

## 数式処理と数値計算の素材

日本大学生物資源科学部 五十嵐正夫 (Masao IGARASHI)

College of Bioresource Sciences, Nihon University

日本大学生物資源科学部 根本洋明 (Hiroaki NEMOTO)

College of Bioresource Sciences, Nihon University

北里大学一般教養部 谷口哲也 (Tetsuya TANIGUCHI)

Kitazato University College of Liberal Arts and Sciences

### 1 はじめに

数学ソフトウェアは現在、数式処理ソフト、数値解析ソフト、統計解析ソフトの3つに区分されているようである。歴史的には数学ソフトウェアは、FORTRANなどで書かれた科学技術計算用の計算ルーチンであり、この数理解析研究所の1979年の講究録 [1] には、浮動小数点演算、フーリエ変換、ベンチマーク・テスト、基本外部関数と言った用語がふんだんに用いられている。

その翌年の講究録 [2] では数式処理システム VAXYMA の話題があり、1985 年講究録 [3] では「数式処理技術を活用した中学数学教育支援システム」と言った講演も行われている。この年には「コンピュータと数学教育 [4]」も出版された。

ここでは、FORTRAN で数値計算を行い、mu-MATH の数式処理にやや物足りなさを感じた教員等が、大学の1年生を主な対象として教室（講義室、演習室、実験室）で、数学ソフトウェアを利用し、教育効果の向上を計るために利用している素材、さらに古典的な数値計算の素材を数式処理に再利用し、数値計算と数式処理の交流をもとにした数学ソフトウェアの活用事例を報告する。

### 2 講義形態

ほとんどの学生はネットに接続された端末を持ち授業に臨んでいる。使い勝手では教室に設置されたパソコンの方が良いが、手軽さと個別化からすると、スマホ等の方が勝るようである。最初は教員の板書をノートに取り、演習例題を自分で考えていた学生も、だんだんと要領を覚え「検索とコピー・ペースト」に走るようになる。つまり、無意識のうちに自分で考える事を放棄する傾向が見えてくる。このことは教育にとって好ましいことではない。

そこで我々は次のようなことを心がけて、いわゆる「情報」関係の講義や演習を行うようにしている。このことは非常勤の先生とも会合を持ち、ご相談し、お願い申し上げている。

その内容は次のようになっている。

- (1) 学生同士が相談しやすい教室環境
- (2) 学生を能動的にさせる素材の提供
- (3) 学生の努力を積極的に評価するシステム

## 2.1 学生同士が相談しやすい教室環境

講義を受講している学生の「力量の差異」は大きい。どのレベルに焦点を合わせて講義を展開するかは、個々の教員の判断に委ねられているが、教員1人と数人のTAでは、50名、60名の学生の質問に手が回らない事がある。例えば、アルファベットの太文字、小文字を切り替えながら資料やプログラムを作るときの全角、半角の空白処理に関しては、多くの学生から一度に手が上がる。そんな時、手を上げた学生の周辺で「既にできた学生」は、隣の学生がなぜ手を上げているかよく分かっている場合が多い。そんなとき「隣の友人が聞きやすい、隣の友人に教えやすい」ように、学生は矩形グループ型に座るようになっている。この配置により、前後左右の学生、とくに背中合わせに座っている学生に相談・質問し易くなる。

もう一つの理由は、特定の事柄に関して教える側の教員の力量を遙かに超えた知識や技術を持っている学生が間々いるということである。これは非常に助かることで、その学生の手を借りると、講義や演習が非常に和やかになる場合が多い。その学生は「先生を助ける（教える）」ことを目的として、さらに事前勉強をしてくる場合が多い。余談になるが我々は小学校からこんな風にしておだてられて育ってきた、のではないかと思うときもある。

## 2.2 学生を能動的にさせる素材の提供

大学、学部、学科によって、学生を能動的にさせる素材は、様々であると思われる。我々の属する学部は生命、環境、生物等を主に扱っている。講義や演習は「学科別」と「学科の枠組みがない」場合がある。ただ1年次生が主となっているので、共通素材が多い。素材には、物と題材があるが、能動的にさせる素材の多くは、意外性のある物が多い。最近利用した素材とその反応を順不同であげると次のようになる。

### (1) 数学Bの教科書

相関係数を教えるためにベクトルの内積と余弦定理の復習に高校時代の教科書を教室に持ち込む場合がある。学生の反応は「懐かしい」が多い。与えられたデータを基準化（平均ゼロ，分散1）して、生データと基準化した後のデータの相関係数をエクセルを使って計算させ、それらが等しくなる事を確

