

旗多様体の K 理論における, 321-avoiding 置換のシューベルト類の公式について

松村朝雄

August 7, 2018

Abstract

本論文では、321-avoiding 置換に付随した二重 Grothendieck 多項式のタブロー公式と行列式公式について、その証明も含めて解説する。

1 導入

S_n を集合 $\{1, \dots, n\}$ の置換群とする。置換 $w \in S_n$ は、 $w(i) > w(j) > w(k)$ を満たす増加列 $i < j < k$ が存在しない時、321-avoiding と呼ばれる。本寄稿では、最近得られた 321-avoiding の置換に付随した二重 Grothendieck 多項式のタブロー公式について解説する。

二重 Grothendieck 多項式は、Lascoux–Schützenberger ([15], [14]) によって、完全旗多様体の同変 K 理論のシューベルト類を表示する非斉次多項式として導入された。その後、Fomin–Kirillov ([8], [7]) によって、Yang–Baxter 方程式による特徴づけで、組合せ論的にも調べられた。グラスマン置換の場合には、タブローによる表示が、Buch [5] 及び McNamara [20] によって得られ、より一般的な vexillary 置換の場合には、Knutson–Miller–Yong [13] によって、そのタブロー表示が得られた。

一方で、Hudson–Ikeda–Matsumura–Naruse [11] によって、より代数的な行列式による表示がグラスマン置換の場合に得られた (vexillary 置換の場合は、Anderson [1] と Hudson–Matsumura [12] によって得られた)。これらの行列式公式は退化跡の理論の枠組みで幾何的に証明されたが、その証明方法は、Anderson–Chen–Tarasca [2] によって上記の 321-avoiding 置換の場合にも近年拡張された。この結果は [18] の結果と合わせると、321-avoiding 置換に付随した (一重)Grothendieck 多項式のタブロー公式を導く。これを受け、二重 Grothendieck 多項式の場合にもタブロー公式が証明できることに著者は気づいた。その概要と背景を伝えることが本寄稿の主題である。また、Anderson–Chen–Tarasca の行列式公式の代数的な証明も与える。

2 背景

2.1 シューベルトカルキュラス

$\mathbb{C}^n$ を n 次元複素ベクトル空間とし、 $e_1, \dots, e_n$ をその標準基底とする。 $\mathbb{C}^n$ には複素トーラス $T_n = (\mathbb{C}^\times)^n$ が標準的に作用する。完全旗多様体 $Fl_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^n$ の完全旗 $U_0 = 0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_{n-1} \subset U_n = \mathbb{C}^n$ の集まり

として定めるが, 一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を上三角行列の Borel 部分群で割った等質空間と以下のように同一視する.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B \cong \mathrm{Fl}_n(\mathbb{C}) : M = [u_1, \dots, u_n] \mapsto (U_i = \langle u_1, \dots, u_i \rangle)_{i=1, \dots, n}.$$

置換 $w \in S_n$ に対し, そのシューベルト部分多様体 Ω_w は

$$\Omega_w := \overline{B_- w B}$$

と定める. ここで, B_- は下三角行列を集めた部分群で, その軌道の閉包として, シューベルト部分多様体を定めているので, 余次元は w の長さ $\ell(w)$ である.

$K_{T_n}(\mathrm{Fl}_n(\mathbb{C}))$ を $\mathrm{Fl}_n(\mathbb{C})$ の同変 K 理論とすると, Ω_w の構造層 $\mathcal{O}_{\Omega_w}$ は, $K_{T_n}(\mathrm{Fl}_n(\mathbb{C}))$ の元 $[\mathcal{O}_{\Omega_w}]$ を定める. これを Ω_w の同変 K 理論シューベルト類と呼ぶ. これらのシューベルト類は, $K_{T_n}(\mathrm{Fl}_n(\mathbb{C}))$ の $K_{T_n}(\mathrm{pt})$ 加群としての基底になっている. シューベルトカルキュラスの主要課題は, それに関する構造係数を求めることにある. すなわち, シューベルト係数 $c_{w,v}^u \in K_{T_n}(\mathrm{pt})$ を

$$[\mathcal{O}_{\Omega_w}] \cdot [\mathcal{O}_{\Omega_v}] = \sum_{u \in S_n} c_{w,v}^u [\mathcal{O}_{\Omega_u}]$$

で定めた時, $c_{w,v}^u$ の明示的な公式を求めることがシューベルトカルキュラスの主要課題である.

2.2 二重 Grothendieck 多項式

無限変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ と $b = (b_1, b_2, \dots)$ を用意する. β を不定元とし, その多項式環 $\mathbb{Z}[\beta]$ を考え, $\mathbb{Z}[\beta][x, b]$ を x 変数及び b 変数の $\mathbb{Z}[\beta]$ 上の多項式環とする. 置換群 S_n は x 変数の置換として $\mathbb{Z}[\beta][x, b]$ に作用するものとする. $s_i = (i, i+1) \in S_n$ は i と $i+1$ を入れ替える互換である.

