

Remarks on n -cubic graphs

中部大学現代教育学部 金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Contemporary Education, Chubu University

n -立方体グラフ Q_n の 2-マッチングの個数と異なる 4-サイクル (四辺形) の個数を n が 10 以下の場合に計算する. 頂点の個数が n の完全グラフを K_n と記す. グラフ G の頂点集合を $V(G)$ で, 辺集合を $E(G)$ で表わす. また位数 n のグラフ G の固有多項式を

$$f(\lambda, G) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + C_2\lambda^{n-2} + C_3\lambda^{n-3} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

で表わし, また $n(G)_M, n(G)_C$ (または n_M, n_C) でグラフ G の 2-マッチングの個数と異なる 4-サイクル (四辺形) の個数を表わすことにする. またグラフ G の彩色数を $\chi(G)$ で表わし, 辺彩色数を $\chi'(G)$ で表わす.

グラフ G_1 とグラフ G_2 のデカルト積 $G = G_1 \times G_2$ とは, 点集合 $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ をもち, かつ G の 2 つの頂点 $(a, b), (x, y)$ が $a = x$ かつ $[b, y] \in E(G_2)$ または $b = y$ かつ $[a, x] \in E(G_1)$ のときに限り隣接するように定められたグラフのことをいう.

まず n -立方体グラフの定義からはじめよう.

定義 1 ([N]) グラフ Q_n が n -立方体グラフとは, $n = 1$ のとき K_2 , $n \geq 2$ のときは, $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$ (デカルト積) によって帰納的に定義されるグラフである.

定義 2 ([Y], p.145) d, q を自然数とし, $d \geq 2$ とする. このとき, X を q 個の元からなる集合として,

$$V = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_i \in X\},$$

$E = \{u-v \mid u = (a_1, a_2, \dots, a_d), v = (b_1, b_2, \dots, b_d) \in V, a_i \neq b_i \text{ となる } i \text{ は } 1 \text{ つだけ}\}$ によって定められるグラフ $H(d, q) = (V, E)$ をハミンググラフという.

この n -立方体グラフ Q_n は 2^n の頂点を 2 進 n 組 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ($a_n = 0$ または $1, n \geq i \geq 1$) でラベル付け, それらの 2 点是对応する 2 つの 2 進 n 組が丁度 1 箇所だけ異なるとき, かつそのときに限り隣接させてできるグラフと同型である. これはハミンググラフの特別なもの $H(d, 2)$ である. 並列処理をするとき CPU 間でのデータ交換に効率がよいので, 並列計算機の CPU の結線構造として利用されている.

補題 1 (握手補題). G は頂点数 (位数) p で辺の個数 (サイズ) が q で, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ とする. このとき,

$$\sum_{i=1}^p \text{degree}(v_i) = 2q.$$

n -立方体グラフ Q_n の各頂点の次数は n であり, 頂点数 (位数ともいう) は 2^n , 辺数 (サイズ) は $n2^{n-1}$ である. これは握手補題より出てくる. 2つの $n-1$ 立方体グラフ Q_{n-1} を左右に並べて, 同一頂点どうしをすべて辺で結べば Q_n を書くことができる.

定義 3 ([N]) 連結グラフ G が距離推移グラフであるとは, 距離 $d(a, b) = d(x, y)$ を満たす G の任意の頂点 a, b, x, y に対して $x = \alpha(a), y = \alpha(b)$ を満足するグラフ G の自己同型写像 α が存在するときをいう.

Q_n は次数 n , 直径 n である位数 2^n の距離推移グラフである. 連結グラフ $G, v \in V(G)$ に対して, $\Gamma_i(v) = \{u \in V(G) \mid d(u, v) = i\}$ ($i = 0, 1, \dots, d$), ここで d はグラフ G の直径とする.

定義 4 ([N, p. 194]) 直径が d で次数が k である連結な正則グラフ G が, 次の条件を満たすとき距離正則グラフという.

(条件) 距離 $d(u, v) = j$ を満たすグラフの任意の頂点 u, v に対して

(1) u に隣接する $\Gamma_{j-1}(v)$ における頂点の個数は c_j ($j = 1, 2, \dots, d$)

(2) u に隣接する $\Gamma_{j+1}(v)$ における頂点の個数は $b c_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, d-1$)

となるような整数 $b_0 = k, b_1, \dots, b_{d-1}, c_1 = 1, c_2, \dots, c_d$ が存在するときをいう.

