

相対調和次元

名工大 中井三留

穴あき円板 $\Omega: 0 < |z| < 1$ で円周 $|z|=1$ を Ω の相対境界 $\partial\Omega$, 原点 $z=0$ を Ω の理想境界 $\delta\Omega$ と考える. Ω 内の非退化連続体 K_n の列 $\{K_n\}_1^\infty$ が次の三条件を満足するとき Ω 内の K列 と呼ぶ:

$$(K.1) \quad K_n \cap K_m = \emptyset \quad (n \neq m);$$

$$(K.2) \quad W = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n \text{ は連結, 従って, 領域である};$$

$$(K.3) \quad \{K_n\}_1^\infty \text{ は } \delta\Omega \text{ に収束する.}$$

領域 $W = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n$ の相対境界 ∂W は $\bar{\Omega}$ に関するもの, 即ち $\partial W = (\partial\Omega) \cup (\bigcup_1^\infty \partial K_n)$ で W の理想境界 $\delta W = \delta\Omega$ である.

W 上の負でない調和函数の族を $HP(W)$, そのうち ∂W で境界値零を持つもの全体を $HP(W; \partial W)$ と記すこと通常通りとする.

$\alpha \in W$ を任意に固定するとき正規化条件 $u(\alpha) = 1$ を満足する

$u \in HP(W; \partial W)$ の全体を $HP(W; \partial W)_1$ と記し, その端点全体を

$ex. HP(W; \partial W)_1$, 又 $\#A$ で集合 A の濃度をあらわすことにする

とき, Ω の理想境界 $\partial\Omega$ の K 列 $\{K_n\}_1^\infty$ に関する 相対調和次元 を $\dim \{K_n\}$ と記し次式で定義する:

$$(1) \quad \dim \{K_n\} = \#(\text{ex. HP}(W; \partial W)_1).$$

本稿の目的は次の結果を証明することである:

定理. 相対調和次元は任意の零でない高々可算濃度と取ることが出来る.

1. W 上のグリーン核を $g(\zeta, z)$ とするとき $g(\zeta, z)/g(\zeta, a)$ を $k(\zeta, z)$ とかき W 上のマルチン核とよぶ. $\{z_n\}_1^\infty \in W$ 内の有理点の全体とすると W の二点の距離を

$$d(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |k(\zeta_1, z_n) - k(\zeta_2, z_n)|^*$$

で与える, 但し $|\alpha|^* = |\alpha|/(|\alpha|+1)$. W の d による完備化を W^* とするとき, d と $k(\cdot, z)$ は W^* に拡張出来る. 各 $p \in W^*$ に対して $W \ni \zeta \rightarrow p$ は $z \in W$ に関して広義一様に $k(\zeta, z) \rightarrow k(p, z)$ となる事と同等で, そのとき $\bar{W} = W \cup (\partial W) \cup (\delta W)$ 内で ζ_1 は $\bar{W}$ の一点 $\pi(p)$ に収束する. $\pi: W \cup \pi^{-1}(\partial W) \rightarrow W \cup (\partial W)$ は位相同型故 $\pi^{-1}(\partial W)$ と ∂W は同一視してよい. $\bar{\delta W} = \pi^{-1}(\delta W)$ と置けば結局 $W^* = W \cup (\partial W) \cup \bar{\delta W}$ と考えてよい. $k(p, \cdot)$ が $\text{ex. HP}(W; \partial W)_1$ に入る $p \in \bar{\delta W}$ の全体を $\bar{\delta}_1 W$ と記すと

$$\text{ex. HP}(W; \partial W)_1 = \{k(p, \cdot); p \in \bar{\delta}_1 W\}$$

となり更に M を $\bar{\delta}_1 W$ 上の単位正測度の全体とすると

$$\mu \mapsto \tau\mu = \int_{\bar{\delta}_1 W} k(p, \cdot) d\mu(p)$$

で定まる写像 $\tau: M \rightarrow HPC(W; \partial W)_1$ が全単射となることがマルチン理論の基本定理である。これから

$$(2) \quad \dim \{K_n\} = \#(\bar{\delta}_1 W) \geq 1$$

となる事がわかる。従って $\dim \{K_n\}$ を計算するには $\bar{\delta}_1 W$ の点の数を数えらる。 $\bar{\delta} W$ の点の数を数える事は難しい場合が多いので、 $\bar{\delta}_1 W$ の点の数を数える為には $\bar{\delta} W$ 中どんな点が $\bar{\delta} W - \bar{\delta}_1 W$ の点であるかを知る事が重要となる。

