

Lower part eigenvalue の 漸近分布

名大理 田村 英男

§1. 序

$A(x)$ を正值自己共役楕円型作用素, $p(x)$ を正值な函数, 無限遠で 0 に近づくとする。もし $p(x)$ の減衰が余り速くないならば, $A - p(x)$ は原点に集積する頁の固有値をもつ。いま $n(r)$ を $A - p$ の $-r$ より小さい頁の固有値の個数 (多重度も含めた意味で) として, $r \rightarrow 0$ の漸近挙動を調べるのが本稿の目的である。

例えば Schrödinger 作用素 $-\Delta - \frac{1}{|x|}$ を考えると上の作用素は $-\frac{1}{4j^2}$ ($j=1, 2, \dots$) 多重度 j^2 の頁の固有値をもつ。従って $n(r) = \frac{1}{24}r^{-\frac{3}{2}} + o(r^{-\frac{3}{2}})$ となる。

Schrödinger 作用素に対する研究は Brownell-Clark [2], McLeod [3] がある。方法は本稿の方法とは異なる。

§ 2. 仮定と主定理.

$A(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$; 定数係数楕円型微分作用素
で次の仮定を満足するものとする.

$$(i) \quad A(D) = \sum_{|\alpha|=m_0+1}^m a_\alpha D^\alpha + \sum_{|\alpha|=m_0} a_\alpha D^\alpha = A_1(D) + A_0(D)$$

ここで $0 < m_0 \leq m$, m_0 偶数

$$(ii), \quad A(\xi) \geq C |\xi|^{m_0} \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$$(iii) \quad A_0(\xi) \geq C |\xi|^{m_0} \quad \text{for } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$p(x)$ とし次の条件を満足する class と考える.

$$p(x) \in K(l, a), \quad (l > 0, a > 0)$$

$$(i) \quad p(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

$$(ii) \quad p_1(x) \text{ is smooth, positive } T_0 \text{ 函数,}$$

$$\text{更に} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^l p_1(x) = a$$

$$(iii) \quad p_2(x) \text{ is compact support } \varepsilon \text{ かつ}$$

non-negative T_0 函数.

$$(iv) \quad p_2(x) \in L_p, \quad p=1 \quad \text{if } m \geq n$$

$$p > \frac{n}{m} \quad \text{if } m < n.$$

一般に $A - p(x)$ の自己共役作用素としての定義

域 $\mathcal{D}(A - p)$ は $H^m(\mathbb{R}^n)$ である.

$$\mathcal{D}((A - p + C)^{\frac{1}{2}}) = H^{\frac{m}{2}}(\mathbb{R}^n) \text{ と } T_0 \text{ となる.}$$

Theorem: $A(D)$ 以上の条件を満足する微分作用素,

$p(x)$ は $K(l, a)$ に属する. (但し $0 < l < m_0$)

この時

$$n(r) = (2\pi)^{-n} \omega \int_{\mathbb{S}^n} a \frac{r}{x} r^{\frac{n}{m_0} - \frac{n}{x}} + o(r^{\frac{n}{m_0} - \frac{n}{x}})$$

ここで $\omega = \int (A(\beta) + 1)^{-\frac{n}{x}} d\beta$, $\int$ は $(n-1)$ 次元
単位球の表面積.

Remark: $n(r)$ の leading term には A の eigenvalue
の漸近分布と異なり, $A(D)$ の principal part の
本質的役割を果たさない. また, 上の結果は, $A(D)$ の
homogeneous な微分作用素の場合には, 変数係数の
場合にも拡張される.

§ 3. 証明の方針 ($A(D)$ の homogeneous)
次のことはよく知られた事実である.

$n(r) = \max \text{dimension of subspace}$
such that $\{u \mid (Au + ru) < -r(a, u),$

i.e. $(Au + ru) < (\rho u, u), u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$
次の固有値問題を考え.

$$(3.1) \quad Au + ru = \mu \rho u$$

上の事実から $n(r)$ は (3.1) の固有値問題の $\mu < 1$
を満足する固有値の個数に等しい. ここで $r = \frac{1}{\lambda}$ ($\lambda \rightarrow \infty$)
とおくと,

$$(3.2) \quad \lambda Au + u = h \rho u,$$

$N_\lambda(h)$ は (3.2) の固有値問題の h より小さい

固有値の個数と定義すれば,

$$(3.3) \quad \mathcal{N}(r) = N_{\lambda}(\lambda) \quad (\lambda = \frac{1}{r}).$$

以下, parameter λ を持つ固有値問題 (3.2) の漸近分布を考へる. この § 2 は $A(D)$ を homogeneous 楕円型作用素, 即ち $A(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} D^{\alpha}$ とおく.

