない非回転試行(図2A)と反応時間が文字の向きの線形関数となる回転試行(図2B)の混合を仮定する数理モデルを提案した。ところが、反応時間の平均値のみを説明するこのモデルは他の説明とも整合的であったため、非回転試行と回転試行の混合を排他的に説明することができないという問題があった(e.g., 心的回転は常に行われるが回転速度が文字の向きによって異なると考えても矛盾しない)。そこで本研究は、平均値ではなく試行毎の反応時間の生成過程を説明できるようにモデルを拡張し、実際のデータに当てはめることで、非回転試行と回転試行が混合しているかどうかをより直接的に検証した。

2.2 モデル

実験参加者*i*の試行*j*が非回転試行であったとき

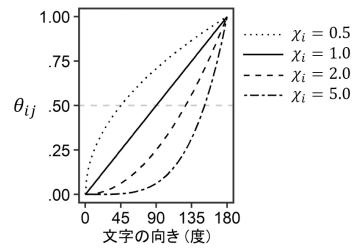


図3 文字の向き d_{ij} と回転試行となる確率 θ_{ij} の関係。 χ_i の値によって関数形が変化する。

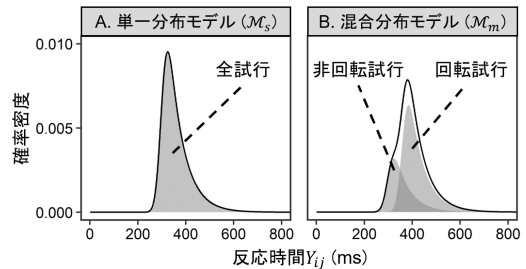


図4 Muto (in press) が提案した2種類のモデルによって想定される反応時間の試行間変動。両モデルはパラメータの値が同一であっても異なる分布形を予測する。

の反応時間の予測値を v_{ij} 、回転試行であったときの反応時間の予測値を ρ_{ij} と置き、

$$v_{ij} = \alpha_i + m_{ij}\beta_i, \quad (8)$$

$$\rho_{ij} = \alpha_i + m_{ij}\beta_i + d_{ij}\gamma_i \quad (9)$$

と表す。ここで、 m_{ij} は試行 j で提示された文字が正像であったとき $m_{ij} = 0$ 、鏡像であったとき $m_{ij} = 1$ となるダミー変数、 d_{ij} は提示された文字の傾き(0°との最短角距離; 0–180°)を表す。非回転試行の反応時間は、刺激の符号化や反応生成といった基本的な処理に要する時間 α_i と、鏡像が提示された場合には鏡像を反転して正像に戻すのに要する時間 β_i によって予測され、文字の向きの影響は受けないと仮定する(図2A)。回転試行では心的回転に要する時間 $d_{ij}\gamma_i$ がこれらに加算される(図2B)。 γ_i は文字を1°回転するのに要する時間として解釈できる。続いて、参加者*i*の試行*j*が回転試行である確率 θ_{ij} を

$$\theta_{ij} = \left(\frac{d_{ij}}{180} \right)^{\chi_i} \quad (10)$$

という冪関数で表す。この関数は、文字の向きが正立(0°)から倒立(180°)に近づくにつれて回転試行となる確率 θ_{ij} が0から1へと単調に増加し、そ

の増加の仕方がパラメータ χ_i によって決まることを表している (図 3)。ただし、 χ_i は間隔尺度としては扱えないため平均値や相関係数などの統計量の計算に難があり、解釈も困難である。そこで、本研究では回転試行となる確率がちょうど 50% になるときの文字の角度を

$$\tau_i = 180 \times 2^{-\frac{1}{\chi_i}} \quad (11)$$

という式で求め、この閾値角 τ_i を解釈することを提案した。例えば $\tau_i = 60^\circ$ と推定された参加者は、文字の傾きが 60° 未満のときには回転方略よりも非回転方略をよく用いるが、 60° を越えたときには非回転方略よりも回転方略をよく用いると解釈できる。ここまでで定義した非回転試行の予測値 v_{ij} 、回転試行の予測値 p_{ij} 、回転試行である確率 θ_{ij} を使い、反応時間の観測値を予測する 2 種類のモデルを提案した。

2.2.1 単一分布モデル (single-distribution model)