2. 上記目的にかなう判定条件を一つあげる。集合 A の Ω 内の閉包を $\bar{A}$, W^* 内で考えた閉包を A^* と記す。 $\{U_n\}_1^\infty$ を $\bar{U}_n \subset \Omega$ となる開円板 U_n の列で

$$(U.1) \quad \bar{U}_n \cap \bar{U}_m = \emptyset \quad (n \neq m);$$

$$(U.2) \quad \{\bar{U}_n\}_1^\infty \rightarrow 0$$

の二条件を満足するものを Ω 内の U列 とよぶ。 Ω 内の K 列 $\{K_n\}_1^\infty$ をとり $W = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n$ に対し $V_n = W \cap U_n$, ついで $V = \bigcup_1^\infty V_n$ と置く。

補題. $\bar{\delta} W$ の点 p に対し適当な Ω 内の U列 があって p が $(W - V)^*$ に入らないとすると p は $\bar{\delta} W - \bar{\delta}_1 W$ に入る。

事実, $p \notin (W-V)^*$ 故に $Z = V \cup (V^* - \bar{V})$ は W^* で p の近傍となる. $W-Z = W-V$ 上 $k(p, \cdot)$, $W-(W-V) = V$ 上 $H_{k(p, \cdot)}^V$ ($\liminf_{V \ni z \rightarrow q} \lambda(z) \geq k(p, q)$ がすべての $q \in (\partial V) \cap W$ に対して成り立つ様な V 上の正值優調和函数 λ の族の下被) となる優調和函数を $k(p, \cdot)_{W-V}$ と記すならば, 各 V_n で $H_{k(p, \cdot)}^V = H_{k(p, \cdot)}^{V_n} = k(p, \cdot)$ となる事は容易にわかる故 W 上 $k(p, \cdot)_{W-V} = k(p, \cdot)$ となる訳である. もし $p \in \bar{\delta}_1 W$ ならば p の近傍 Z に対し常に $k(p, \cdot)_{W-Z} \neq k(p, \cdot)$ となる事はマルティン理論で周知であるから, $p \notin \bar{\delta}_1 W$ でなければならぬ.

3. 以下各 K_n が Ω の半径上の截線となる様な K 列を適当にとるとき $\dim \{K_n\} =$ 自然数 m , 又は可算無限濃度 ∞ となる事を示す. 有限濃度のときを先ず扱う.

例 1. m を任意の自然数とし以下固定する. $(0, 1)$ 内の数列 $\{a_\mu\}_1^\infty$ で $a_{\mu+1} < a_\mu$ ($\mu=1, 2, \dots$) 及び $\lim_{\mu \rightarrow \infty} a_\mu = 0$ となるものを任意にとり固定する. 次に $(0, 1)$ 内の数列 $\{b_\mu\}_1^\infty$ で各 $\mu=1, 2, \dots$ に対し $b_\mu \in (a_{\mu+1}, a_\mu)$ となるものを適当に選ぶ. 最後に $\theta_\nu = 2\pi(\nu-1)/m$ ($\nu=1, 2, \dots, m$) とし Ω の半径上の截線

$$S_{\mu\nu} = \{z \in \Omega; b_\mu < |z| < a_\mu, \arg z = \theta_\nu\}$$

を考える ($\mu=1, 2, \dots; \nu=1, 2, \dots, m$).

$$K_n = S_{\mu\nu} \quad (n = (\mu-1)m + (\nu-1), 1 \leq \nu \leq m)$$

と置けば $\{K_n\}_1^\infty$ は Ω 内の K 列である. 以下に指定する様に $\{b_\mu - a_{\mu+1}\}_1^\infty$ が十分速く零に収束する様に $\{b_\mu\}_1^\infty$ を選ぶと

$$(3) \quad \dim \{K_n\} = m.$$

4. $U_{\mu\nu} = \{z \in \Omega; |z - a_\mu e^{i\theta_\nu}| < \delta_\mu\}$ と置き $\{U_{\mu\nu}\}$ が Ω 内の U 列となる様に $\{\delta_\mu\}_1^\infty$ をとって固定する. 先ず $\{b_\mu\}_1^\infty$ の取り方に対する制約としては常に $a_{\mu+1} < b_\mu < a_{\mu+1} + \delta$ の範囲で考えるとする. 正数列 $\{\varepsilon_n\}$ と $\eta_0 = \sum_1^\infty \varepsilon_n < +\infty$ とする様にとり $\eta_n = \sum_{n+1}^\infty \varepsilon_n$ とおくと $\eta_n \downarrow 0$ である. Ω の部分集合 A に対し $e^{i\theta} A = \{e^{i\theta} z; z \in A\}$ と記すことにして