K 理論差分作用素 (isobaric divided difference operator) π_i は, 次のように定められる. 多項式 $f \in \mathbb{Z}[\beta][x, b]$ に対し,

$$\pi_i(f) := \frac{(1 + \beta x_{i+1})f - (1 + \beta x_i)s_i(f)}{x_i - x_{i+1}}$$

とする. この時,

$$\pi_i^2 = \beta \pi_i, \quad \pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1}, \quad \pi_i \pi_j = \pi_j \pi_i \quad (|i - j| \geq 2) \quad (2.1)$$

が成り立つ.

定義 2.1 (Lascoux–Schützenberger 1982). 最長元 $w_0 \in S_n$ については,

$$\mathfrak{S}_{w_0} := \prod_{i+j \leq n} (x_i + b_j + \beta x_i b_j)$$

と定める. それ以外の元 $w \in S_n$ については, $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$ を満たす i を選び

$$\mathfrak{S}_{ws_i} := \pi_i(\mathfrak{S}_w)$$

と定める. これは, (2.1) より, i の選び方に寄らない.

2.3 Grothendieck 多項式とシューベルト類

直線束 L に対し, L の K 理論的な同変 Chern 類は $c_1(L) = 1 - [L^\vee]$ と定義できる. ここで $L^\vee$ は L の双対束を表す. 今, $\mathbb{C}^n$ の部分空間 $F^i := \langle e_n, \dots, e_{i+1} \rangle$ を考え, それをファイバーとする $Fl_n(\mathbb{C})$ 上のベクトル束を, 同じく F^i と表す. また, U_i を階数 i の $Fl_n(\mathbb{C})$ 上自己反復束とする. この時, 以下の事実が知られている.

定理 2.2 (Fulton-Lascoux [10]). $x_i = c_1((U_i/U_{i-1})^\vee)$, $b_i = c_1(F^{i+1}/F^i)$, $\beta = -1$ とおけば,

$$\mathfrak{S}_w(x|b) = [\mathcal{O}_{\Omega_w}]$$

が成立する.

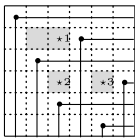
2.4 Essential box

置換 $w \in S_n$ に対し, $n \times n$ のマス目を考え, $(i, w(i))$ 成分に $\bullet$ を書く. その $\bullet$ から, 水平方向右および垂直方向下に線を伸ばし, $\bullet$ の右と下のマスを消す. 残ったマス目を, w のダイアグラムと呼び, $D(w)$ と表す. ダイアグラム $D(w)$ のそれぞれの連結成分の東南方向の角を, essential box と呼び, その集合を $Ess(w)$ と表す. また (p, q) 成分の階数を $r_w(p, q) := \#\{i \leq p \mid w(i) \leq q\}$, すなわち p 行 q 列までにある $\bullet$ の個数と定める. この時, 次の事実が知られている.

定理 2.3 (Fulton [9]).

$$\Omega_w = \{U_\bullet \in Fl_n(\mathbb{C}) \mid \text{rank}(U_a \rightarrow E/F^b) \leq r_w(a, b), \quad (a, b) \in Ess(w)\}.$$

例 2.4. $w = (142635) \in S_6$ とする. 下の図で, $D(w)$ は灰色のマスを, $\star$ は Essential box を表し, その横の数字は階数を表す. シューベルト部分多様体 Ω_w は以下の 3 つの条件で記される.



$$U_\bullet \in \Omega_w \iff \begin{cases} \text{rank}(U_2 \rightarrow E/F^3) \leq 1 \\ \text{rank}(U_4 \rightarrow E/F^3) \leq 2 \\ \text{rank}(U_4 \rightarrow E/F^5) \leq 3 \end{cases}$$

3 タブロー公式

3.1 vexillary 置換のタブロー公式

置換 $w \in S_n$ は, $w(j) < w(i) < w(l) < w(k)$ を満たす増加列 $i < j < k < l$ がないとき, vexillary 置換 (2143-avoiding) と呼ばれる. Fulton [9] は, 置換 w が vexillary であることと, essential box たちが北西から南西の方向に並んでいること, すなわち

$$Ess(w) = \{(p_1, q_1), \dots, (p_r, q_r) \mid p_1 \leq \dots \leq p_r, q_1 \geq \dots \geq q_r\}$$

のように表せることが同値であることを示した.

vexillary 置換 w に対しては, 次のように分割 $\nu_w = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ とその flagging $\phi_w = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ を与えることができる ([13] や [3] を参照). まず, ν_w のヤング図形は, ダイアグラム $D(w)$ のマスを北西方向に

