

A calculus approach to hyperfunctions

名大理学部 松澤 忠人

(Tadato Matsuzawa)

$K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト集合とするとき K に support をもつ 解析的汎関数の空間を $A[K]$ とかきう。
即ち $u \in A[K]$ とは $\mathbb{C}^n$ 上の 整関数の空間 $A = A(\mathbb{C}^n)$ 上の 線型汎関数であって、任意の複素近傍 $\omega \supset K$ に
 $\bar{\omega}$ に対して

$$(1) \quad |u(\varphi)| \leq C_\omega \sup_{\omega} |\varphi|, \quad \varphi \in A$$

の形の評価式が成り立つものをいう。 n -次元熱核
 E

$$E(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

とかきう。 すると $u \in A[K]$ に対して、

$$U(x, t) \equiv u_y(E(x-y, t)) \in C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1}),$$

$$\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; t > 0\}.$$

定理 1. (cf. [2]) $u \in A'[K]$ とする。

$$(i) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) U(\alpha, t) = 0 \quad \text{in } R_+^{n+1};$$

$$(ii) \quad |U(\alpha, t)| \leq C_\varepsilon \exp\left[-\frac{\varepsilon - \text{dis}(\alpha, K)^2}{4t}\right] \quad \text{in } R_+^{n+1}, \varepsilon > 0;$$

$$(iii) \quad \int_{R^n} U(\alpha, t) \chi(\alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \rightarrow u(\varphi) \quad \text{as } t \rightarrow 0_+, \varphi \in A,$$

$$\chi \in C_0^\infty(R^n), \chi \equiv 1 \text{ in a nbd of } K.$$

逆に $U(\alpha, t) \in C^\infty(R_+^{n+1})$ が条件 (i) と (ii) を満たすならば、一意的に $u \in A'[K]$ が存在して

$$U(\alpha, t) = u_y(E\alpha - y, t), \quad (\alpha, t) \in R_+^{n+1}$$

の形に表わされる。

この定理は [2] で証明される。

次に $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界開集合とする。この時

$$\mathcal{B}(\Omega) = A'[\bar{\Omega}] / A'[\partial\Omega]$$

のように定義する。

$\beta(R^n)$ の定義を与えよう。 $\Omega_j \subset R^n$ は有界開集合で $\bigcup_{j=1}^n \Omega_j = R^n$ となっておりとする。 二つとき

$$u_j \in A'[\bar{\Omega}_j], \quad j=1, 2, \dots, \text{ であって}$$

$$(2) \quad u_j = u_k \quad \text{on } \Omega_j \quad \text{if } 1 \leq j < k < \infty$$

なる条件を満たす列 $u \equiv \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ の集合を $\beta(R^n)$ と定義する。 この定義が上記のような $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ のとり方に関係しないことは [2], Theorem 2.4 によって保証される。

$\beta(R^n)$ の元に対しても熱方程式の解の族が対応するを示そう。 そのために次の定義をおく。
即ち $U(x, t) \in C^\infty(R_+^{n+1})$ が "locally infra-exponential solution of the heat equation" であるとは、 $\forall K \subset R^n$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(3) \quad |U(x, t)| \leq C_{\varepsilon, K} e^{\frac{\varepsilon}{t}}, \quad x \in K, \quad t > 0$$

の形の評価式を満たし

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) U(x, t) = 0 \quad \text{in } R_+^{n+1}$$

を満たすことと $i \neq j$ 。

定理 2. (a) $U(x, t)$: infra-exponential sol. $\Rightarrow \exists! u \in \beta(R^n)$ s.t.

$$(5) \quad U(\cdot, t) \rightarrow u \quad \text{as } t \rightarrow 0_+.$$

(5) の意味は $u = \{u_j\}_{j=1}^m$ として u_j の defining function を $U_j(x, t)$ とするとき 各 j に対して

$$(6) \quad U(x, t) - U_j(x, t) \Rightarrow 0 \text{ in } \Omega_j \text{ as } t \rightarrow 0_+$$

