

1 階線型偏微分作用素 の準楕円性について

愛知教育大学 加藤 義夫

§ 1. 序

Ω を $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 R^{n+1} における領域とする。
 $C^\infty(\Omega)$ を Ω で無限回微分可能な複素数値関数の全体とし、
 $C^\omega(\Omega)$ を Ω で実解析的な複素数値関数の全体とする。
 $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に係数をもつ線型偏微分作用素 P が Ω で
準楕円型 (又は 解析的準楕円型) であるとは、

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{D}(\Omega), Pu \in C^\infty(\Omega') \text{ (又は } \in C^\omega(\Omega')) \\ \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega') \text{ (又は } \in C^\omega(\Omega')) \end{aligned}$$

が Ω に含まれるすべての開集合 Ω' に対して成り立つことである。
 ここでは、

$$(1) \quad L = \sum_{j=1}^{n+1} a^j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} + a(y)$$

なる型の線型偏微分作用素の (解析的) 準楕円性を考察する。
 即ち、

定理. $n \geq 2$ と仮定する。このとき $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\infty(\bar{\Omega})$) に係数をもつ (1) の型の作用素 L が Ω で準楕円型 (又は 解析的準楕円型) であるための必要十分な条件は、 $a^j(y)$ ($j=1, \dots, n+1$) が Ω で恒等的に零で、かつ $a(y)$ が Ω のどんな点でも零にならないことである。

$n=1$ のときの L の解析的準楕円性は、鈴木氏 [1] によって完全に解かれている。他方 $n \geq 2$ に対しては上の定理は、すでに部分的に吉川氏によって解かれていたことを名古屋大学の松沢氏から知らされた (吉川 [2] 参照)。そして上の定理の証明法は本質的には、吉川氏のものと同じてある。

次の節では、線型偏微分作用素の準楕円性と可解性との関連を中心として定理の証明のための準備をしよう。そして最後の節で定理が証明される。なお、この定理の証明は、まもなく *Nagoya Journal* Vol. 32 (1968) にも発表されるはずである。

§2. 準備

線型偏微分作用素 P が Ω で可解であるとは、すべての $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対して $Pu = f$ なる $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ が存在することである。可解であるための必要条件の一つが、Hörmander 氏

によって与えられている。即ち、 N を負でない整数の全
 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in N^{n+1}$ と $D_i = -i\partial/\partial y_i$ ($i = \sqrt{-1}$)

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}$$

とおく。 Ω 上の m 階偏微分作用素 $P(y, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) D^\alpha$
 が Ω で可解ならば、

$$P_m(y, D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(y) D^\alpha, \quad \bar{P}(y, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} \overline{a_\alpha(y)} D^\alpha$$

$$C(y, D) = \bar{P}(y, D) P(y, D) - P(y, D) \bar{P}(y, D)$$

とおくとき、階数が $2m-1$ の $C(y, D)$ の項の和 C_{2m-1}
 次をみる： Ω の各点 y において

$$(H) \quad P_m(y, \xi) = 0, \quad \xi \in R^{n+1} \Rightarrow C_{2m-1}(y, \xi) =$$

特に 1 階の線型偏微分作用素に対する可解性の十
 Nirenberg, Trèves 両氏により [4] において研究
 ([4] の条件 (P) など)。

補題 1. $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ準楕円型偏微分
 形式的共役 tP は、 Ω の各点の近傍で可解である。

tP は、恒等式

$$\int P u \cdot v \, dy = \int u \cdot {}^tP v \, dy, \quad u, v \in C_0^\infty(\Omega)$$

で定義される。(これは、すでに「数学の歩み」12-1(1966)」で吉川氏によって指摘された。吉川[2]も参照)。

L_0 を L の主要部とする。即ち、

$$(2) \quad L_0 = \sum_{j=1}^{n+1} a^j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

この節では、すべての $y \in \Omega$ に対して、

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{n+1} |a^j(y)| \neq 0$$

が仮定される。

補題2. $n \geq 2$ と仮定する。 $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に係数をもち (3) をみたす L が Ω のすべての点で条件(H)をみたすならば、 L_0 は Ω で準楕円型 (又は、解析的準楕円型) にはなりえない。そして L が可解となる Ω の部分領域が存在する。

証明. L を独立変数の変換により次のような形にするこができる (Nirenberg-Treves [4] を参照)。 y_0 を Ω の勝手な点とする。 y_0 の近傍での座標変換 $(y_1, \dots, y_{n+1}) \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, t)$ ($y_0 \longrightarrow$ 原点 $x=0, t=0$) によって L_0 は $x=0, t=0$ の近傍 N で

$$(4) \quad L_0 = g(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{j=1}^n b^j(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + c(x, t),$$

なる形に変形される。ここで N において $g(x, t) \neq 0$ かつ $b^j(x, t)$ ($j=1, \dots, n$) は実数値であって (1) の形の L の係数が $C^\infty(\Omega)$ (又は $C^\omega(\Omega)$) に属するときは、座標変換及び (4) の形の L の係数は、又 $C^\infty(N)$ (又は $C^\omega(N)$) に属する。

