

制 御 可 能 性 に つ い て

(東北大理) 吉 澤 太 郎

よく知られているように、自動制御の問題は、複雑な物理系 (例えば airplane, chemical plants, space vehicles) を stability と optimality のある criteria にしたがつて、行動するようにする問題である。物理現象は非常に広い範囲にわたるから今日では、control の理論は、かなり一般的な model の抽象的性質について、例えば微分方程式の系について考えられる。

理論において、抽象的傾向は増大していくが、それにもかかわらず、十分な注意が、基礎的な概念の確立に向けられていない点がある。

制御理論において、まず第一におこる問題は次のことである。すなわち、

あたえられた dynamical system の任意の位置が、ある control action により、有限時間内に任意の望む位置にうつされうるか

もし、この答が肯定ならば、system は completely controllable であるという。

controllability の考えは Kalman により 1959 年に導入された。この概念の初期のヒントは 1957 年の Kalman と Bertram の論文に現われたが、その時は controllability がすべての type の control の問題の研究、例えば安定性の研究、に基本的な役割をするということはまだ認識されていなかった。

model が linear であるとき、上述の問題に対する直観的な答は少なくとも 15 年という間は "Yes" であるとして知られてきた。実際、いつでも yes とは限らない。例えば簡単な 2 つの scalar equation の system

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha x_1 + u(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = \alpha x_2 + u(t) \end{cases}$$

を考えてみよう。ここで、 α は real constant で $u(t)$ は任意の real function とする。この system においては、 $y(t)=x_1(t)-x_2(t)$ という量はどのような方法によつても、control による影響を受けない。それは $y(t)$ は $u(t)$ に関係しない微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y$$

を満足するからである。

われわれはまた state space X の dual vector space X' における controllability を考えることができる。これは直観的には observability という概念に対応するものである。ここではこれにはふれないことにする。

linear dynamical systems の optimal control の理論において、controllability は存在定理を証明するのに必要である。stability を証明するためには controllability と observability の両方を用いる。勿論これだけでは十分ではない。

Roxin, Roxin and Spinadel, Markus and Lee 等は nonlinear system の controllability を研究した。ここでは Kalman にしたがつて、linear dynamical system の controllability に関する mathematical fact の rigorous な説明をあたえる。そして最後に stability に関する Lur'e の問題について若干述べる。

ここでは linear dynamical system

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(t)x + G(t)u(t)$$

を考える。 t は時間、 x は n -vector, $u(t)$ は input または control といわれるもので、 m -vector とする。 $F(t)$, $G(t)$ はそれぞれ $n \times n$, $n \times m$ 行列とする。そして (1) におけるすべての量は real とする。したがつて、すべての x の集合は real の n 次元 Euclidean space で、これを state space といひ、 X であらわす。もし、 $F(t)$, $G(t)$ が constant のとき、簡単のため (1) は constant であるといひ、 $u(t) \equiv 0$ のとき system (1) は free であるという。

1. 関数 $F(t)$, $G(t)$, $u(t)$ に対して、次の仮定をおく。 $F(t)$, $G(t)$, $u(t)$ は $-\infty < t < \infty$ のすべての t に対して定義されていて、 t の各有界な区間においては有界であるとする。さらに、これらの関数は t の measurable な関数とする。

よく知られているように、(1) の $\phi(t_0) = x_0$ とする解 $\phi(t)$ は

$$(2) \quad \phi(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau)G(\tau)u(\tau)d\tau$$

の形で書かれる。ここで、 t, t_0 は任意で、 ϕ は non-singular matrix であり、次の性質をもっている。すなわち、

$$(3) \quad \phi(t, t) = E = \text{unit matrix for all } t,$$

$$(4) \quad \phi(t, \sigma) = \phi(t, \tau)\phi(\tau, \sigma)$$

$$(5) \quad \phi(t, \tau)^{-1} = \phi(\tau, t)$$

任意のあたえられた $u(t)$ および initial state x_0 , initial time t_0 に対して、 $-\infty < t < \infty$ のすべての t に対して定義される $\phi_u(t_0; x_0, t_0) = x_0$ となる motion

$$(6) \quad \phi(t) = \phi_u(t; x_0, t_0)$$

が対応する。もし $u(t) \equiv 0$ ならば、motion は free であるといい、 ϕ_0 であらわす。

$\phi_u(t_1; x_0, t_0) = x_1$ と書くかわりに control u は phase (x_0, t_0) を phase (x_1, t_1) に transfer するということがある。

(x_0, t_0) を $(0, t_1)$ に transfer するようなある finite な $t_1 > t_0$ とある control $u(t)$ が存在するならば system (1) の phase (x_0, t_0) は controllable であるという。一般に $u(t)$, t_1 は x_0 と t_0 に depend してよい。

