

一階楕円型方程式系の

non-coercive 境界値問題

京大 数研 岩崎 敷久

Ω を R^{n+1} の C^∞ な境界をもつ有界領域とする。

$$\textcircled{*} \quad \begin{cases} [A(D) + C + \lambda] u = f & \text{on } \Omega \\ Bu = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

なる境界値問題を考える。但し、

$$A(D) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad C \equiv C(x); \quad A_i(x), C(x), m \times m \text{ matrices}$$

$$B \equiv B(x) : m_{1/2} \times m \text{ matrix.}$$

次の結果が成り立つための十分条件を与える。

(結果) ある λ_0 が存在して $\forall \lambda \geq \lambda_0, \forall s \geq 0$, に対して
もし $f \in H^s(\Omega), g \in H^{s+1/2}(\partial\Omega)$ なら $u \in H^s(\Omega)$ となる

$\textcircled{*}$ の解が一意的に存在し、次の不等式を満たす。

$$\lambda \|u\|_s \leq C_s \{ \|f\|_s + \langle\langle g \rangle\rangle_{s+1/2} \}$$

以下、条件をのべる。

$$(Def) \quad A(x, \xi) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} A_i(\xi) \xi_i$$

(cmd 1) $A(x, \xi)$, $B(x)$, $C(x)$ は $\bar{\Omega}$ で x の C^∞ -function,
 $\forall (x, \xi) \neq 0$ $A(x, \xi) - \lambda$ は $(\xi, \lambda) \neq 0$ な S non-singular i.e.
 $(\xi, \lambda) \neq 0$ な S $\det(A(x, \xi) - \lambda) \neq 0$.

(Def) $\eta \equiv \eta(x)$ を $\partial\Omega$ の単位余法線とする。

$$\eta + M(x, \xi, \lambda) \equiv A(x, \eta)^{-1} \{A(x, \eta + \xi) - \lambda\}, x \in \partial\Omega$$

$$(Def) \quad P_{\pm}(x, \xi, \lambda) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} (\mu + M(x, \xi, \lambda))^{-1} d\mu$$

, $x \in \partial\Omega$, η と ξ は独立. Γ_+ (Γ_-) は $-M(x, \xi, \lambda)$ の正(負)
 の real part を持つ固有値を回る曲線。

$$(Def) \quad \mathcal{P}(x, \xi, \lambda) \equiv \text{range } P_-(x, \xi, \lambda) = \ker P_+(x, \xi, \lambda)$$

$$(Def) \quad N(x) \equiv \ker B(x)$$

$$(Def) \quad Q(x, \xi, \lambda) \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} P_-(x, \xi, \lambda) \Big|_{\lambda=0}$$

$$(Def) \quad S_{(\alpha_0, \xi_0)}^n(f) \subset \mathbb{C}^{m/2}, \quad f \in \mathbb{C}^m, \quad \alpha_0 \in \partial\Omega, \xi_0 \neq 0$$

$$h \in S_{(\alpha_0, \xi_0)}^n(f) \Leftrightarrow \exists \mu \geq 0, x \in \partial\Omega, g \in \mathbb{C}^m$$

$$\text{s.t. } |x - \alpha_0| + |\xi - \xi_0| + |g - f| \leq 1/n$$

$$|g| = |f|$$

$$h = \mu B(x) P_-(x, \xi, 0) g.$$

$$(Def) \quad S_{(\alpha_0, \xi_0)}(f) \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{S_{(\alpha_0, \xi_0)}^n(f)}$$

(註) = とわらないうえに η と ξ は独立であるとする。

$$(Cond 2) \quad \dim X(x) = \dim P(x, \xi, \lambda) = m/2 \quad x \in \partial\Omega$$

$$(Cond 3) \quad x \in \partial\Omega, \lambda > 0, |\xi|^2 \lambda^2 = 1 \quad \text{or} \quad N(x) \cap P(x, \xi, \lambda) = \{0\}$$

$$(Cond 4) \quad x \in \partial\Omega, \lambda = 0, |\xi|^2 = 1 \quad \text{or} \quad$$

$$N(x) \cap P(x, \xi, \lambda) \cap \{f; B(x) Q(x, \xi) f \in S_{\alpha, \xi}(f)\} = \{0\}$$

$$(Cond 5) \quad \mathcal{T} \text{ is } \partial\Omega \text{ on the Tangent field } \tau \text{ or } \tau.$$

$$\exists C = C(\xi) > 0 : \xi \text{ の連続関数, } 1/3 \leq \varepsilon < \delta = 1/2.$$

$$\text{s.t. } \lambda \geq 0, |\xi|^2 \lambda^2 = 1, |f| = 1, |g| = 1, f \in \mathbb{C}^m, g \in \mathbb{C}^{m/2}, x \in \partial\Omega$$

$$\alpha/2 + |\beta|/3 \leq 1 \quad \text{or} \quad \text{"}$$

$$|H_{\mathcal{T}\alpha\beta}^1(x, \xi, \lambda) f| \leq C |D(x, \xi, \lambda) f|^{(1-\delta\alpha - \varepsilon|\beta|)}$$

$$|H_{\mathcal{T}\alpha\beta}^2(x, \xi, \lambda) g| \leq C |D^*(x, \xi, \lambda) g|^{(1-\delta\alpha - \varepsilon|\beta|)}$$

$$\text{but } D(x, \xi, \lambda) \equiv B(x) P_-(x, \xi, \lambda), \quad P_-^* \text{ and } D^* \text{ are } P_- \text{ and } D \text{ of}$$

$$\text{adjoint matrices. } \text{or } \text{"}$$

$$H_{\mathcal{T}\alpha\beta}^1(x, \xi, \lambda) \equiv \{ \mathcal{T}^\alpha \mathcal{J}_\xi^\beta D(x, \xi, \lambda) - D(x, \xi, \lambda) \mathcal{T}^\alpha \mathcal{J}_\xi^\beta P_-(x, \xi, \lambda) \} P_-(x, \xi, \lambda)$$

$$H_{\mathcal{T}\alpha\beta}^2(x, \xi, \lambda) \equiv P_-^*(x, \xi, \lambda) \mathcal{T}^\alpha \mathcal{J}_\xi^\beta D^*(x, \xi, \lambda) \quad .$$

定理.

以上 (1~5) までの条件を仮定すれば" (結果) が従う。

この仮定のもとでは Ω を $R_+^{m+1} \equiv \{x', x_{m+1}; x_{m+1} > 0\}$ で
微分方程式の係数は x_{m+1} によらない、さらには $C \equiv 0$ として
有界領域をのぞけば x' によらない場合を考えれば十分であ

る。定理の証明には Hörmander による pseudo-differential operator の結果を使う。

(注) (Cond 1) のもとで (Cond 2~4) とは $\lambda > 0$ に対し次のような $E(\alpha, \xi, \lambda)$ が存在することである。

$$E(\alpha, \xi, \lambda) D(\alpha, \xi, \lambda) = P_{-}(\alpha, \xi, \lambda)$$

$$D(\alpha, \xi, \lambda) E(\alpha, \xi, \lambda) = I$$

$$\|E(\alpha, \xi, \lambda)\| < C/\lambda \quad \text{on } |\xi|^2 + \lambda^2 = 1, \lambda > 0.$$