L が N で条件 (H) をみたすことから、

$$(5) \quad \sum_{j=1}^n b^j(x, t) \xi_j = 0, \quad (x, t) \in N, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \\ \implies \sum_{j=1}^n b_t^j(x, t) \xi_j = 0$$

が出る。ここで $b_t^j(x, t) = \frac{\partial b^j}{\partial t}(x, t)$ である。

$u(x, t)$ をベクトル $(b^1(x, t), \dots, b^n(x, t))$ とし、 $|u(x, t)|$ をその長さとする。もしも $|u(x, t)|$ が N で恒等的に零ならば、変数 x だけの函数はすべて $L_0 u = 0$ の解である。 $u(x, t)$ が N のある部分領域 N_1 で決して零にならなければ (5) から、

$$(6) \quad u_t(x, t) = \beta(x, t) u(x, t) \quad (u_t = (b_t^1, \dots, b_t^n))$$

をみたす実数値函数 $\beta(x, t)$ を $C^\infty(N_1)$ にみつけることができる。

(6) から N_1 において

$$\frac{d}{dt} (u(x, t) / |u(x, t)|) = 0$$

がわかる。よって $u(x, t) / |u(x, t)|$ は変数 t に関係しないことがわかり $v(x) = u(x, t) / |u(x, t)|$ とおくと、 L_0 は再び

$$L_0 = g(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} + i |b(x, t)| \sum_{j=1}^n v^j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad v(x) = (v^1(x), \dots, v^n(x))$$

とかかれる。このことから変数 x だけに関係する、方程式

$$\sum_{j=1}^n v^j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

の解はすべて $L_0 u = 0$ の解であることがわかる。(解析的)準楕円性が局所的性質であることと以上のことから補題2の前半が容易に証明される。又、 N のある部分領域 N' で変数 x だけに関係する単位ベクトル $v(x)$ が存在して $b(x, t) = |b(x, t)| v(x)$ となるから L は N' で可解なことがわかる(これが Nirenberg-Trèves [4] の可解であるための十分条件の一つであった)。

補題3. $n \geq 1$ と仮定する。 $C^\infty(\Omega)$ に係数をもち、(3)をみたす(1)の形の L が Ω のある点で条件(H)をみたさなければ、 L_0 は Ω で解析的準楕円型ではない。

証明. これは、溝畑氏 [5] の定理 4.1 から容易にわかるが、ここではその証明の概略だけを述べる。

今、 L が $y_0 \in \Omega$ で条件(H)をみたさないとする。 y_0 の近傍 N での $L_0 u = 0$ の解 w で、 $w(y_0) = 0$ かつ y_0 を除いて N において $\text{Im}(w) > 0$ なるものを作ることができる (Hörmander [3] の, Chap. VI を見よ)。適当な分枝をとれば、 $\sqrt{w(y)}$ は、 N で連続的微分

可能で $L_0 u = 0$ をみたす。しかし、これは y_0 において 2 階連続的微分可能でない。これでこの補題が証明される。

補題 4. $n \geq 1$ を仮定する。 $C^\infty(\Omega)$ に係数もち (3) をみたす作用素 L が Ω で 準楕円型 (又は、解析的準楕円型) であるのは、 L_0 が そうであるときに限る。

証明. $y_0 \in \Omega$ を勝手な点とする。 Cauchy-Kowalewsky の定理により y_0 のある近傍 N で 実解析的な

$$L_0 h = a$$

なる解 $h(y)$ をみつけることができる。これからすべての $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して 容易に

$$(7) \quad \begin{cases} L_0(e^h u) = e^h L u \\ L(e^{-h} u) = e^{-h} L_0 u \end{cases}$$

をうる。(7) から補題 4 をうることは容易である。それは、(解析的) 準楕円性が局所的性質をもつからである。

§3. 定理の証明

最後に我々は §1 で述べた定理を証明しよう。そのためには、次の命題を証明すればよい。

命題. もしも $n \geq 2$ ならば, $C^\infty(\Omega)$ (又は, $C^\infty(\Omega)$) に係数をもつ (3) をみたす (1) の形の作用素 L は決して準楕円型 (又は解折的準楕円型) にはならない。

この命題の証明において必要とされる次の補題をまず示そう。

補題 5. $C^\infty(\Omega)$ からそれ自身への線型写像 M が次をみたすとする:

(i) M は, 全単射かつ両連続である。

(ii) u の台と, Mu の台は一致する。

このとき, Ω で決して零とまらない $C^\infty(\Omega)$ に属する函数 $\mu(x)$ が存在して $Mu = \mu(x)u$ となる。(ここで $C^\infty(\Omega)$ の位相は, セミノルム系 $\|\cdot\|_{m,K}$:

$$\|f\|_{m,K} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{y \in K} |D^\alpha f(y)|$$