(2) からただちにわかることは、ある control $u(t)$ に対して relation

$$(7) \quad x_0 = - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_0, t) G(t) u(t) dt, \quad t_1 > t_0$$

が成りたつとき、そしてその時のみ phase (x_0, t_0) は controllable である。

もし、時間のある定まつた値 t_0 に対して、どの state も controllable であるとき、system は時間 t_0 において completely controllable であるといい、どの phase も controllable のとき単に system は completely controllable であるという。

controllability の定義と (1) の linearity の直接の結果として、次のことがわかる。

Theorem 1. t_0 において controllable な state の集合 $C(t_0)$ は X の linear subspace である。
system (1) の linearity と Theorem 1 によつて、 $C(t_0)$ の basis の element e_i について controllability を check すればよいことがわかる。 $C(t_0)$ の定義から、 (e_i, t_0) が $(0, t_1)$ に transfer されうるような時間 $t_1(e_i, t_0)$ が存在する。したがつて $C(t_0)$ は有限次元であるから、 $t_1(t_0) = \max_i t_1(e_i, t_0)$ が存在して、 t_0 のとき $C(t_0)$ の中にあるすべての x_0 は $t_1(t_0)$ において、あるいはそれ以前に原点に transfer される。しかし motion が原点に到着すれば、control $u(t) \equiv 0$ の下で、原点にとどまらせることができる。したがつて

Theorem 2. $(c(t_0), t_0)$ のどの phase (x_0, t_0) ~~もある control~~ により $(0, t_1(t_0))$ に transfer されうる。

(7) から直接にわかる一つの重要な結果は

Theorem 3. $(c(t_0), t_0)$ のどの phase (x_0, t_0) から、 $t_1 = t_1(t_0)$ あるいはそれ以前に、 $(c(t_0), t_0)$ の phase (x_1, t_0) を通るどの motion にも到着することができる。

Proof. $c(t_0)$ は linear space であるから、 $x_0 - x_1$ を含んでいる。
 $u_0(t)$ を $(x_0 - x_1, t_0)$ を $(0, t_1)$ に transfer する control とする。
 すると (7) から

$$(8) \quad \phi(t_1, t_0)(x_1 - x_0) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, t) G(t) u_0(t) dt$$

がえられる。一方 $u_1(t)$ を $[t_0, t_1]$ 上で定義された任意の control とする。
 すると (2) により

$$(9) \quad \phi_{u_1}(t_1; x_1, t_0) = \phi(t_1, t_0)x_1 + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, t) G(t) u_1(t) dt.$$

(8) を (9) に代入して、(2) を用いることにより

$$\phi_{u_1}(t_1; x_1, t_0) = \phi_{u_0+u_1}(t_1; x_0, t_0).$$

$c(t)$ の定義からただちにわかることは

$$(10) \quad c(t_0) \supset \phi_0(t_0; c(t_1), t_1), \quad t_1 \geq t_0.$$

このことと Theorem 3 から次のことがいえる。

Theorem 4 $(c(t_0), t_0)$ のどの phase も $\{(c(t_2), t_2); t_2 \geq t_1(t_0)\}$ の任意の phase に transfer されうる。 $(c(t_0), t_0)$ の外の phase (x_0, t_0) から出発する motion は集合 $\{(c(t), t); t \geq t_0\}$ に決して入ることはできない。

Proof. $(x_0, t_0) \in (c(t_0), t_0), (x_2, t_2) \in (c(t_2), t_2)$ とする。すると (10) により $\phi_0(t_0; x_2, t_2) \in c(t_0)$ したがって、Theorem 3 により、 (x_0, t_0) から (x_2, t_2) を通る motion すなわち $(\phi_0(t_0; x_2, t_2), t_0)$ を通る motion に $t_1(t_0)$ において、あるいはそれ以前に到達することができる。その後は control なしで (x_2, t_2) に到達できる。

さて, symmetric, non-negative, な linear transformation $W(t_0, t_1)$ を

$$(11) \quad W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) G(t) G'(t) \Phi'(t_0, t) dt$$

で定義する。ここで " $'$ " は matrix の transpose をあらわす。

$R[W]$ を W の range すなわち image の set とし、 $N[W]$ を linear transformation W の kernel とする。

Theorem 5 $\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0$ が $R[W(t_0, t_1)]$ にぞくする時、そしてその時のみ、 (x_0, t_0) を (x_1, t_1) に transfer することができる。