寄せて得られる。これは次のようにも記述できる。 $i = 1, \dots, r$ に対して、 $k_i := p_i - r_w(p_i, q_i)$ かつ $d = k_r$ とおくと、 ν_w は、 k_i 行目に東南方向の角があり、 k_i 行目の箱の数は $\nu_{k_i} = q_i - p_i + k_i$ であるような最小のヤング図形である。また、flagging $f(w)$ は、 $\phi_k = p_i$ ($k_{i-1} < k \leq k_i$) と定める。 $|\nu_w|$ を ν_w の箱の合計数、すなわち $|\nu_w| = \nu_1 + \dots + \nu_d$ とする。 ν_w は w の長さ $\ell(w)$ と一致する。

分割 $\nu_w = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ とその flagging $\phi_w = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ に対し、旗付き集合値タブロー (flagged set-valued tableau) を考える。この場合、 ν_w の旗付き集合値タブロー T とは、 ν_w の i 行目のそれぞれの箱に $\{1, \dots, \phi_i\}$ の部分集合 (filling) を与える対応で、水平方向には右向きに非減少、垂直方向には下向きに増加であるものを言う。すなわち、箱 (i, j) の filling A と箱 $(i+1, j)$ の filling B については $\max(A) \leq \min(B)$ を満たすことと、箱 (i, j) の filling A と箱 $(i, j+1)$ の filling B については $\max(A) < \min(B)$ を満たすことが条件である。SVT(ν_w, ϕ_w) は、 ν_w, ϕ_w に関する旗付き集合値タブロー全体を表す。 $T \in \text{SVT}(\nu_w, \phi_w)$ に対し、その filling の元 e のことを entry と呼び、 $e \in T$ と表す。 $|T|$ は、 T の entry の総数とする。また $e \in T$ に対し、 $c(e)$ と $r(e)$ は、 e を含む filling の列番号と行番号をそれぞれ表し、 $\text{val}(e)$ は e の数としての値を表す。

例 3.1. $w = (254316) \in S_6$ を考えると、ダイアグラム $D(w)$ は図 1 のようになる。 $\text{Ess}(w)$ は北東から南西の方向に $(p_1, q_1) = (2, 4), (p_2, q_2) = (3, 3), (p_3, q_3) = (4, 1)$ のように並んでいるので、 w は vexillary 置換である。また、分割は $\nu_w = (3, 2, 1, 1)$ 、flagging は $\phi_w = (2, 3, 4, 4)$ であることがわかる。旗付き集合値タブローは、図 3 にすべてリストアップした。

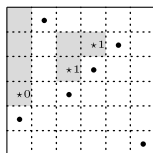


図 1

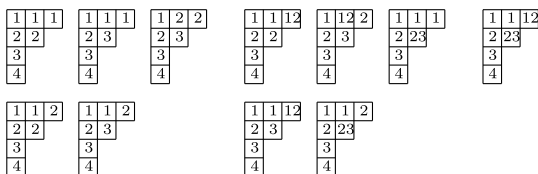


図 2

定理 3.2 (Knutson–Miller–Yong [13]). vexillary 置換 $w \in S_n$ に対し、

$$\mathfrak{S}_w(x|b) = \sum_{T \in \text{SVT}(\nu_w, \phi_w)} \beta^{|T| - |\ell(w)|} \prod_{e \in T} (x_{\text{val}(e)} \oplus b_{\text{val}(e) + c(e) - r(e)})$$

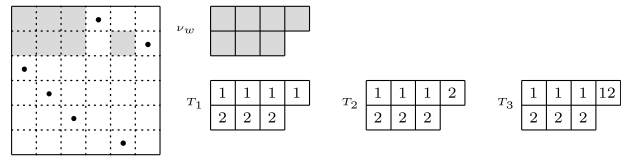
が成り立つ。ここで、 $x \oplus y = x + y + \beta xy$ とした。

差分作用素を用いた組合せ論的な証明は、一重 Grothendieck 多項式に関しては [16] を参照されたい。また、二重 Grothendieck 多項式の場合のその類似の証明は、[19] で執筆中である。

3.1.1 Vexillary 置換としてのグラスマン置換のタブロー公式

置換 $w \in S_n$ は、 $w(1) < \dots < w(d)$ かつ $w(d+1) < \dots < w(n)$ を満たす時、「 d で降下のグラスマン置換」と呼ばれる。グラスマン置換は、vexillary 置換であることは定義からわかる。また、essential box たちは常に d 行目にあること、flagging の値は常に d 、つまり $\phi_w = (d, \dots, d) =: \underline{d}$ であることに注意したい。定理 3.2 は、グラスマン置換の場合には、Buch [5] の一重 Grothendieck 多項式のタブロー公式、McNamara [20] の二重 (factorial) Grothendieck 多項式のタブロー公式に、一致する。

例 3.3. $w = (461235) \in S_6$ を考えると, $d = 2$ である. $D(w)$ と ν_w , 及び集合値タブローは以下のようになる.



$$\mathfrak{S}_{46|1235}(x|b) = ((x_1 \oplus b_4) + (x_2 \oplus b_5) + \beta(x_1 \oplus b_4)(x_2 \oplus b_5)) \prod_{i=1}^3 (x_1 \oplus b_i)(x_2 \oplus b_i)$$

3.2 321-avoiding 置換のタブロー公式

置換 $w \in S_n$ は, $w(i) > w(j) > w(k)$ を満たす増加列 $i < j < k$ が存在しない時, 321-avoiding と呼ばれる. この条件は, 数列 $(w(1), \dots, w(n))$ は, 2つの部分増加列に別れることと同値である. 特に, グラスマン置換は 321-avoiding であることは明らかである.