(オ一般) : $p(x)$ が "smooth", 即ち $p(x) = p_1(x)$ のとき, 定理が成立すれば, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ のとき成立する;

簡単のために $a \equiv 1$ とする, 次の補題が必要である.

補題 3.1. (Birman - Solomyak [1])

$p_2(x)$ は上の条件を満足する函数. $M(h)$ を固有値問題 $Au = h p_2 u$ の漸近分布函数とすれば,

$$M(h) = (2\pi)^{-n} \omega_0 \int p_2(x) \tilde{u}^m dx + o(h^{\frac{m}{2}})$$

ここで $\omega_0 = \text{meas} \{ \{ \mid A(\xi) \leq 1 \} \}$.

補題 3.2. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$) に対して, $(A+r)^{-1} p_2$ は少なくとも 1 つ固有値を $(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{3})$ の中に持つ.

補題 3.3. $\mathcal{M}(r, \varepsilon)$ を作用素 $(A+r)^{-1} p_2$ の固有値で, ε より大きいものの個数と定義すれば,

$\mathcal{M}(r, \varepsilon) \leq C(\varepsilon)$. $C(\varepsilon)$ は r に依らず独立である.

補題 3.4. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $r(\varepsilon)$ が存在し、任意の r ($0 < r < r(\varepsilon)$) に対し $(A+r)^{-1} p_1$ は少なくとも一つ、固有値を $(1-\varepsilon, 1)$ の中にもつ。

上の補題 3.1 ~ 3.4 から

$$(3.4) \quad n(r) \leq n(r, \frac{1}{1-\varepsilon} p_1) + C(\varepsilon),$$

ここで、 $n(r, \frac{1}{1-\varepsilon} p_1)$ は 固有値問題

$Au - \frac{1}{1-\varepsilon} p_1 u = \mu u$ の $-r$ より小さい固有値の個数。

(3.4) から

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{n}{2} - \frac{n}{m}} n(r) \leq C_0(\varepsilon)$$

$$\text{ここで } C_0(\varepsilon) = (2\pi)^{-n} \omega \frac{S}{n} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

ε は任意であるので

$$(3.5) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{n}{2} - \frac{n}{m}} n(r) \leq C_0(0).$$

$$(3.6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} r^{\frac{n}{2} - \frac{n}{m}} n(r) \geq C_0(0),$$

(3.6) の証明 はやさしい。

(3.5) と (3.6) より主張が証明される。

(才2段); (作用素 $A - p_1$ に対する lower part eigenvalue の漸近分布)。

$\lambda Au + u = h p_1 u$ の固有値問題は同値な固有値問題

$$(3.7) \quad p_1^{-\frac{1}{2}} (\lambda A + 1) p_1^{-\frac{1}{2}} u = h u.$$

に変換される。

今 k (integer) $\in 2km > n, 2kl > n$, ε 満足する δ にとる。

$$(3.8) \quad (p_1^{-\frac{1}{2}}(c\lambda A + 1)p_1^{-\frac{1}{2}})^{2k} = p_1^{-k}((\lambda A + 1)^{2k} + \sum_{i=1}^{2k} \lambda^i Q_i) p_1^{-k}$$

$\equiv z$, Q_i は微分作用素, z ,

$$Q_i = \sum_{|\alpha| \leq m_i-1} b_{i,\alpha}(x) D^\alpha, \quad |b_{i,\alpha}(x)| \leq C_{i,\alpha} p_{1/2}^{\frac{m_i-|\alpha|}{2}} \varepsilon$$

満足する。

$$B = \sum \lambda^i Q_i, \quad (B = B^*), \quad p_1^{2k} = g \quad \text{とおく。}$$