もし文字の正像・鏡像判断が単一のプロセスによって遂行されるのであれば (e.g., 心的回転は常に行われるが回転速度が文字の向きによって異なる)、反応時間は単一分布に従うと予想される (図 4A)。この単一分布モデルでは、非回転試行の予測値 v_{ij} と回転試行の予測値 p_{ij} を θ_{ij} で重み付けた μ_{ij} を位置パラメータとする単一の確率分布から反応時間 Y_{ij} が生成されると考える。確率分布として指数-正規分布 (ex-Gaussian distribution) を仮定すると、単一分布モデル ($\mathcal{M}_s$) は

$$\mu_{ij} = (1 - \theta_{ij})v_{ij} + \theta_{ij}p_{ij}, \quad (12)$$

$$Y_{ij} \sim \text{ExGaussian}(\mu_{ij}, \sigma_i, \lambda_i) \quad (13)$$

と表せる。ここで、 σ_i と λ_i は指数-正規分布のスケールと形状を決めるパラメータである。Hamm ら (Kung & Hamm, 2010; Searle & Hamm, 2012) は式 (12) の μ_{ij} を使って平均反応時間の説明を試みたが、本研究の単一分布モデルでは試行毎の反応時間のばらつきを考慮している点が異なる。

2.2.2 混合分布モデル (mixed-distribution model)

もし文字の正像・鏡像判断において心的回転が行われる試行と行われない試行が混在しているのであれば、反応時間は混合分布に従うと予想される (図 4B)。試行 j が回転試行か否かをダミー変数 ω_{ij} で表し、確率 θ_{ij} で $\omega_{ij} = 1$ (回転試行)、確率 $1 - \theta_{ij}$

で $\omega_{ij} = 0$ (非回転試行) となることを仮定する。得られた ω_{ij} の値に基づいて、回転試行のときは p_{ij} 、非回転試行のときは v_{ij} を位置パラメータとする確率分布から反応時間 Y_{ij} が生成されると考えることで混合分布が表現される。確率分布として指数-正規分布を用いると、混合分布モデル ($\mathcal{M}_m$) は

$$\omega_{ij} \sim \text{Bernoulli}(\theta_{ij}), \quad (14)$$

$$Y_{ij} \sim \begin{cases} \text{ExGaussian}(v_{ij}, \sigma_i, \lambda_i), & \text{if } \omega_{ij} = 0 \\ \text{ExGaussian}(p_{ij}, \sigma_i, \lambda_i), & \text{if } \omega_{ij} = 1 \end{cases} \quad (15)$$

と表せる³⁾。なお、単一分布モデルと混合分布モデルは同一のパラメータから構成されているが、両者はパラメータの値が同じであっても異なる分布形を予測するため (図 4)、モデルの比較が可能である。

2.3 方法

計 1,000 試行から成る文字の正像・鏡像判断課題を 12 名の実験参加者に課した武藤 (2018) のデータを二次分析し、ベイズファクターと WAIC を用いて単一分布モデルと混合分布モデルのどちらが試行毎の正反応時間をより良く説明できるかを検証した。パラメータの事前分布としてはほとんど無情報な確率分布を設定した。分析のためのスクリプト、データ、および実験刺激は著者の OSF で公開されている (<https://doi.org/10.17605/osf.io/m5e7v>)。

2.4 結果と考察

平均正反応時間が図 2C のような湾曲した関数形を示すことを確認した後で、試行毎のデータを用いて単一分布モデルと混合分布モデルの比較を行った。ベイズファクターによるモデル比較の結果、混合分布モデルの周辺尤度は単一分布モデルの 2,797 倍であったため、混合分布モデルを支持する決定的な証拠 (decisive evidence; Jeffreys, 1961) が得られたと解釈された。また、WAIC は混合分布モデルのほうが単一分布モデルよりも数値的に小さく、少なくとも汎化損失という点で混合分布モデルが単一分布に劣るとは言えないことが示された。これらの結果は反応時間分布として指数-正規分布ではなく正規分布を仮定したときにも同様であった。以上より、傾いた文字の正像・鏡像判断は回転方略と非回転方

3) 元の論文では式 (14) と式 (15) を 1 つにまとめた式が使われているため ω_{ij} に相当するパラメータは明示されていないが、本稿では説明を分かりやすくするためにこのような表現を採用した。

略の混合によって達成されると結論付けられた。

さらに、副次的な分析として参加者毎のパラメータの推定結果を単一分布モデルと混合分布モデルで比較したところ、回転試行と非回転試行の割合が等しくなる閾値角 τ_i の推定値がモデル間で大きく乖離する場合があることが示された。この結果は、モデルの検証を行う前にパラメータの推定結果を安直に解釈してしまうことで誤った結論を導いてしまう危険性を示すものであり、モデル選択の重要性を物語っている。

引用文献および関連する文献

(本文中では引用していないが一読の価値があると思われる文献をアスタリスクで示した。)