例 3.4. $w = (461235), (142635)$

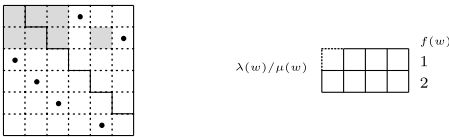
定義 3.5. 321-avoiding 置換 $w \in S_n$ に対し, skew partition $\lambda(w)/\mu(w)$ と flagging $f(w) = (f_1, \dots, f_d)$ を次のように定める.

- (1) $f(w) = (f_1, \dots, f_d)$ は, $w(f_i) > f_i$ を満たす $(1, \dots, n)$ の部分列とする.
- (2) $\mu(w) \subset \lambda(w)$ を満たす分割の組み $(\lambda(w), \mu(w))$ を

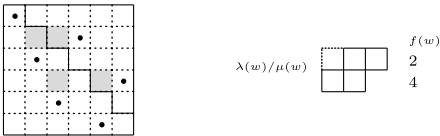
$$\lambda_i = (w(f_d) - d + i) - f_i, \quad \mu_i = (w(f_d) - d + i) - w(f_i), \quad i = 1, \dots, d$$

で定める.

例 3.6. $w = (461235)$ とすると, $f(w) = (1, 2)$ かつ, $\lambda(w) = (4, 4)$, $\mu(w) = (1, 0)$.



例 3.7. $w = (142635)$ とすると, $f = (2, 4)$ かつ $\lambda(w) = (3, 2)$, $\mu(w) = (1, 0)$.



定義 3.8. 上記の skew partition $\lambda(w)/\mu(w)$ と flagging $f(w)$ に対し, 旗付き集合値タブロー T を次のように定める. T は skew diagram $\lambda(w)/\mu(w)$ の集合値タブローであって, i 行目の filling は $\{1, \dots, f_i\}$ の部分集合であるとする. そのような旗付き集合値タブロー全体を $SVT(w)$ で表す.

例 3.9. $w = (461235)$

$$\lambda(w)/\mu(w) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} f(w) \\ 1 \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline 12 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

例 3.10. $w = (142635)$

$$\lambda(w)/\mu(w) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} f(w) \\ 2 \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 2 \\ \hline 23 & 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 12 \\ \hline 12 & 234 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 12 & 2 \\ \hline 3 & 34 & \\ \hline \end{array} \quad \dots$$

定理 3.11 (M. [16]). 321-avoiding 置換 $w \in S_n$ に対し、

$$\mathfrak{S}_w(x, b) = \sum_{T \in \text{SVT}(w)} \beta^{|T| - |\ell(w)|} \prod_{e \in T} (x_{\text{val}(e)} \oplus b_{\lambda_{r(e)} + f_{r(e)} - c(e) - \text{val}(e) + 1})$$

が成り立つ。

この公式は、一重 Schubert 多項式の場合の Billey–Jockusch–Stanley [4] の公式 (cf. [21]), 二重 Schubert 多項式の場合の Chen–Yan–Yang [6] の公式、一重 Grothendieck 多項式の公式 (Anderson–Chen–Tarasca [2], M. [18]) を一般化したものとなっている。次の節で説明する [16] で得られた定理 3.11 の証明は、これらの先行研究にある証明とは手段が異なり、差分作用素をうまく利用したものである。

3.3 定理 3.11 の証明

定理 3.11 の証明は以下のいくつかの補題に基づく。以下、 $w \in S_n$ を 321-avoiding 置換として、 $\lambda(w)/\mu(w)$ と $f(w) = (f_1, \dots, f_d)$ をそれに付随した skew partition および flagging とする。定理 3.11 の右辺を $\mathbb{T}_w(x, b)$ とおく。

補題 3.12. d で降下のグラスマン置換 $w \in S_n$ の場合、 $\mathfrak{S}_w(x, b) = \mathbb{T}_w(x, b)$ が成り立つ。

Proof. w に付随した分割 ν_w と skew partition $\lambda(w)/\mu(w)$ は、互いに 180° 回転すると一致する。またタブローの数字を $i \mapsto d - i + 1$ で置き換えると、タブローも一対一で対応することがわかる。 180° 回転した時の行番号と列番号の変化を考慮すれば、 $\mathbb{T}_w(x, b)$ と定理 3.2 の右辺が一致することがわかる。ただし、グラスマン置換 w の場合に、 $\mathfrak{S}_w(x, b)$ が x 変数に関する対称多項式になっているという事実も使う。 $\square$