によって定義される。 m は負でない任意の整数であり, K は Ω の任意のコンパクト集合である。明らかにこの位相により $C^\infty(\Omega)$ は Fréchet 空間となる)。

補題 5 の証明. M 及び M^{-1} が $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ線型偏微分作用素となることは明らかである:

$$M = P(y, D) = \sum_{|\alpha| \leq m_y} a_\alpha(y) D^\alpha,$$

$$M^{-1} = Q(y, D) = \sum_{|\alpha| \leq n_y} b_\alpha(x) D^\alpha.$$

ここで m_y, n_y は、各々、点 y における $P(y, D), Q(y, D)$ の真の階数であり、それらは、又、 y が Ω のコンパクト集合を動くとき有界である。

まず、初めに m_y, n_y が共に Ω において恒等的に零になることを示そう。今、 Ω において $n_y \neq 0$ と仮定する。このとき、 $n_y = n > 0$ となる Ω の部分領域 Ω_0 ($\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$) が存在する。 $m = \max_{y \in \Omega_0} m_y$ とおく。 $P_m(y, \xi)$ 及び $Q_n(y, \xi)$ を、各々、特性多項式 $P(y, \xi), Q(y, \xi)$ の主要部分とする ($y \in \Omega_0, \xi \in \mathbb{R}^{n+1}$)。明らかに、

$$(8) \quad P_m(y, \xi) Q_n(y, \xi) = 0$$

がすべての $y \in \Omega_0$ とすべての $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して成り立つ。(8) からすべての $y \in \Omega_0$ と $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ に対して $P_m(y, \xi) = 0$ をうる。(1) において $m=0$ 。これは、矛盾である。 Ω_0 において $P_0(y, \xi) = (M(1))(y)$ であるからである。よって n_y も m_y も Ω において恒等的に零とならねばならぬ。このようにして $M = a_0(y)$, $a_0(y) b_0(y) = 1$ であるから補題5をうる。

命題の証明. L を $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ (1) の形の作用素とする。今、(3) がみたされているとせよ。補題2, 3, 4 は、 L が Ω で解析的準楕円型にはなりえないことを示している。

次に、 $C^\infty(\Omega)$ に係数をもつ (1) の形の作用素 L が、(3) を

みたすせよ。今、 L_0 が Ω のある部分領域 Ω' で準楕円型だったとすれば、補題1により L_0 は Ω' の各点の近傍で可解となる。したがって L_0 は Ω' の各点で条件(H)をみたすこととなる。このことと、補題2により L_0 は Ω' で準楕円型とはなりえない。よって L_0 は Ω のどんな部分領域でも準楕円型とはなりえない。この事実と補題5を使って、 L が Ω で準楕円型とはなりえないことを示そう。今、 L が Ω で準楕円型だったとせよ。もしも Ω の部分領域 Ω_1 において零とならない Ω 上での $Lv=0$ の解 v があれば

$$L_0 h = a$$

をみたす函数 $h \in C^\infty(\Omega_1)$ をみつけることができる。実際、 $h = -\log v$ とおけばよい（ここで L についての仮定から v が $C^\infty(\Omega)$ に属すること及び一般性を失うことなく v の値域が上半複素平面にあるとよいことに注意せよ）。補題4の証明における同じ方法で L_0 が Ω_1 で準楕円型となることがわかる。（しかし、これは矛盾である。 $Lv=0$ となる開集合の上では $v=0$ とならねばならぬ。他方、補題1と L の準楕円性から L は Ω の各点で条件(H)をみたす。よって補題2から L は Ω のある部分領域 Ω_0 で可解なことがわかる。したがって

$$(9) \quad Lu = f$$

は、すべての $f \in C^\infty(\Omega_0)$ に対して解 $u \in C^\infty(\Omega_0)$ をもつ。もっと一般に、すべての $f \in C^\infty(\Omega_0)$ に対して (9) は、唯一つの解 $u \in C^\infty(\Omega_0)$ をもつことがわかる。よって L は $C^\infty(\Omega)$ 上の全単射かつ連続な

写像である。Banachの開写像定理により、 L の逆も連続である。
 このことから L は、補題5での M に対する条件をすべて満たしていることがわかる。即ち L は、 $C^\infty(\Omega)$ に属する函数による積の作用素に等しい。これは条件(3)に矛盾する。よって L は Ω において準楕円型とはなりえない。これで命題が証明された。

参 考 文 献

- [1] H. Suzuki: *Analytic-hypoelliptic differential operators of first order in two independent variables*, J. Math. Soc. Japan, 16 (1964), 367-374.
- [2] A. Yoshikawa: *On the hypoellipticity of differential operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., 14 (1967), 81-88.
- [3] L. Hörmander: *Linear partial differential operators*, Springer-Ver., Berlin (1963).
- [4] L. Nirenberg-F. Trèves: *Solvability of a first order linear partial differential equation*, Comm. Pure Appl., 16 (1963), 331-351.
- [5] S. Mizohata: *Solutions nulles et solutions non analytiques*, J. Math. Kyoto Univ., 1 (1962), 271-302.