$$\begin{cases} \Omega_n = \Omega - \bigcup_{\nu=1}^m e^{i\theta_\nu} \left(\left(\bigcup_{\mu=1}^n [b_\mu, a_\mu] \right) \cup [0, a_{n+1}] \right) \\ \Omega_\infty = \Omega - \bigcup_{\nu=1}^m e^{i\theta_\nu} \left(\bigcup_{\mu=1}^\infty [b_\mu, a_\mu] \right) = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n = W \end{cases}$$

と置く ($n=0, 1, \dots$). 又 $a \in \Omega_\infty$ を固定し a の近傍 D は $\overline{D} \subset \Omega_\infty - \bigcup_1^\infty \overline{U}_n$ とおって居る様に固定出来るものとする. Ω_n のグリーン核を $g_n(\zeta, z)$, マルチン核を $k_n(\zeta, z) = g_n(\zeta, z) / g_n(\zeta, a)$ と置く ($n=0, 1, 2, \dots, \infty$). μ について順次 b_μ を十分 $a_{\mu+1}$ に近く取る事により

$$0 < g_n(\zeta, z) - g_{n-1}(\zeta, z) < \varepsilon_n g_{n-1}(\zeta, z) \quad (z \in D, \zeta \in \Omega_n - \bigcup_1^n U_{\mu\nu})$$

と出来る ($n=1, 2, \dots$). したがって $U = \bigcup_{\mu=1}^\infty \left(\bigcup_{\nu=1}^m U_{\mu\nu} \right)$. 従って任意の自然数 l と任意の $n=0, 1, \dots$ に対し

$$0 < g_{n+l}(\zeta, z) - g_n(\zeta, z) < \eta_n g_n(\zeta, z) \quad (z \in D, \zeta \in W-U)$$

となる。これ及びここで $l \rightarrow +\infty$ としたものを書き換えて

$$(4) \quad \begin{cases} g_n(\zeta, z) \leq g_{n+l}(\zeta, z) \leq (1+\eta_n) g_n(\zeta, z) \\ g_n(\zeta, z) \leq g_\infty(\zeta, z) \leq (1+\eta_n) g_n(\zeta, z) \end{cases}$$

が $(\zeta, z) \in (W-U) \times D$ に対して成立する。ここで (4) の $z = z$ 及び $z = \alpha$ のものゝ商を作ることにより

$$(5) \quad \begin{cases} (1+\eta_n)^{-1} k_n(\zeta, z) \leq k_{n+l}(\zeta, z) \leq (1+\eta_n) k_n(\zeta, z) \\ (1+\eta_n)^{-1} k_n(\zeta, z) \leq k_\infty(\zeta, z) \leq (1+\eta_n) k_n(\zeta, z) \end{cases}$$

となる $((\zeta, z) \in (W-U) \times D)$ 。これが $\{c_\mu\}_1^\infty$ の選び方に対する次の制約である。

5. 各自然数 n に対し $\bar{\delta}\Omega_n$ と $\bar{\delta}\Omega_0$ の $\delta\Omega$ の十分小な近傍の上の部分である夾々の近傍は位相同型で同一視出来て $\bar{\delta}\Omega_n = \bar{\delta}_1\Omega_n = \{p_j\}_1^m$ ($n=0, 1, \dots$) として良い事は容易にわかる。 Δ_j を Ω 内の角領域 $\theta_j < \arg z < \theta_{j+1}$ ($\theta_{m+1} = \theta_1$) とするとき Δ_j の頂点が p_j を定めるからである。(5) の第一式で $\Delta_j \ni \zeta \rightarrow 0$ とすることにより

$$(1+\eta_n)^{-1} k_n(p_j, z) \leq k_{n+l}(p_j, z) \leq (1+\eta_n) k_n(p_j, z) \quad (z \in D)$$

となる。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n(p_j, z) = A_j(z)$ ($z \in D$) の存在を意味する。 $\Delta_j - U \ni \zeta \rightarrow 0$ としたときの $k_\infty(\zeta, z)$ の上及び下極限を夾々 $\bar{A}_j(z)$, $\underline{A}_j(z)$ とすると ($z \in D$), (5) の第二式から

$$(1+\eta_n)^{-1} k_n(p_j, z) \leq \underline{A}_j(z) \leq \bar{A}_j(z) \leq (1+\eta_n) k_n(p_j, z)$$