かめさせる。これらの計算において、標本の平均値や分散値を置いたセルの絶対参照が必要となる。教員がそのことを忘れたときに、「学生の知識」が有効となる。

## (2) ソロバン

ほとんどの学生は小学校時代にソロバンを習っている。ソロバン珠はビットを教えるのに便利である。また、2進数、5進数、10進数、位取り、補数計算等を教えるのに役立つ。このとき Windows のアクセサリーとして付属している「電卓」の関数計算を必ず紹介するようにしている。16進数計算などが簡単にできる反面、10進小数の、例えば0.8を2進数に展開すると0となるような陥穽があるからである。

余談ではあるが、特にソロバンの上の5珠と下の1珠の仕切りを「梁」、珠の通っているひごを「軸」と言うことを教え、「梁軸」を数学Cでは「行列」と言うと、馬鹿受けする事が多い。

## (3) 電卓

著者の1人は昔からHPの電卓を利用している。普通の電卓が「横書き」計算とすると、この電卓は「縦書き」計算である。逆ポーランド方式の入力方法を教えないで、学生にこの電卓で足し算を計算させるわけである。学生が一樣に驚くのはイコールのキーが無いことである。実用上はもちろんのこと、色々な電卓の種類があることを教えるのに役立つ。

## (4) 有効数字・有効桁数・精度桁数

例えば有効数字に関しては「正しいと確信できる数字」と言ったような教え方しかできない。正しいと確信できる数字がともに3桁の数字の乗算結果がまた3桁となる保証はないが、測量学のように有効数字以外は書かないと教えるのは良いことだと思う。加減算においては、それに加えて「桁落ち」を考えなくてはいけない場合がある。これには、2次方程式の解を「解の公式」を使って求めさせる場合の、有理化の例題が便利である。

学生は $n$ を大きくすると $1/1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ の値がいくらでも大きくなることは知っている。ところがこの値をパソコンで計算させると $n$ をいくら大きくしても無限大になりそうもなく、せいぜい20程度に停留することに驚く。この計算を正順とし、今度は逆順の $1/n + 1/(n-1) + \dots + 1/1$ で計算させることにしている。大きな $n$ に対して、両者の値が異なることにもビックリする。そのとき、大きな $n$ に対して数式処理計算をするとパソコンの能力を超えることも併せて教えることにしている。

## 2.3 学生の努力を積極的に評価するシステム

学生の努力が見える形で成績に反映させると、学生は積極的に学習するようになる。その一つの方法として、定期試験、小テスト、レポートの評価法の明示以外に、日常の授業において学生が次のようなことを行った場合、追加点評価することになっている。その結果は一覧表にして、いつでも本人に提示できるようにしている。

- (1) 教員が黒板に書いた問題を黒板で解答した場合
- (2) 誰もが聞きたいと思っている質問をした場合
- (3) 教員の質問に対して積極的に応答した場合
- (4) 教員の講義中の「誤り」を指摘した場合
- (5) 別解を提案した場合

教卓の上に1冊のノートを用意し、そのノートに学生の名前を書かせ、授業後TAに集計させている。集計結果は平常点として成績に加算している。学生の要望があれば、その学生の定期試験結果、小テスト結果、レポート評価点、平常点、それらの原本を見せることにしている。

## 3 講義の素材

「新旧取り混ぜて」講義の素材とするよう心がけている。「無料アプリ LINE やソーシャルゲーム」に関しては、図書館が契約している新聞社系のデータベースを利用して、課題や問題点を考えさせるようにしている。無料ソフトを提供する側の利益やゲームの課金方法等に意外と無知な場合が多い。これらの話題は講義の「まくら」として、利用価値が高いと思っている。

### 3.1 ハイブリッド

著者らの学部は、受験産業からは農学系と呼ばれる学科もあり、情報科学の時間で「ハイブリッド」と言うと「雑種」とか「交雑種」、あるいはハイブリッド車を思い浮かべる学生もいる。そこでこの言葉を利用して講義を始める場合もある。

計算機の世界でハイブリッドと言うと、アナログ計算機とデジタル計算機の組み合わせを意味した。アナログは計算結果を得るのは早いけど精度桁数の少なさで問題があり、一方デジタルは精度桁数に関しては満足できるが、出力までの時間がかかる難点があった。そこで両方の長所を組み合わせた計算機がハイブリッド計算機と呼ばれた。アナログで粗い解を求め、その解をデジタル計算機に引き渡

し、数値計算の時間を短縮させようと試みたわけである、と言ったことを先ず強調するようにしている。

講義内容の素材としてのハイブリッドは数式処理と数値計算の交流である。数式処理で問題を作成し、目的とする解が数値計算で得られたかを実験し、得られなかった場合の原因を学生自身に考えさせるようにしている。

### 3.2 小さな差異

与えられたデータ  $\{x_i\}$  を加工し、データの平均値を 0、分散を 1 とする演習問題をする。新データの平均値が 0 であるか、否かを確かめさせることにしている。その計算結果が、例えば  $1.582346E-15$  となると、学生は  $E-15$  の意味を質問してくる。