Proof. 十分であることは $W(t_0, t_1)y_0 = \Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0$ とすれば、

$$(12) \quad u_0(t) = G'(t) \Phi'(t_0, t) y_0$$

を (2) に代入することによりただちにわかるように、(12)は (x_0, t_0) を (x_1, t_1) に transfer するから容易にわかる。

必要であることは次のようにして証明される。 $W(t_0, t_1)$ は symmetric であるから state space X の orthogonal direct sum decomposition

$$X = R[W(t_0, t_1)] + N[W(t_0, t_1)]$$

をもつ。よつて $\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 = r + x_2$, $r \in R[W]$, $x_2 \in N[W]$ とする。 (x_0, t_0) は (x_1, t_1) に transfer されるから (2) により、ある control $u(t)$ に対して

$$\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) G(t) u(t) dt.$$

これは (7) により $(x_0 - \Phi(t_0, t_1)x_1, t_0)$ が $(0, t_1)$ に transfer されうることをあらわしている。一方 $W(t_0, t_1)y_0 = r$, $u_0(t) = G'(t) \Phi'(t_0, t) y_0$ とすれば、この $u_0(t)$ は $(-r, t_0)$ を $(0, t_1)$ に transfer することがわかる。

よつて、 $N[W(t_0, t_1)]$ の zero でないどの state も controllable

でないことを示せばよい。もし、 $x_2 \neq 0 \in N[W(t_0, t_1)]$ とすれば

$$0 = [x_2, W(t_0, t_1)x_2] = \int_{t_0}^{t_1} \|G'(t)\Phi'(t_0, t)x_2\|^2 dt$$

ここで $[x, y]$ は vector x, y の scalar product をあらわす。integrand は non-negative であるから

$$(13) \quad G'(t)\Phi'(t_0, t)x_2 = 0 \quad \text{almost everywhere in } [t_0, t_1].$$

いま、 (x_2, t_0) は $(0, t_1)$ に transfer されうると仮定する。すると (7) により、ある control $u_2(t)$ に対して

$$x_2 = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)G(t)u_2(t)dt$$

これより

$$0 < [x_2, x_2] = \int_{t_0}^{t_1} [x_2, -\Phi(t_0, t)G(t)u_2(t)]dt$$

(13) によりこの右辺は 0 となり矛盾がおこる。よつて $x_2 \neq 0$ は controllable でない。したがつて $x_2 = 0$ でなくてはならないから

$$\Phi(t_0, t_1)x_1 - x_0 \in R[W(t_0, t_1)]$$

であることがわかる。

Theorem 5 は実際問題においては controllability に対する完全な解答をあたえないようにみえる。それは、 W は fundamental matrix Φ が analytically にわかっているときのみ計算できるからである。system(1)が constant か、 t に関して periodic のとき以外は稀である。

system (1) が constant の場合は、 Φ の計算を必要としない complete controllability に対するある criteria がある。もつとも簡単でもつともよく知られているのは次の定理である。

Theorem 6. constant system (1) が completely controllable であるのは、 $n \times mn$ matrix

$$(14) \quad [G, FG, \dots, F^{n-1}G]$$

の rank が n のとき、そしてそのときのみである。

Proof. constant system においては、 $t_0=0$ として考えてよい。
 t_1 を任意の正の数とする。まず、(14) の rank は n であるとする。
 そしてどの state も $t=t_1$ までに 0 に transfer されうるとは限らないとする。
 すると theorem 5 によつて、 $N[W(0, t_1)]$ にぞくする vector $x_1 \neq 0$ が存在する。(13) によつて

$$(15) \quad G' \phi'(0, t) x_1 = G' e^{-F't} x_1 = 0 \quad \text{for all } 0 \leq t \leq t_1.$$

(15) を t について $n-1$ 回微分して、 $t=0$ とおくと

$$(16) \quad G' (F')^k x_1 = 0, \quad k=0, \dots, n-1.$$

これは $x_1 \neq 0$ が matrix (14) の各列に orthogonal であることを意味する。
 このことは (14) の rank が n であることに矛盾する。よつてどの state も controllable である。

逆に system は completely controllable であるが、matrix (14) の rank は n より小であると仮定する。すると (16) をみたす nonzero vector x_1 が存在する。いま

$$f(\lambda) = \det[\lambda E + F] = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

とすると、Cayley-Hamilton の定理により

$$(17) \quad F^n + (-1)a_1 F^{n-1} + \dots + (-1)^n a_n E = 0.$$

(17) をもちいて、 $v(t) = x_1' e^{-Ft} G$ は n -th order の constant coefficients をもつ linear differential equation

$$(18) \quad v^{(n)}(t) + a_1 v^{(n-1)}(t) + \dots + a_n v(t) = 0$$

をみたすことがわかる。しかるに (16) により

$$v(0) = x_1' G = 0, \quad \dot{v}(0) = -x_1' F G = 0, \dots, \quad v^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-1} x_1' F^{n-1} G = 0$$

したがって $v(t) \equiv 0$ すなわち $G'e^{-Ft} x_1 = 0$ for all t よつて x_1 はすべての t に対して $G'e^{-Ft}$ に orthogonal である。これより $x_1 \in N[W(0, t_1)]$ for all $t_1 > 0$ なることがわかる。これは completely controllable であるということに矛盾する。したがって matrix (14) の rank は n である。