補題 3.13. $f_i + 1 < f_{i+1}$ (もしくは $i = d$) かつ $f_i + 1 < w(f_i)$ を満たす i に対して、 ws_{f_i} は 321-avoiding 置換であり、

$$f(ws_{f_i}) = (f_1, \dots, f_{i-1}, f_i + 1, f_{i+1}, \dots, f_d) \quad (3.1)$$

$$\lambda(ws_{f_i}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_d) \quad (3.2)$$

$$\mu(ws_{f_i}) = \mu(w). \quad (3.3)$$

が成り立つ。

Proof. $ws_{f_i}(j) = w(j)$ for $j \neq f_i, f_i + 1$ であることに注目すると、 ws_{f_i} が 321-avoiding であることは、「2 つの部分増加列に分かれる」という 321-avoiding の特徴付けより明らかである。また $ws_{f_i}(f_i) = w(f_i + 1) \leq f_i + 1 \neq f_{i+1}$ かつ、 $ws_{f_i}(f_i + 1) = w(f_i) > f_i + 1$ より、(3.1) もわかる。残りは定義 3.5(2) より従う。 $\square$

補題 3.14. $f_i + 1 < f_{i+1}$ (もしくは $i = r$) かつ $f_i + 1 < w(f_i)$ を満たす i に対して、

$$\mathbb{T}_{ws_{f_i}}(x, b) = \pi_{f_i} \mathbb{T}_w(x, b). \quad (3.4)$$

が成り立つ。

補題 3.14 の証明は長くなるので省略する。論文 [16] を参照されたい¹。

定理 3.11 の証明: S_n のグラスマン置換で

$$u = (w(f_1), w(f_2), \dots, w(f_d), u_{d+1}, \dots, u_n)$$

を考えると、

$$w = u(s_d \cdots s_{f_d-1})(s_{d-1} \cdots s_{f_{d-1}-1}) \cdots (s_1 \cdots s_{f_1-1})$$

であることは容易にわかる。右から掛けられた互換の添え字を

$$(l_1, \dots, l_m) = (d, d-1, \dots, f_d-1, d-1, \dots, f_{d-1}-1, \dots, 1, \dots, f_1-1)$$

とおき、 $w_k := us_{l_1} \cdots s_{l_k}$ とすると、 w_k は 321-avoiding 置換であり、補題 3.13 より、

$$\mathbb{T}_{w_k s_{l_k}}(x, b) = \pi_{l_k} \mathbb{T}_w(x, b).$$

であることが言える。補題 3.12 より、 $\mathfrak{S}_u(x, b) = \mathbb{T}_u(x, b)$ なので、帰納法により $\mathfrak{S}_w(x, b) = \mathbb{T}_w(x, b)$ であることが示される。□

例 3.15. $w = (142635)$ に対しては、 $f(w) = (2, 4)$ なので、グラスマン置換 $u = (461235)$ を考えると $w = u(s_2 s_3) s_1$ であることがわかる。よって

$$\mathfrak{S}_w = \pi_1 \pi_3 \pi_2 \mathfrak{S}_u = \pi_1 \pi_3 \pi_2 \mathbb{T}_u = \mathbb{T}_w.$$

4 行列式公式

4.1 $G_m^{[p,q]}$ と Segre 類

Grothendieck 多項式の行列式公式を記述するために、次の多項式 $G_m^{[p,q]}$ を導入する。

定義 4.1. 非負整数 p, q に対し、 x 変数と b 変数の多項式 $G_m^{[p,q]} \in \mathbb{Z}[\beta][x, b]$ ($m \in \mathbb{Z}$) を次の母関数で定める。

$$G_u^{[p,q]}(x, b) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G_m^{[p,q]} u^m = \frac{1}{1 + \beta u^{-1}} \prod_{1 \leq i \leq p} \frac{1 + \beta x_i}{1 - x_i u} \prod_{1 \leq j \leq q} (1 + b_j(u + \beta)),$$

ただし、 $\frac{1}{1+y} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s y^s$ とする。

注 4.2. 定理 2.2 のように、 $x_i = c_1((U_i/U_{i-1})^\vee)$ 、 $b_i = c_1(F^{i+1}/F^i)$ で、変数を置き換えると、上記の $G_m^{[p,q]}$ は K 理論的 m 次相対 Segre 類 $\mathcal{S}((U_p - E/F^q)^\vee)$ と一致する。ここで、 E は $\mathbb{C}^n$ をファイバーとする自明束である。詳しくは、[11] を参照されたい。

¹証明の方法は、Wachs [21] が flagged Schur 多項式に関してタブロー公式を証明した方法に習っている。その方法はまず [18] において (一重) Grothendieck 多項式の場合に拡張され、[16] において二重 Grothendieck 多項式の場合にも適用できることが確認されたと言って良い。