それを素材として数の実数型、整数型などを教え、10 進数小数 0.8 の 2 進小数展開を説明することになっている。

$$0.8_{10} = 0.110011001100\cdots_2 = 0.\dot{1}100_2$$

であるから、2 進数展開すると有限桁内では 0.8 は収まらないことになる。

さらに問題を  $5.8_{10}$  とする、 $5.8_{10} = 5_{10} + 0.8_{10}$  とすることに戸惑う学生もでてくる。

この差異はごく小さいのであまり強調する必要はないが、小さな差異でも、無視できない場合のあることは次のような例で強調することになっている<sup>1</sup>。

問題 ①と②の連立 1 次方程式の解を求めなさい。

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + 5y = 17 \\ 1.500x + 7.501y = 25.503 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + 5y = 17 \\ 1.500x + 7.501y = 25.500 \end{cases}$$

解答 ①は  $x = 2, y = 3$ , ②は  $x = 17, y = 0$  となり、小さな差異が解の大きな変化になることがわかる。もちろんこのような大きな差異となる原因も教えることにしている。

### 3.3 逆方向からの見方

次の節でみるように、最小 2 乗法やニュートン法が必要となる場合がある。最小 2 乗法の説明においては、最大値・最小値、極大値・極小値に関しては細かく説明

<sup>1</sup> 日科技研通信教育テキスト, 1970, p.9

しないことにしている。2次関数の最小値だけで説明することになっている。1年生は偏微分の概念すら習っていない場合もあるので、MathematicaのPlot3Dを利用しPlot3D[x^2 + y^2, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}]の図を書かせ、曲面の切り口から偏微分の概念を教えている。さらにやや複雑な曲面にして、その曲面をマウスで回転させると学生はビックリする。

ニュートン法では、 $f(x) = 0$ の数値解 $x'$ を求めることは $f(x')$ の精度桁数のない $x'$ を探すことだ、と教えている。精度ある数値解を求めるには、精度のない関数値を探さなければならないことを、些か逆説的であるが強調している。もちろん、 $y = f(x)$ のグラフの接線を用いての図的な説明も行う。

前に述べたハイブリッド的な利用法であるが、数式処理ソフトは多項式の展開が簡単にできる。この機能と多項式のゼロ点を求める機能を用いると、厳密解の分かった数値例を学生自身が作り、その数値解を学生自身が求めることができる。教員が多倍長計算をして厳密な多項式の係数を求め、例題を作る手間が省けるわけである。

計算機を利用した学習項目の中には「例題で説明すると一目瞭然」の現象が多くあるが、この両機能の併用は「例題作り、課題検討」に便利である。

### 3.4 非線形 Fitting

京都での研究会なので、京都の最高気温と最低気温データを非線形 Fitting の素材として紹介する。図1は左側が1881年からの最高温度、右側が最低温度の月ごとの記録である。このデータは気象庁のホームページから得ることができる。

そこでこの図から、月変数に対しては周期的、年変数に関しては線形型のモデルを教員が提示する。この際、測定誤差項やカタストロフィー的な項は除外することになっている。

点はデータ、細かい上下の曲線はそれらのデータに対して得られた曲線、両図は点と曲線を重ね合わせたものがある。この図を学生に見せて最高気温、最低気温の傾向を読み取らせる。多くの学生は最高気温の上昇傾向より、最低気温の上昇傾向の方が高いことに気づく。さらにデータのなかに、右から左への筋状の流れがあることにも気がつく。図中に拡大Aと拡大Bがあるが、これは1年間(2010年1月~2010年12月)部分の曲線を拡大して見せると次の図2になるということである。ただしこの図の場合、他の地域と比較するためにデータは10年区切り、すなわち1890年からとしている。図の中の点は各月の5年平均の気温を示している。最高気温においても、最低気温においても従来に比べて8月の気温の高いことが示されている。

図1では、1881年1月から2010年12月までのデータを用いたが、データをもう少し小さく、例えば1950年1月から2010年12月などにとすると違った様相がみられる。このような処理はMathematicaを利用すると簡単にできる。