条件 (14) は minimal-time control system の研究における technical requirement として 1956 年頃の Pontryagin の論文にあらわれている。また LaSalle によつても、この条件が Pontryagin と同じような意味で用いられた。LaSalle が用いた proper という性質は completely controllable と equivalent である。

次に Lur'e の問題について簡単な説明をつけ加えておく。1950 年頃

$$(19) \quad \frac{dx}{dt} = Fx - g\phi(\sigma), \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\phi(\sigma), \quad \sigma = h'x + \rho\sigma$$

によりあたえられる control system の class の研究が Lur'e によつてはじめられた。 σ, ϵ, ρ は real scalar, x, g, h は real n -vector, F は real $n \times n$ matrix で、 F は stable すなわち、その characteristic root はすべて negative real part をもつとする。 $\phi(\sigma)$ は real-valued continuous function で class $A_K: \phi(0)=0, 0 < \phi(\sigma) < \sigma^2_K$ にぞくするとする。問題とするのは、

(19) の equilibrium state は任意の $\phi \in A_K$ に対して globally asymptotically stable (asymptotically stable in the large) であるか。

この問題はよく知られている Aizerman の conjecture と関係がある。
Aizerman の conjecture は

もし (19) が任意の linear な $\phi \in A_K$ に対して g.a.s. ならば、
任意の $\phi \in A_K$ に対してまた g.a.s. である。

しかし Aizerman の conjecture は正しくないことがわかった。そして
Lur'e がより特殊な状態と考えるようになった。すなわち

Lur'e の問題 任意の $\phi \in A_\infty$ に対して (19) の g.a.s. をあたえる
special type の Liapunov function V (すなわち $V = \text{quadratic form in } (x, \sigma) + \text{integral of } \phi(\sigma)$) の存在するために必要かつ十分な ρ, g, h, F に対
する条件を見いだすこと。

(19) の global asymptotic stability に関しては次の重要な Popov
の定理がある。

Popov's Theorem F は stable で $\rho > 0$ とする。もし条件

$$(20) \quad \operatorname{Re}(2\alpha\rho + i\omega\beta) \left[h'(i\omega E - F)^{-1} g + \frac{\rho}{i\omega} \right] \geq 0 \quad \text{for all real } \omega$$

が $2\alpha\rho = 1$ とある $\beta \geq 0$ に対して成り立つならば、(19) は globally asymp-
totically stable である。

Popov はまた (20) が成立つとき、g.a.s. をあたえる Liapunov func-
tion の存在の問題を考えたが、解決しなかつた。しかし同じ paper で、
Popov は次のことを示している。

(x, σ) についての quadratic form と $\phi(\sigma)$ の integral の和である
もつとも一般的な $V(x, \sigma)$

$$(21) \quad V(x, \sigma) = x' p x + \alpha(\sigma - h'x)^2 + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma) d\sigma + \omega w'x, \quad (\alpha, \beta \text{ real})$$

を考えたとき、任意の $\phi \in A_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) に対して $V \geq 0$ で $\dot{V} \leq 0$ ならば $w = 0$ 。
ここで $\dot{V}$ は V の (19) の解に沿つての derivative である。

$w=0$ として (19) と (21) から

$$(22) \quad \dot{V}(x, \sigma) = x'(PF + F'P)x - 2\phi(\sigma)x'(Pg - \alpha\phi h - \frac{1}{2}\beta F'h) \\ - \beta(\rho + h'g)\phi^2(\sigma) - 2\alpha\rho\sigma\phi(\sigma)$$

がえられる。Kalman は complete controllability と complete observability を仮定して (この仮定は問題の性質上当然のようである) Lur'e の問題に対する解答をあたえた。すなわち

Theorem 7. (19) において、 $\rho > 0$, F は stable とする。さらに $\det[g, Fg, \dots, F^{n-1}g] \neq 0$, $\det[h, F'h, \dots, (F')^{n-1}h] \neq 0$ とする。(21) により定義された class から適当な Liapunov function V を見出す。

- (a) $w=0$ で、 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta > 0$ で (20) が成立つような real constant α, β が存在するとき、そしてその時のみ任意の $\phi \in A_\infty$ に対して V は positive definite で $\dot{V} \leq 0$, したがってこの V は任意の $\phi \in A_\infty$ に対して (19) の $x=0$ の Liapunov stability をあたえる Liapunov function である。
- (b) V は前の条件をみたすとする。(i) $\alpha \neq 0$ あるいは (ii) $\alpha = 0$ で (20) における等号が $\operatorname{Re}\{h'(i\omega E - F)^{-1}g\} \geq 0$ なる ω の値に対してのみおこる。このとき、そしてこのときのみ V は (19) の g.a.s. をあたえる Liapunov function である。