4.2 vexillary 置換の場合の行列式公式

定理 4.3 (Anderson [1], Hudson–Matsumura[12]). w を *vexillary* 置換, $\nu_w = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, $\phi_w = (\phi_1, \dots, \phi_d)$ をそれに付随した分割と *flagging* とする。このとき、

$$\mathfrak{G}_w(x|b) = \det \left(\sum_{s=0}^{\infty} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\nu_i+j-i+s}^{[\phi_i, \nu_i+\phi_i-i]} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

が成り立つ。

定理??は、まずグラスマン置換の場合に幾何的な手法で証明された。[1] や [12] においては、同様の手法で幾何的に証明されている。グラスマン置換の場合の代数的な証明は [17] にある。また一重 Grothendieck 多項式の場合で、差分作用素を用いた代数的な証明も [18] で得られた（二重 Grothendieck 多項式の場合では、これと同様の証明を [19] に執筆中である）。

4.3 321-avoiding 置換の場合の行列式公式

定理 4.4 (Anderson–Chen–Tarasca [2]). 321-avoiding 置換 $w \in S_n$ とそれに付随した *skew partition* $\lambda(w)/\mu(w)$ と *flagging* $f(w) = (f_1, \dots, f_d)$ に対して、

$$\mathfrak{G}_w(x, b) = \det \left(\sum_{s \geq 0} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\lambda_i-\mu_j+j-i+s}^{[f_i, \lambda_j-\mu_j+f_j-1]} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

が成り立つ。

Anderson–Chen–Tarasca [2] は定理 4.4 を、[11] の幾何的な手法を拡張する形で示した。本稿では、差分作用素を使った代数的な証明を掲載しておく。定理 4.4 は、以下の補題 4.10 と補題 4.12（および補題 4.11）によって、定理 3.11 と同じように証明される。

4.4 完全対称多項式による行列式公式

上記の行列式公式は、完全対称多項式を用いて表すことができる。まず、以下の補題を用意する。

補題 4.5.

$$F_u = \sum_{\ell \geq 0} F_\ell u^\ell, \quad F_\ell \in \mathbb{Z}[\beta][x, b]$$

に対して、

$$\tilde{F}_u = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{F}_m u^m = \frac{1}{1 + \beta u^{-1}} F_{u+\beta} \quad (4.1)$$

と置くと、

$$\tilde{F}_m = \sum_{k \geq 0} \beta^k \binom{m+k-1}{k} F_{m+k} \quad (4.2)$$

が成り立つ。

Proof. (4.1) を計算すると

$$\tilde{F}_u = \frac{u}{u+\beta} \sum_{\ell \geq 0} F_\ell (u+\beta)^\ell = \sum_{m \leq 0} \beta^{-m} u^m F_0 + \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{k \geq 0} F_{m+k} \binom{m+k-1}{k} \beta^k \right) u^m$$

が得られるので、(4.2) が $m > 0$ で成り立つことがわかる。 $m \leq 0$ の時も成り立っているも確認できる ($\tilde{F}_m = \beta^{-m}(-1)^m F_0$)。□

定義 4.6. 完全対称多項式の変形 $h_m^{[p,q]}(y, b)$ を次の式で定める。

$$h_u^{[p,q]}(y, b) = \sum_{m \geq 0} h_m^{[p,q]}(y, b) u^m = \prod_{i=1}^p \frac{1}{1-y_i u} \prod_{i=1}^q (1+b_i u),$$

系 4.7. $\bar{x} = \frac{-x}{1+\beta x}$ と置くと、

$$G_m^{[p,q]}(x|b) = \sum_{k \geq 0} \binom{m+k-1}{k} \beta^k h_{m+k}^{[p,q]}(-\bar{x}|b). \quad (4.3)$$

が成り立つ。

Proof. $\frac{1}{1+\bar{x}(u+\beta)} = \frac{1+\beta x}{1-xu}$ であることから、

$$G_u^{[p,q]}(x, b) = \frac{1}{1+\beta u^{-1}} h_{u+\beta}^{[p,q]}(-\bar{x}, b) \quad (4.4)$$

が成り立つ。補題 4.5 より (4.3) を得る。□

関係式 (4.3) によって、定理 4.3, 4.4 は以下のように書き換えられる。

系 4.8. *Vexillary* 置換 w について、

$$\mathfrak{G}_w(x|b) = \det \left(\sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[\phi_i, \nu_i + \phi_i - i]}(-\bar{x}|b) \right)_{1 \leq i, j \leq d} \quad (4.5)$$

が成り立つ。

Proof. (4.5) は以下の計算から従う。

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\nu_i + j - i + s}^{[\phi_i, \nu_i + \phi_i - i]} &= \sum_{s \in \mathbb{Z}} \beta^s \left(\sum_{k \geq 0} \binom{i-j}{s-k} \binom{\nu_i + j - i + s - 1}{k} \right) h_{\nu_i + j - i + s}^{[\phi_i, \nu_i + \phi_i - i]}(-\bar{x}|b) \\ &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[\phi_i, \nu_i + \phi_i - i]}(-\bar{x}|b). \end{aligned}$$