距離推移グラフは距離正則グラフであるから, Q_n は距離正則グラフである. 従って n -正則グラフでもある.

さて [N] によれば, n -立方体グラフ Q_n のスペクトル $\text{Spec}(Q_n)$ は,

$$\text{Spec}(Q_n) = \begin{pmatrix} n & n-2 & n-4 & \cdots & -(n-2) & -n \\ {}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 & \cdots & {}_nC_{n-1} & {}_nC_n \end{pmatrix}$$

補題 2 ([T, 定理 2.2.11]). 連結グラフ G が二部グラフであるための必要十分条件は, G の最大固有値を λ とするとき G が $-\lambda$ を固有値として持つことである.

補題 2 より, n -立方体グラフ Q_n は正則二部グラフであることがわかる.

定義 5 ([N]) グラフ G の全域部分グラフで木になるものを G の全域木という. グラフ G の全域木の個数をグラフ G の複雑度という.

補題 3 ([T, 定理 2.3.3]) グラフ G が連結で位数 p の r -正則グラフとする. G のスペクトル $\text{Spec}(G)$ が

$$\text{Spec}(G) = \begin{pmatrix} r & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & m_2 & \cdots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

とする. このとき G の複雑度 $K(G)$ は

$$K(G) = p^{-1} \prod_{i=1}^{s-1} (r - \lambda_i)^{m_i} = p^{-1} f'(r, G)$$

で与えられる. ここに, p はグラフ G の位数, $f'(\lambda, G)$ は G の固有多項式 $f(\lambda, G)$ の導関数で $f'(r, G)$ はその r における値とする ([T, 定理 2.3.3]).

定義 6. 2つの辺の対 $\{e, f\}$ が 2-マッチングであるとは, e と f が共通の頂点を両端に持たないときをいう.

補題 4 ([Y. Jin and M. Kanemitsu, 定理 2.3]) G を位数 n の単純グラフとし, $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ を次数列とする. このとき, 2-マッチングの個数 n_M は次式で与えられる.

$$n_M = \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n d_i.$$

定理 5. n -立方体グラフ Q_n の 2-マッチングの個数 $n(Q_n)_M$ は次式で与えられる.

$$n(Q_n)_M = 2^{n-2} n \{ (2^{n-1} - 2)n + 1 \}.$$

定理 5 より, $n(Q_n)_C = \frac{1}{2}(n(Q_n)_M - C_4)$ で求めることができる.

以下 $10 \geq n$ に対して n -立方体グラフ Q_n の具体例を考察しよう.

(1) $n = 1$ の場合.

$Q_1 = K_2$ である. 従って位数 2, サイズ 1 である. 彩色数は $\chi(Q_1) = 2, \chi'(Q_1) = 1$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_1)$ は

$$f(\lambda, Q_1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = \lambda^2 - 1.$$

従って, $n(Q_1)_M = 0, n(Q_1)_C = 0$.

複雑度 $K(Q_1) = [\frac{1}{2} \times 2\lambda]_{\lambda=1} = [\lambda]_{\lambda=1} = 1$.

(2) $n = 2$ の場合.

$Q_2 = Q_1 \times K_2 = K_2 \times K_2$ である. 従って位数 4, サイズ 4 である. 彩色数は $\chi(Q_2) = 2, \chi'(Q_2) = 2$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_2)$ は

$$f(\lambda, Q_2) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)\lambda^2 = \lambda^4 - 4\lambda^2.$$

従って, $n(Q_2)_M = 2, n(Q_2)_C = 1$. $K(Q_2) = [\lambda^4 - 2\lambda]_{\lambda=2} = 6$.

(3) $n = 3$ の場合.

$Q_3 = Q_2 \times K_2 = K_2 \times K_2 \times K_2$ である. 従って位数 8, サイズ 12 である. 彩色数は $\chi(Q_3) = 2, \chi'(Q_3) = 3$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_3)$ は

$$f(\lambda, Q_3) = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^{3C_1}(\lambda + 1)^{3C_2}(\lambda + 3) = \lambda^8 - 12\lambda^6 + 30\lambda^4 - 28\lambda^2 + 9.$$

従って, $n(Q_3)_M = 12, n(Q_3)_C = 6$. また $K(Q_3) = [\lambda^7 - 9\lambda^5 + 15\lambda^3 - 7\lambda]_{\lambda=3} = 114$.

(4) $n = 4$ の場合.