となり、ついで $n \rightarrow \infty$ として $\underline{A}_j(z) = \bar{A}_j(z) = A(z)$ とする。換言するならば

$$\lim_{\Delta_j - U \ni \zeta \rightarrow 0} k_\infty(\zeta, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(p_j, z)$$

が存在する ($z \in D$)。 $\Delta_j - U \ni \zeta \rightarrow 0$ の定める $\bar{W} = \bar{\Omega}_\infty$ の点を q_j と記すことにすると

$$(6) \quad \lim_{\Delta_j - U \ni \zeta \rightarrow 0} k_\infty(\zeta, z) = k_\infty(q_j, z) \quad (z \in D, j=1, 2, \dots, m).$$

$\bar{W} - \{q_j\}_1^m$ の任意の点 q をとると W^* 内で考えて $q \notin (W-U)^*$ だから補題により $q \notin \bar{\Delta}_1 W$ である。即ち

$$(7) \quad \bar{\Delta}_1 W \subset \{q_j\}_{j=1}^m.$$

実際には上で等号が成立するのであるが現時点ではそこまでわかってない。幾分手軽な態度であろうが上で等号が成立することを証明するかわりに等号の成立が自明となる様に $\{c_\mu\}$ を選ぶことにする。

6. 上でのべた所を達成すべく最後に $\{c_\mu\}_1^\infty$ に対する条件の制約をつける。 $u_{nj} = k_n(p_j, \cdot)$ とおくとき、 u_{nj} は Δ_i ($i \neq j$) 内では有界であるが、 $L_j: \arg z = (\theta_j + \theta_{j+1})/2$ を Δ_j の頂角の二等分線とすると、 $L_j \ni \zeta \rightarrow 0$ なら $u_{nj}(\zeta) \rightarrow +\infty$ となることにまず注意しよう。 $\mu=1, 2, \dots$ に対し順次 c_μ を $q_{\mu+1}$ に十分近く取ることにより

$$(8) \quad 0 < u_{nj}(z) - u_{n-1,j}(z) < \varepsilon_n \quad (z \in \Omega_n - U)$$

と出来る. $\{u_{nj}\}_{n=1}^{\infty}$ は増加列だから (8) により W 上広義一様に $u_j = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{nj}$ が存在して $u_j \in HP(W; \partial W)$ である. 再び (8) により

$$(9) \quad u_{0j}(z) \leq u_j(z) \leq u_{0j}(z) + \eta_0 \quad (z \in W - U)$$

が各 $j=1, 2, \dots, m$ について成立する. u_{0j} の性質は (9) により u_j によって受けつけられる. 従って

$$\begin{cases} \sup_{\Delta_i - U} u_j < +\infty & (i \neq j) \\ \lim_{L_j \ni z \rightarrow 0} u_j(z) = +\infty \end{cases}$$

となる. $HP(W; \partial W)$ の生成する線型空間 $HP(W; \partial W) \oplus HP(W; \partial W)$ の中で考えて $\{u_j\}_{j=1}^m$ が一次独立となる事と上の性質を示している. これとマルチンの基本定理と合わせると $\#(22. HP(W; \partial W)) \geq m$ が結論出来る. これと (7) と合わせて (3) が出る.

以上に見て来た如く (3) を結論するために $\{c_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ に第一から第三までの三個の制約を置いた. $\{c_\mu - a_{\mu+1}\}_1^{\infty}$ が十分速く 0 に収束すればこれらの三条件が同時に満たされる事は肝心ながら自明である.

7. 次に可算無限濃度のときはどうするかについて述べよう. 例 1 及びその証明の思想を踏襲してただ技術的な改変を少々施すだけであるから, 証明の細部は省略してのべる.

例 2. $(0, 1)$ 内の数列 $\{a_n\}_1^\infty$ で $a_{n+1} < a_n$ ($n=1, 2, \dots$) 及び $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ とするものを固定する. 次に $(0, 1)$ 内の数列 $\{b_n\}_1^\infty$ で $b_n \in (a_{n+1}, a_n)$ とするものを以下のべる様を選ぶ. 今 $[0, 2\pi)$ 内の数列 $\{\theta_m\}_1^\infty$ で $\theta_1 = 0$, $\theta_m < \theta_{m+1}$, $\lim_{m \rightarrow \infty} \theta_m = 2\pi$ とするものを固定する. Ω 内の半径上の截線

$$S_{nm} = \{z \in \Omega; b_n < |z| < a_n, \arg z = \theta_m\} \quad (n \geq m)$$