- * Dienes, Z., & McIlatchie, N. (2018). Four reasons to prefer Bayesian analyses over significance testing. *Psychonomic Bulletin & Review*, 25, 207–218. doi: 10.3758/s13423-017-1266-z
(ベイズファクターによる仮説評価が有意性検定よりも優れている理由を論じている。)
- Gelman, A., Meng, X. L., & Stern, H. (1996). Posterior predictive assessment of model fitness via realized discrepancies. *Statistica Sinica*, 6, 733–807.
(事後予測分布でモデルの当てはまりを評価する方法について論じている。)
- 浜田 宏・石田 淳・清水 裕士 (2019). 社会科学のためのベイズ統計モデリング 朝倉書店
- Jeffreys, H. (1961). *The theory of probability* (3rd ed.). Oxford University Press.
- Kass, R. E., & Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773–795. doi: 10.1080/01621459.1995.10476572
- Kung, E., & Hamm, J. P. (2010). A model of rotated mirror/normal letter discriminations. *Memory & Cognition*, 38, 206–220. doi: 10.3758/MC.38.2.206
(文字の心的回転課題について、非回転試行と回転試行の混合を仮定した数理モデルを初めて提案した。)
- * Lee, M. D. (2011). How cognitive modeling can benefit from hierarchical Bayesian models. *Journal of Mathematical Psychology*, 55, 1–7. doi: 10.1016/j.jmp.2010.08.013
(認知モデリングにおける階層ベイズモデルの利点を論じている。)
- Lee, M. D., & Wagenmakers, E.-J. (2013). *Bayesian cognitive modeling: A practical course*. Cambridge University Press. (リー, M. D.・ワーゲンメイカーズ, E.-J. 井関 龍太 (訳) (2017). ベイズ統計で実践モデリング: 認知モデルのトレーニング 北大路書房)
- 武藤 拓之 (2018). 傾いた文字は正しい文字か? 鏡文字か? 心的回転課題の反応時間を説明する混合プロセスモデル 豊田 秀樹 (編著) たのしいベイズモデリング: 事例で拓く研究のフロンティア (pp. 79–92) 北大路書房
- 中村 國則 (2009). 認知科学におけるベイズ的アプローチに関する文献の紹介 認知科学, 16, 523–529. doi: 10.11225/jcss.16.523
- Plummer, M. (2020). JAGS: Just another Gibbs sampler. <https://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/>
- Pratte, M. S., Rouder, J. N., Morey, R. D., & Feng, C. (2010). Exploring the differences in distributional properties between Stroop and Simon effects using delta plots. *Attention, Perception & Psychophysics*, 72, 2013–2025. doi: 10.3758/APP.72.7.2013
- * Schad, D. J., Betancourt, M., & Vasisht, S. (in press). Toward a principled Bayesian workflow in cognitive science. *Psychological Methods*. doi: 10.1037/met0000275
(認知科学領域でベイズ統計モデリングを実践するためのワークフローが具体例とともに紹介されている。)
- Searle, J. A., & Hamm, J. P. (2012). Individual differences in the mixture ratio of rotation and nonrotation trials during rotated mirror/normal letter discriminations. *Memory & Cognition*, 40, 594–613. doi: 10.3758/s13421-011-0172-2
(文字の心的回転課題における非回転試行と回転試行の選好の個人差を表す冪関数を提案した。)
- Shepard, R. N., & Metzler, J. (1971). Mental rotation of three-dimensional objects. *Science*, 171, 701–703. doi: 10.1126/science.171.3972.701
- 繁桒 算男 (1995). 意思決定の認知統計学 朝倉書店
- 清水 裕士 (2018). 心理学におけるベイズ統計モデリング 心理学評論, 61, 22–41. doi: 10.24602/sjpr.61.1.22
- Stan Development Team (2020). RStan: The R interface to Stan. <http://mc-stan.org/>
- 豊田 秀樹 (2017). 実践ベイズモデリング: 解析技法と認知モデル 朝倉書店
- 豊田 秀樹 (2018). たのしいベイズモデリング: 事例で拓く研究のフロンティア 北大路書房
- 豊田 秀樹 (2019). たのしいベイズモデリング 2: 事例で拓く研究のフロンティア 北大路書房
- * van de Schoot, R., Winter, S. D., Ryan, O., Zondervan-Zwijnenburg, M., & Depaoli, S. (2017). A systematic review of Bayesian articles in psychology: The last 25 years. *Psychological Methods*, 22, 217–239. doi: 10.1037/met0000100
(心理学においてベイズ的な分析法がどのように使われてきたのかを示すレビュー論文。)
- von Bastian, C. C., Souza, A. S., & Gade, M. (2016). No evidence for bilingual cognitive advantages: A test of four hypotheses. *Journal of Experimental Psychology: General*, 145, 246–258. doi: 10.1037/xge0000120
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory. *Journal of Machine Learning Research*, 11, 3571–3594.
- 渡辺 澄夫 (2012). ベイズ統計の理論と方法 コロナ社
- Zellner, A. (1986). On assessing prior distributions and Bayesian regression analysis with g-prior distribution. In P. K. Goel, & A. Zellner (Eds.), *Bayesian inference and decision techniques: Essays in honour of Bruno de Finetti* (pp. 233–243). North-Holland.
(重回帰モデルの回帰係数に対する客観的な事前分布として g-prior を提案した。)