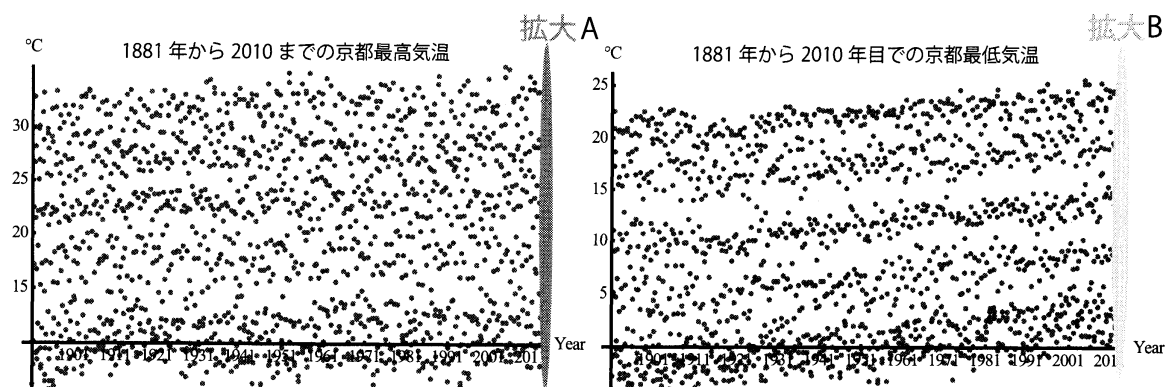


図 1: 1881 年 1 月から 2010 年 12 月までの月ごとの気温データ（点）と得られた非線形曲線

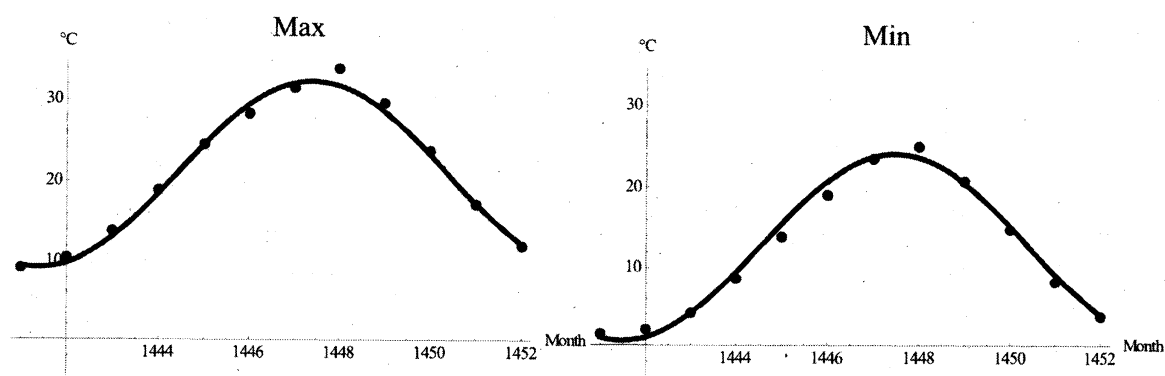


図 2: 2010 年 1 月から 12 月までの曲線部分を拡大し、最新 5 年間の月ごとの平均値データを点で表し付け加えた

## 4 おわりに

ここで行われた研究集会の講究録が常に作成されるわけではないが、第 1 章では講究録に現れる「数学ソフトウェア」を調べてみた。どうも 1979 年が最初のようである<sup>2</sup>。

第 2 章では著者らが講義などを行うとき、心がけていることをまとめてみた。一言で言えば学生の努力や活動を積極的に評価し、身近な素材に味付けし提示することが大事と思われる。

第 3 章では講義の素材を 4 つあげてみた。

- (1) 教員が用いるハイブリッドと学生が理解しているハイブリッドには、意味の違う場合が多く、その意味違いを利用して講義を行うと「講義か活性化」す

<sup>2</sup>ソフトウェアはハードウェアと同時に誕生したはずであるから 1940 年代と思われる。

る場合が多い。

- (2) 数値の浮動小数点表示を知らない学生が多い。数式処理ソフトを教える場合は、そのような数表現のあることを強調する必要があると思っている。
- (3) 図を書かせ、それを回転させたりしながら講義を進めると、学生の理解度は深まるようである。特に「逆方向」からみる習慣を身につける必要があると考えている。
- (4) 地球の気温変化の動向については様々な意見がある。それを学生自身が考える取っ掛かりとなるよう Mathematica の関数を講義に利用している。プログラム自体は 20 行程度である。

生命・環境・生物系の学部は文系・理系の区分からすれば理系に近い学部である。数学が不得手だから生物系の学科を選んだ、環境系の学科を選んだと言う学生が多い。ところが入学してみると「数理系」の知識を必要とする科目、学習項目が案外と多い。その拒否感を払拭するには様々な方法があると思われるが「自主的な学習」、「積極的な評価」、「身近な素材」等が一つの解決策となるのではないか、との立場から数式処理や数値計算の利用方法を考えてみた。

## 参考文献

- [1] 一松 信（研究代表者）、数学的ソフトウェアの評価、数理解析研究所講究録, 359, 1979.
- [2] 一松 信（研究代表者）、数式処理と数学研究への応用、数理解析研究所講究録, 406, 1980.
- [3] 一松 信（研究代表者）、数式処理と数学研究への応用、数理解析研究所講究録, 551, 1985.
- [4] 竹之内脩編、コンピュータと数学教育、日本評論社、1985.