を考える ($n \geq m$; $n, m = 1, 2, \dots$). すると

$$K_k = S_{nm} \quad (k = n(n-1)/2 + m)$$

で定まる $\{K_k\}_{k=1}^\infty$ は Ω 内の K 列である. $\{b_n - a_{n+1}\}_1^\infty$ が以下のべる如く十分に速く零に収束するならば

$$(10) \quad \dim \{K_k\} = \infty \quad (\text{可算無限濃度}).$$

前例 1 に於けると同様 $U_{nm} = \{|z - a_n e^{i\theta_m}| < \delta_n\}$ ($n=1, 2, \dots$; $m=1, 2, \dots, n$) が Ω 内の U 列と見る様に $\{\delta_n\}_1^\infty$ を固定し, $\{b_n\}_1^\infty$ に対しては, 先ず次の制約として常に $a_{n+1} < b_n < a_{n+1} + \delta_{n+1}$ の範囲で考えるとする.

$$\begin{cases} \Omega_n = \Omega - \left(\bigcup_{\nu=1}^n \left(\bigcup_{m=1}^\nu e^{i\theta_m} [b_\nu, a_\nu] \right) \right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^n e^{i\theta_m} [0, a_{n+1}] \right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^\infty e^{i\theta_k} [0, a_k] \right) \\ \Omega_\infty = \Omega - \bigcup_{\nu=1}^\infty \left(\bigcup_{m=1}^\nu e^{i\theta_m} [b_\nu, a_\nu] \right) = \Omega - \bigcup_{k=1}^\infty K_k = W \end{cases}$$

とおき ($n=1, 2, \dots$), g_n , k_n , $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, $\{\eta_n\}_0^\infty$ 及び D , U を例 1 の同じ記号に対応する同様のものとして定義する. $\{b_n\}_1^\infty$ に対する次の制約は例 1 に於けると同様に, (4) 従って (5)

が成立する様に $\{b_n\}_1^\infty$ を選ぶ事である.

8. Ω 内の角領域 $\Delta_j : \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}$ を考える ($j=1, 2, \dots$) 部分も例 1 同様である. 各自然数 n に対し $\bar{\delta}\Omega_n$ と $\bar{\delta}\Omega_0$ の $\delta\Omega$ の近傍の上の部分である夫々の近傍は位相同型で同一視して良いことも例 1 と同様であるが, 今度は $\bar{\delta}\Omega_n = \bar{\delta}_1\Omega_n = \bar{\delta}\Omega_0 = \bar{\delta}_1\Omega_0 = \{p_1, p_2, \dots, p_\infty\}$ ($n=1, 2, \dots$) と考えるのである. こゝに p_j は Δ_j の頂点が定めるものであり ($j=1, 2, \dots$) 又 p_∞ は $\bigcap_{k=1}^\infty (\bigcup_{k \geq n} \Delta_k)$ の定めるものである. この点について更に説明を追加するために等角写像 $\varphi: \Omega_0 \rightarrow \{0 < \mu < |w| < 1\}$ で $\partial\Omega_0 = \partial\Omega$ を $|w|=1$ に写すものを考える. Δ_j の頂点は $z=0$ 上の一つの境界要素でこれを p_j と考えてよく, $\varphi(p_j) = w_j$ とすると ($j=1, 2, \dots$), $|w|=\mu$ 上 $\arg w_j$ が j と共に増加することから $w_j \rightarrow w_\infty$ と言う極限 w_∞ を持ち, 之で w_∞ に対応する境界要素 $\varphi(w_\infty)$ を p_∞ と考えたら良い訳である. さて例 1 同様

$$(11) \quad \lim_{\Delta_j \cup \zeta \rightarrow 0} k_\infty(\zeta, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(p_j, z) \quad (j=1, 2, \dots; z \in D)$$

の存在を知り, この定める $\bar{\delta}W$ の点を q_j ($j=1, 2, \dots$) とする所は例 1 と全く同様である. 建う所は, $\{\zeta_k\}_1^\infty \rightarrow 0$ を $W \cup U$ の点列で $k_\infty(\zeta_k, z) \rightarrow k_\infty(q, z)$ とする時 q はどれかの q_j であることが $\{\Delta_j\}$ の有限個であることにより例 1 に於ては自明であつたので述べることをしなかつたけれど, 今度は少々