Resolvent equation (cf.),

$$(3.9) \quad \begin{aligned} & g^{\frac{1}{2}}(c\lambda A + 1)^{2k} + B + h^{2k}g)^{-1} g^{\frac{1}{2}} \\ &= g^{\frac{1}{2}}(c\lambda A + 1)^{2k} + h^{2k}g_0)^{-1} g^{\frac{1}{2}} \\ &+ g^{\frac{1}{2}}(c\lambda A + 1)^{2k} + h^{2k}g_0)^{-1} g^{\frac{1}{2}} \cdot h^{2k}(g_0 - g)(\lambda A + 1)^{2k} + B \\ &+ h^{2k}g)^{-1} g^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow g^{\frac{1}{2}}(c\lambda A + 1)^{2k} + h^{2k}g_0)^{-1} B((\lambda A + 1)^{2k} + B + h^{2k}g)^{-1} g^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$\equiv z$ $g(x_0) = g_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ は任意に固定されたものとする。

$\{\mu_j, \varphi_j(x)\} \in$ 固有値問題 (3.7) の固有値とそれに対応する固有函数として, (3.9) に作用すれば, 次の積分方程式を得る (cf. Titchmarsh [4])

$$(3.10) \quad \begin{aligned} & \varphi_j(x_0) / \mu_j^{2k} + h^{2k} \\ &= g^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(x, h)(x_0, y) g^{\frac{1}{2}}(y) \varphi_j(y) dy \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{h^{2k}}{\mu_j^{2k} + h^{2k}} \right) f^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K_{\lambda, h}(x_0, y) (f_0 - f(y)) f^{-\frac{1}{2}}(y) f_j(y) dy \\ - \frac{1}{\mu_j^{2k} + h^{2k}} f^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K_{\lambda, h}(x_0, y) B(1) f^{-\frac{1}{2}}(y) f_j(y) dy.$$

$$\equiv a_j(x_0) + b_j(x_0) + d_j(x_0) \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$\text{こゝで} \quad K_{\lambda, h}(x_0, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x_0 - y) \cdot \xi} ((\lambda A + B)^{2k} + h^{2k} f_0) d\xi.$$

(3.10) の両辺を 2 乗し、 j に n を加え、 x_0 について積分すれば、

(3.11)

$$\sum_j \frac{1}{(\mu_j^{2k} + h^{2k})^2} = \int \sum_j a_j^2(x_0) dx_0 + \int \sum_j b_j^2(x_0) dx_0 \\ + \dots + \int \sum_j d_j^2(x_0) dx_0.$$

(3.11) の右辺を評価するに ε による $\varepsilon > 0$ に対して、 $h \geq \max(h(\varepsilon), (C(\varepsilon)\lambda^\beta) (\beta < 1))$ とし

(3.12)

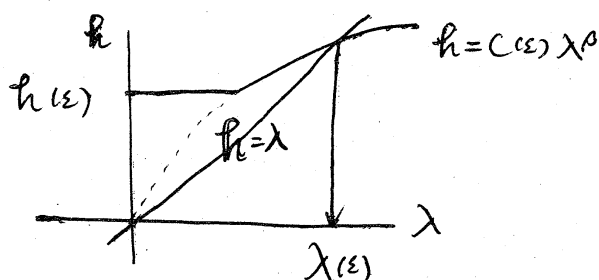
$$\sum_j \frac{1}{(\mu_j^{2k} + h^{2k})^2} = C \lambda^{-\frac{n}{m}} h^{\frac{n}{2} - 4k} + \lambda^{-\frac{n}{m}} \varepsilon h^{\frac{n}{2} - 4k}.$$

が成立する。こゝで $h(\varepsilon)$ は λ に対して独立である。従って Hardy-Littlewood の Tauber 型定理により

$$(3.13) \quad N_\lambda(h) = C \lambda^{-\frac{n}{m}} h^{\frac{n}{2}} + \lambda^{-\frac{n}{m}} \varepsilon h^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{if } h \geq \max(h(\varepsilon), (C(\varepsilon)\lambda^\beta))$$

こゝで $h(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ は ε の $h(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ とは必ずしも一致しない。



従って $\lambda > \lambda(\epsilon)$ のとき

$$N_\lambda(\lambda) = C \lambda^{\frac{n}{2} - \frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{2} - \frac{n}{m}}) \quad \text{と } T_3 \text{ へ}$$