□

系 4.8 の応用として、以下の公式が得られる。

補題 4.9. d で降下のグラスマン置換 w に対して、

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_w(x|b) &= \det \left(\sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\lambda_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[d+1-j, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b) \right)_{1 \leq i, j \leq d} \\ &= \det \left(\sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{i - j}{s} G_{\nu_i + j - i + s}^{[d+1-j, \nu_i + d - i]} \right)_{1 \leq i, j \leq d}\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $h_u^{[p, q]}(-\bar{x}, b) = (1 + \bar{x}_{p+1}u)h_u^{[p+1, q]}(-\bar{x}, b)$ より

$$h_m^{[p+1, q]}(-\bar{x}, b) = h_m^{[p, q]}(-\bar{x}, b) - \bar{x}_{p+1}h_{m-1}^{[p+1, q]}(-\bar{x}, b). \quad (4.6)$$

$g = (g_1 \geq \dots \geq g_d) \in (\mathbb{Z}_{>0})^d$ として、

$$D_g = \det \left(\sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[g_j, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b) \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

を考える。もし $g_{j-1} = g_j$ ならば、(4.6) を j 列目に適用すると

$$\begin{aligned}& \sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[g_j, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b) \\ &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[g_{j-1}, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b) - \bar{x}_{g_j} \sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - 1 - i + s}^{[g_{j-1}, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b)\end{aligned}$$

なので、

$$D_g = D_{g'} - \bar{x}_{g_j} D'$$

とできる。ここで g' は g の j 番目の成分 g_j を $g_j - 1$ に変えたものであり、 D' は D_g の j 列目をその $(j-1)$ 列目に置き換えたものである。よって、 $D' = 0$ なので $D_g = D_{g'}$ を得る。

系 4.8 より

$$\mathfrak{G}_w(x|b) = \det \left(\sum_{s \geq 0} \beta^s \binom{\nu_i + s - 1}{s} h_{\nu_i + j - i + s}^{[d, \nu_i + d - i]}(-\bar{x}|b) \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

なので、上記の置き換えを d 列目から 2 列目に順番に行い、さらに d 列目から 3 列目,... という順で行うと、最終的に補題 4.9 の式を得る。 $\square$

4.5 定理 4.4 の証明

$w \in S_n$ を 321-avoiding 置換として、 $\lambda(w)/\mu(w)$ と $f(w) = (f_1, \dots, f_d)$ をそれに付随した skew partition および flagging とする。定理 4.4 の式の右辺を $\mathbb{D}_w(x, b)$ とおく。

補題 4.10. グラスマン置換 $u = (w(f_1), w(f_2), \dots, w(f_d), u_{d+1}, \dots, u_n)$ に対し、 $\mathfrak{G}_u(x, b) = \mathbb{D}_u(x, b)$ が成り立つ。

Proof. u に付随した skew partition と flagging を $\bar{\lambda}/\bar{\mu}$ 、 $\bar{f}$ とする。この時、 $i = 1, \dots, d$ にたいし、

$$\begin{aligned}\bar{f}_i &= i \\ \bar{\lambda}_i &= (u(\bar{f}_d) - d + i) - \bar{f}_i = u(d) - d \\ \bar{\mu}_i &= (u(\bar{f}_d) - d + i) - u(\bar{f}_i) = u(d) - d + i - u(i) \\ \bar{\lambda}_i - \bar{\mu}_j &= u(j) - j = \nu_{d+1-j}\end{aligned}$$

であることがわかる。ここで、 ν は u に付随した分割とした。よって

$$\begin{aligned}\det \left(\sum_{s \geq 0} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\bar{\lambda}_i - \bar{\mu}_j + j - i + s}^{[\bar{f}_i, \bar{\lambda}_j - \bar{\mu}_j + \bar{f}_j - 1]} \right)_{1 \leq i, j \leq d} &= \det \left(\sum_{s \geq 0} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\nu_{d+1-j} + j - i + s}^{[i, \nu_{d+1-j} + j - 1]} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \\ &= \det \left(\sum_{s \geq 0} \binom{b-a}{s} \beta^s G_{\nu_a + b - a + s}^{[d+1-b, \nu_a + d - a]} \right)_{1 \leq a, b \leq d} \\ &= \mathfrak{G}_w(x|b)\end{aligned}$$

ここで、2 つ目の等号は $i = d + 1 - b$ 、 $j = d + 1 - a$ という置き換えをし、最後の等号は補題 4.9 を使った。 $\square$

補題 4.11 (Lemma 2.3 [18]). 正整数 i について、

$$\pi_i G_m^{[p, q]} = \begin{cases} G_{m-1}^{[p+1, q]} & i = p \\ -\beta G_m^{[p, q]} & i \neq p. \end{cases}$$