の注意位は必要な点である. 対角線論法で $\{c_k\}$ をその適当な部分列で置き換えたとして, 各 n について $k_n(c_k, z) \rightarrow k_n(p_{j(n)}, z)$ ($k \rightarrow \infty$) と仮定して良い. 所で $\bar{\partial}\Omega_n$ の近傍はすべて $\bar{\partial}\Omega_0$ のそれと同一視してよかったから $p_{j(n)} = p_j$ ($n=1, 2, \dots, \infty$) となって居る. もし $j < +\infty$ なら (5) のサニ式で $c_k = c_k$ として $k \rightarrow \infty$, ついで $n \rightarrow \infty$ とすることにより,

$$k_\infty(q, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(p_j, z)$$

となり (11) から $q = q_j$ を知る. $j = \infty$ でも上と同様に

$$k_\infty(q, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n(p_\infty, z)$$

となり, この式で定まる q を q_∞ とすれば, 結局 $W \cup \{c_k\} \rightarrow 0$ のとき $k_\infty(c_k, z)$ は収束するかぎり $k_\infty(q_j, z)$ ($j=1, 2, \dots, \infty$) のいずれかに収束することがわかった. 従って任意の真 q を $\bar{\partial}W - \{q_1, q_2, \dots, q_\infty\}$ からとると $q \notin (W \cup U)^*$ であることによる例 1 と全く同様にして $\bar{\partial}_1 W \subset \{q_1, q_2, \dots, q_\infty\}$ を知る, すなわち $\dim \{K_k\} \leq \infty$ がわかる. $u_{nj} = g_n(p_j, \cdot)$ ($j=1, 2, \dots, \infty$) に対して, 例 1 にあけると同様なサニの制約を $\{c_n\}_1^\infty$ につけて, $u_{\infty j} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{nj}$ が $W \cup U$ で $u_{0j} \leq u_{\infty j} \leq u_{0j} + \eta_0$ となる様にする. これから族 $\{u_{\infty j}; j=1, 2, \dots, \infty\}$ から任意有限個を取り出したものは $HP(W; \partial W) \oplus HP(W; \partial W)$ の中で一次独立となることがわかる. 従って $\dim \{K_n\}$ は有限濃度でなく, 最終的には (10) が結論できる.

9. 最後に相対調和次元に関連して疑問に思っている所、調らべてみたいと思っている所をのべるが、深く考えた結果と言うよりは幾分思いつきの設問なので無意味又は自明の所は無しとしたい。

a. 本稿に最も密着した所として、 $\dim\{K_n\}=2$ (連続体の濃度) となるものが存在するかどうかはまだ明らかになっていない。存在は間違いない所と思うし、又例として、その型のもので $\{\Delta_j\}$ のえらび方をカントル集合の構成の取り除く部分に対応させて作ればよいと思うが $\bar{\delta}_1 W$ に入る (又は入らぬ) 所の解析がまだ出来ていない。

b. $\hat{\mathbb{C}}$ の一般部分領域 W についてもその一つの境界成分を理想境界 δW , $\bar{W}-W-\delta W$ を相対境界 ∂W として、 δW の相対調和次元が定義出来る。等角写像論における δW の強、弱、不安定への分類に δW の相対調和次元が重要な不変量となるのではあるまいか。さしあたって $W=\Omega-\cup K_n$ の場合 δW は不安定又は弱であるが、それとのかゝり方で $\dim\{K_n\}$ を調らべたい。

c. R をハイルズの末端部とし $\{\gamma_n\}$ を互に交らぬ単純解析的閉曲線の列で $W=R-\cup \gamma_n$ が単葉型となるものとする。 R の理想境界 δR のハイルズの意味の調和次元と W に於ける δR の相対調和次元は (少く共 $\{\gamma_n\}$ をうまくとれば)

一致するのではあるまいか。この見地からハインズ (調和次元 $n < +\infty$), 倉持 (調和次元 ∞), インスタチネスフ・エルニア (調和次元 ∞) の例を再構成出来まいか。

d. $K_n = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = a_n, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$, $\delta = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = 0, |\operatorname{Im} z| \leq 1\}$, $\{a_n\}_1^\infty$ は真に減少零列, $\{a_n\}_1^\infty$ は真に増加零列とする。 $W = \mathbb{C} - (\bigcup_{n=1}^\infty K_n) \cup (\bigcup_{n=1}^\infty K_{-n}) \cup \delta$ に対して δ の相対調和次元 (cf 参照) を計算する事は W の設定を調らべる重要な手がかりらしい。