が成り立つととる。

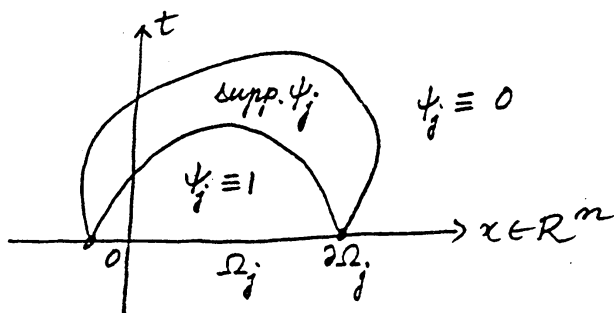
(b) 逆に $\forall u \in \beta(R^n)$ に対してある infra-exponential sol. $U(x, t)$ が存在して (6) の意味で

$$U(\cdot, t) \rightarrow u \quad \text{as } t \rightarrow 0_+.$$

($\Rightarrow$ の場合 $u \rightarrow U$ の対応は一意的ではない。

熱方程式の Cauchy 問題には null solution が存在するからである。)

(証明) (a) 定理1の必要条件の証明 ([2], Theorem 1.2) とほぼ同じなので 略略を せう。
 $\psi_j(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $j=1, 2, \dots$, は $0 \leq \psi_j(x, t) \leq 1$
 で、その support が 下図のよう なものが存在する: (cf. Hörmander Vol. I.)



条件 (3) から

$$\widetilde{\psi_j U} = \begin{cases} \psi_j U & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

なる ultra distribution $\widetilde{\psi_j U} \in \mathcal{D}'^{1,2,5}(\mathbb{R}^{n+1})$ が存在する。

これに 熱作用素 を施して ものを $\widetilde{F_j} \in \mathcal{D}'^{1,2,5}(\mathbb{R}^{n+1})$ とおこう。

i. e.

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) \widetilde{\psi_j U}(x, t) = \widetilde{F_j}(x, t) \in \mathcal{E}'^{1,2,5}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

次に

$$\widetilde{V_j} = E * \widetilde{F_j} \in \mathcal{D}'^{1,2,5}(\mathbb{R}^{n+1})$$

とおく。

$$\widetilde{U}_j(\alpha, t) = \widetilde{\Psi}_j \widetilde{U}(\alpha, t) - \widetilde{V}_j(\alpha, t)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \widetilde{U}_j(\alpha, t) = 0 \quad \text{in } R_+^{n'}$$

かつ $\widetilde{U}_j$ は infra-exponential function である。

$$(*) \quad \widetilde{U}_j(\cdot, t) \longrightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0_+ \quad \text{in } C\overline{\Omega}_j$$

なることが分る。従って定理1に依り

$$\widetilde{U}_j(\cdot, t) \longrightarrow \exists u_j \in A'[\overline{\Omega}_j], \quad j=1, 2, \dots$$

この $\{u_j\}$ により定まる hyperfunction $u = \{u_j\}$ が求まるものである。

(b). $\Omega_j \uparrow R^n$, $u_j \in A'(\overline{\Omega}_j)$ s.t.
 $u_j = u_k$ on Ω_j if $1 \leq j < k < \infty$, 存在 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$
 が与えられたときある infra-exponential solution
 $U(\alpha, t)$ が存在して

$$U(\cdot, t) \longrightarrow u \quad \text{as } t \rightarrow 0_+ \quad (\text{上記(*)の条件})$$

なることを示す。

以下では簡単のため $n=1$ の場合について説明しよう。

$$\Omega_j = \{ |x| < r_j \equiv \sum_{i=1}^j \frac{1}{i} \} \quad , j=1, \dots,$$

は R^1 の開区間で $\Omega_j \nearrow R^1$ as $j \rightarrow \infty$ である。

この場合について証明すれば充分である。(cf. [2], Th. 4.3.)

$u_j \in A'[\bar{\Omega}_j]$, $j=1, \dots$, に対してその defining function を

$$U_j(\alpha, t) = u_{j,j}(E(\alpha - y, t)) \quad , j=1, \dots,$$

とおく。 尤し

$$\lim_{j \rightarrow \infty} U_j(\alpha, t) = U(\alpha, t) \quad \text{in } R_+^{n+1}$$

が存在すれば証明は終りだが一般にこの $\lim$ は発散する。そこで各 j 毎に補助関数 $V_j(\alpha, t)$ を構成して

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (U_j(\alpha, t) - V_j(\alpha, t)) = U(\alpha, t)$$