が成り立つ。

補題 4.12. $f_i + 1 < f_{i+1}$ (もしくは $i = r$) かつ $f_i + 1 < w(f_i)$ を満たす i に対して、

$$\mathbb{D}_{ws_{f_i}}(x, b) = \pi_{f_i} \mathbb{D}_w(x, b). \quad (4.7)$$

が成り立つ。

Proof. まず、差分作用素の性質として、 f が x_t と x_{t+1} に関して対称ならば、 $\pi_t(fg) = f\pi_t(g)$ が成り立つことに注意する。これにより、 $\mathbb{D}_w(x, b)$ の i 行目以外の行の成分が x_{f_i} と x_{f_i+1} に関して対称であることから、 $\pi_{f_i} \mathbb{D}_w(x, b)$ は $\mathbb{D}_w(x, b)$ の i 行目を

$$\left(\sum_{s \geq 0} \binom{i-j}{s} \beta^s G_{\lambda_i - 1 - \mu_j + j - i + s}^{[f_i + 1, \lambda_j - \mu_j + f_j - 1]} \right)_{j=1, \dots, d}$$

で置き換えたものであることがわかる。補題 3.13 より、これはまさに $\mathbb{D}_{ws_{f_i}}(x, b)$ であることがわかる。 $\square$

定理 4.4 の証明: 以上の補題より、定理 4.4 は、定理 3.11 と同様に示されることがわかる。 $\square$

References

- [1] ANDERSON, D. K-theoretic Chern class formulas for vexillary degeneracy loci. *ArXiv e-prints* (Jan. 2017).
- [2] ANDERSON, D., CHEN, L., AND TARASCA, N. K-classes of Brill-Noether loci and a determinantal formula. *ArXiv e-prints* (May 2017).
- [3] ANDERSON, D., AND FULTON, W. Chern class formulas for classical-type degeneracy loci. *ArXiv e-prints* (Apr. 2015).
- [4] BILLEY, S. C., JOCKUSCH, W., AND STANLEY, R. P. Some combinatorial properties of Schubert polynomials. *J. Algebraic Combin.* 2, 4 (1993), 345–374.
- [5] BUCH, A. S. A Littlewood-Richardson rule for the K -theory of Grassmannians. *Acta Math.* 189, 1 (2002), 37–78.
- [6] CHEN, W. Y. C., YAN, G.-G., AND YANG, A. L. B. The skew Schubert polynomials. *European J. Combin.* 25, 8 (2004), 1181–1196.
- [7] FOMIN, S., AND KIRILLOV, A. N. The Yang-Baxter equation, symmetric functions, and Schubert polynomials. *Discrete Math.* 153, 1-3 (1996), 123–143. Proceedings of the 5th Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Florence, 1993).
- [8] FOMIN, S., AND KIRILLOV, A. N. Grothendieck polynomials and the Yang-Baxter equation. In *Formal power series and algebraic combinatorics/Séries formelles et combinatoire algébrique*. DIMACS, Piscataway, NJ, sd, pp. 183–189.
- [9] FULTON, W. Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas. *Duke Math. J.* 65, 3 (1992), 381–420.
- [10] FULTON, W., AND LASCOUX, A. A Pieri formula in the Grothendieck ring of a flag bundle. *Duke Math. J.* 76, 3 (1994), 711–729.
- [11] HUDSON, T., IKEDA, T., MATSUMURA, T., AND NARUSE, H. Degeneracy loci classes in K -theory — determinantal and Pfaffian formula. *Adv. Math.* 320 (2017), 115–156.
- [12] HUDSON, T., AND MATSUMURA, T. Vexillary degeneracy loci classes in K -theory and algebraic cobordism. *ArXiv e-prints* (Jan. 2017).
- [13] KNUTSON, A., MILLER, E., AND YONG, A. Gröbner geometry of vertex decompositions and of flagged tableaux. *J. Reine Angew. Math.* 630 (2009), 1–31.
- [14] LASCOUX, A. Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, vol. 88 of *Progr. Math.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 1–34.

- [15] LASCOUX, A., AND SCHÜTZENBERGER, M.-P. Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 295, 11 (1982), 629–633.
- [16] MATSUMURA, T. A tableau formula of double Grothendieck polynomials for 321-avoiding permutations. *ArXiv e-prints* (Oct. 2017).
- [17] MATSUMURA, T. An algebraic proof of determinant formulas of Grothendieck polynomials. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 93, 8 (2017), 82–85.
- [18] MATSUMURA, T. Flagged Grothendieck polynomials. *ArXiv e-prints* (Jan. 2017).
- [19] MATSUMURA, T., AND SUGIMOTO, S. Factorial Flagged Grothendieck Polynomials, in preparation.
- [20] MCNAMARA, P. J. Factorial Grothendieck polynomials. *Electron. J. Combin.* 13, 1 (2006), Research Paper 71, 40 pp. (electronic).
- [21] WACHS, M. L. Flagged Schur functions, Schubert polynomials, and symmetrizing operators. *J. Combin. Theory Ser. A* 40, 2 (1985), 276–289.