$Q_4 = Q_3 \times K_2$ である. 従って位数 2^4 , サイズ $4 \cdot 2^3$ である. 彩色数は $\chi(Q_4) = 2, \chi'(Q_4) = 4$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_4)$ は

$$f(\lambda, Q_4) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)^{4C_1}\lambda^{4C_2}(\lambda + 2)^{4C_3}(\lambda + 4) = \lambda^{16} - 32\lambda^{14} + 352\lambda^{12} - 1792\lambda^{10} + 4352\lambda^8 - 4096\lambda^6 + \dots$$

従って, $n(Q_4)_M = 400, n(Q_4)_C = 24$.

また $K(Q_4) = [\lambda^{15} - 28\lambda^{13} + 264\lambda^{11} - 1120\lambda^9 + 2176\lambda^7 - 1536\lambda^5 + \dots]_{\lambda=4}$.

(5) $n = 5$ の場合.

$Q_5 = Q_4 \times K_2$ である. 従って位数 2^5 , サイズ $5 \cdot 2^4$ である. 彩色数は $\chi(Q_5) = 2, \chi'(Q_5) = 5$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_5)$ は

$$f(\lambda, Q_5) = (\lambda - 5)(\lambda - 3)^{5C_1}(\lambda - 1)^{5C_2}(\lambda + 1)^{5C_3}(\lambda + 3)^{5C_4}(\lambda + 5) = \lambda^{32} - 80\lambda^{30} + 2680\lambda^{28} - 50160\lambda^{26} + 586140\lambda^{24} - 4516176\lambda^{22} + \dots$$

従って, $n(Q_5)_M = 2840, n(Q_5)_C = 80$.

(6) $n = 6$ の場合.

$Q_6 = Q_5 \times K_2$ である. 従って位数 2^6 , サイズ $6 \cdot 2^5$ である. 彩色数は $\chi(Q_6) = 2, \chi'(Q_6) = 6$. また, この場合の固有多項式 $f(\lambda, Q_6)$ は

$$f(\lambda, Q_6) = (\lambda - 6)(\lambda - 4)^{6C_1}(\lambda - 2)^{6C_2}\lambda^{6C_3}(\lambda + 2)^{6C_4}(\lambda + 4)^{6C_5}(\lambda + 6) = \lambda^{64} - 192\lambda^{62} + 16896\lambda^{60} - 908800\lambda^{58} + 33592320\lambda^{56} - 909139968\lambda^{54} + \dots$$

従って, $n(Q_6)_M = 17376, n(Q_6)_C = 6000$.

以上をまとめると次のようになる.

定理 6. n - 次立方体グラフ Q_n について次のことが成立する.

- (1) Q_n の位数は 2^n で、サイズは $2^{n-1}n$ で直径が n の距離推移グラフであり、従って距離 $(n-)$ 正則グラフであるような 2 部グラフである.
- (2) 彩色数 $\chi(Q_n) = 2$, 辺彩色数 $\chi'(Q_n) = n$ である.
- (3) Q_n の固有多項式 $f(\lambda, Q_n)$ は、固有値に $n, -n$ を持ち、 $f(\lambda, Q_n) = \lambda^n - 2^{n-1}n\lambda^{n-2} + [\{2^{n-2}n(2^{n-1} - 2)n + 1\} - n(Q_n)_C]\lambda^{n-4} + \dots$ の形である.
- (4) $10 \geq n \geq 7$ に対して、 $C_n, n(Q_n)_M$ と $n(Q_n)_C$ を列挙すると次のようになる.
 $C_7 = 96096, n(Q_7)_M = 97440, n(Q_7)_C = 672.$
 $C_8 = 513024, n(Q_8)_M = 516608, n(Q_8)_C = 1792.$
 $C_9 = 2625408, n(Q_9)_M = 2634624, n(Q_9)_C = 4608.$
 $C_{10} = 13035520, n(Q_{10})_M = 13058560, n(Q_{10})_C = 11520.$
- (5) Q_n の複雑度 $K(Q_n) = \frac{1}{2^n} f'(n, Q_n).$

参考文献

- [JK] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with Z_n and their characteristic polynomials, *International J. of Applied Math. and Statistics*, vol. 11 No. VO7 (2007), 81-93.
- [N] 仁平政一・西尾義典, グラフ理論序説, 2005 プレアデス出版.
- [T] 竹中淑子, 線形代数的グラフ理論, 1989 培風館
- [Y] 芳沢光雄, 置換群から学ぶ組合わせ構造, 2004 日本評論社.