が存在するようにしたい。

① $V_j(\alpha, t)$ に対する要請。

$$(7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) V_j(\alpha, t) = 0 \quad \text{in } R_+^{n+1};$$

$$(8) \quad V_j \Rightarrow 0 \quad \text{in } \partial\Omega_j \quad \text{as } t \rightarrow 0 \quad , j=1, 2, \dots,$$

$$(9) \quad |U_{j+1} - U_j + V_j - V_{j+1}| \leq C 2^{-j} e^{\frac{\varepsilon_j}{t}} \quad , t > 0,$$

$$\varepsilon_j \downarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

$\forall R > 0$ に対して $\exists j_R, \exists C_R$ s.t.

$$(10) \quad j \geq j_R \Rightarrow |U_{j+1} - U_j + V_j - V_{j+1}| \leq C_R 2^{-j} \exp[-C_R/t],$$

$$t > 0, \quad |\alpha| \leq R.$$

これ等の4条件を用いて $V_j(\alpha, t)$ を構成すればよい。

⊙ 例えは (9) より

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (U_j - V_j) = U_j - V_j + \sum_{k=j}^{\infty} (U_{k+1} - U_k + V_k - V_{k+1})$$

が存在する。他は省略する。以下では $V_1(\alpha, t) \equiv 0$ とする。

さて $V_j(\cdot, t) \Rightarrow v_j \in A'[\partial\Omega_j]$, $j=1, 2, \dots$, とし

$$u_{j+1} - u_j + v_j \equiv g_j \in A'[\bar{\Omega}_{j+1}]$$

とおくと

$$\text{supp. } g_j \subset [-r_{j+1}, -r_j] \cup [r_j, r_{j+1}]$$

であり

$$(**) \quad U_{j+1} - U_j + V_j = \int E(\alpha-y, t) g_j(y) dy$$

と表わされる。ここで積分記号は超関数の意味である。

更に簡単のため $\text{supp } g_j \subset [r_j, r_{j+1}]$ と仮定しよう。

$E(x-y, t)$ を $y=r_{j+1}$ のまわりで Taylor 展開する
 ことにより $(**)$ の右辺は

$$\sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} E^{(\alpha)}(x-r_{j+1}, t) \int (r_{j+1}-y)^\alpha g_j(y) dy$$

に等しい。そこで N を後で定める large number として

$$V_j(x, t) = \sum_{0 \leq \alpha \leq N} \frac{1}{\alpha!} E^{(\alpha)}(x-r_{j+1}, t) \int (r_{j+1}-y)^\alpha g_j(y) dy$$

とおく。[3], Prop. 1.1 による $E(x, t)$ の導関数の評価が
 適用できて、又 (1) も適用して

$$|U_{j+1} - U_j + V_j - V_{j+1}|$$

$$\leq \left| \sum_{\alpha \geq N+1} \frac{1}{\alpha!} E^{(\alpha)}(x-r_{j+1}, t) \int (r_{j+1}-y)^\alpha g_j(y) dy \right|$$

$$\leq C_j C \sum_{\alpha \geq N+1} C^\alpha t^{\frac{-(1+\alpha)}{2}} \alpha!^{\frac{1}{2}} \exp[-(x-r_{j+1})^2/8t] \cdot \left(\frac{2}{j}\right)^\alpha$$

$$\leq C_j' t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{\varepsilon}{t}\right] \exp\left[\frac{-(x-r_{j+1})^2}{8t}\right] \sum_{\alpha \geq N+1} \left(\frac{2C}{j\sqrt{\varepsilon}}\right)^\alpha, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\text{そこで} \quad \varepsilon = \varepsilon_j = (4C/j)^2 \quad \text{とおく}$$

$$\leq C_j' t^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-(x-r_{j+1})^2}{8t}\right] \cdot \sum_{\alpha \geq N+1} \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \cdot \exp\left[\frac{\varepsilon_j}{t}\right]$$

$\parallel$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^N$

ここで各 j 毎に N を充分大きくとれば, (9) が得られる。
 (7), (8), (10) も容易に分る。これで定理 2 の
 証明の概略の説明を終る。

Microlocal analysis に関しては論文 IV に詳しく
 書いたのだからここでは省略する。

References

- [1] Hörmander, L: Springer Verlag (1983, Vol. I.
- [2] Matsuzawa, T: A calculus approach to hyper-
 functions I, Nagoya Math. J. Vol. 108 (1987),
 53-66.
- [3] Matsuzawa, T; 同 II, to appear in Trans.
 Amer. Math. Soc.
- [4] Matsuzawa, T; 同 III, Preprint.