主張が証明される。

§ 4. 証明の方針 (in homogeneous 場合)

(補題 4.1) $\{\mu_j(\lambda)\}_{j=1}^\infty$ eigenvalue of problem

$$\lambda A + u = h p, u \text{ のとき}$$

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{(\mu_j(\lambda) + h)^k} \leq C(k) \lambda^{-\frac{n}{m_0}} h^{\frac{n}{2} - k}.$$

$$\text{if } h \geq C \lambda^{\beta(k)} \quad (\beta(k) < 1, k \text{ integer, } k \geq \frac{n}{2})$$

前の § と 同様に 次の積分方程式が成立する。

$$(4.1) \quad \left(\frac{1}{\mu_j + h} \right) \varphi_j(x_0).$$

$$= p_1^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(\lambda, a)(x_0, y) p_1^{\frac{1}{2}}(y) \varphi_j(y) dy \\ + \left(\frac{h}{\mu_j + h} \right) p_1^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(\lambda, a)(x_0, y) (p_1(x_0) - p_1(y)) p_1^{\frac{1}{2}}(y) \varphi_j(y) dy$$

$$\text{そこで } K(\lambda, a)(x_0, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x_0 - y) \cdot \xi} (\lambda A(\xi) + 1 + h p_1(x_0))^{-1} d\xi.$$

(4.1) ε $2h$ (十分大ととる) 区 h_{12} 2
微分すると

$$(4.2) \quad \varphi_j^{(12)} / (\mu_j + h)^{2k+1} = p_1^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(\lambda, h)(x_0, y)^{(2k)} p_1^{\frac{1}{2}}(y) \varphi_j(y) dy$$

$$+ h \sum_{s=0}^{2k} C_s \varphi_j^{(s+1)} / (\mu_j + h)^{s+1} p_1^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(\lambda, h)(x_0, y)^{(2k-s)} (p_1(x_0) - p_1(y)) p_1(y)^{-\frac{1}{2}} \varphi_j(y) dy$$

$$+ \sum_{t=0}^{2k} C_t \varphi_j^{(t)} / (\mu_j + h)^t p_1^{\frac{1}{2}}(x_0) \int K(\lambda, h)(x_0, y)^{(2k-t)} (p_1(x_0) - p_1(y)) p_1(y)^{-\frac{1}{2}} \varphi_j(y) dy.$$

$$\equiv a_j(x_0, \lambda, h)$$

$$+ h \sum_{s=0}^{2k} C_s \varphi_j^{(s+1)} / (\mu_j + h)^{s+1} b_{j,s}(x_0, \lambda, h)$$

$$+ \sum_{t=0}^{2k} C_t \varphi_j^{(t)} / (\mu_j + h)^t d_{j,t}(x_0, \lambda, h)$$

$$(j=1, 2, \dots)$$

(4.2) の両辺を $2k+2$, j 2 つ 11 2 加え x_0 に
ついで積分する

(補題 4.2)

$$\begin{aligned} & \sum_j \int \frac{1}{(\mu_j + h)^{2t}} d_{j,t}^2(x_0, \lambda, h) dx_0 \\ & \leq C(t) \lambda^{-\frac{n}{m_0}} h^{\frac{n}{2} - (4k+2)} O(\lambda^\beta h^{-\alpha}) \\ & = 22'' \quad \alpha > \beta > 0. \end{aligned}$$

上の補題 4.2 を使って

$\sum_j \frac{1}{(\mu_j + h)^{4k+2}}$ の $h \rightarrow \infty$ 2 の漸近挙動が得られる。

参考文献

- [1] M. S. Birman and M. E. Solomyak.
Leading term in the asymptotic spectral
formula for non-smooth elliptic problems
Fan analysis and its app 4. 1-13 (1970)
- [2] F. H. Brownell and C. W. Clark.
Asymptotic distribution of the eigenvalues
of the lower part of the Schrödinger
operator spectrum J. Math. Mech 10
31-70 (1961)
- [3] J. B. McLeod.
The distribution of the eigenvalues for
the hydrogen atom and similar cases
Proc London. Math Soc 11. 139-158
(1961)
- [4] E. C. Titchmarsh
Eigenfunction expansion vol II.