

量子カオスにおける力学量の時間発展Ⅱ

九工大・情報工 高 橋 公 也

早大・理工 首 藤 啓

量子力学系のカオスの研究では、量子古典対応は重要な問題である。量子古典対応を考えるとき量子力学系の波動関数を相空間上の表示（伏見関数など）に書き直して古典力学の確率分布関数と比較する方法が使われる。極小波束から出発する時間発展を考えると、古典力学的に可積分な系やトーラス領域においてはこの対応は、比較的長い時間よい一致を示す。しかしカオス領域においてはかなり短い時間のうちに対応は悪くなる。量子古典対応が破れる原因は波束の引き延しと折れたたみにより波動関数が重なりあい、そこに量子干渉が起きるためである。これまでの研究では、量子古典対応の破れるまでの問題を考えていたが、ここでは量子古典対応が破れた後の時間発展におけるトーラス領域とカオス領域の波動関数の振舞のの違いについて考える。一般に波動関数の振舞そのものを考えるのは困難であるので力学量の期待値の時間発展を調べることにする。ここでは2つの系をあつかう。可積分系の例として、

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{4} q^4 \quad \hbar = 0.04 \quad (1)$$

をもちい、初期状態として期待値が $\langle q \rangle = 1.5$, $\langle p \rangle = 0$ 極小波束をとる。カオス領域をもつ非可積分系の例として

$$H = \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{16} (1 + \sin \omega \tau) q^4 \quad \hbar = 0.04 \quad \omega = 0.7 \quad (2)$$

をもちい、初期状態として期待値が $\langle q \rangle = 0$, $\langle p \rangle = 0$ の極小波束をとる。図1には、可積分系における力学量の期待値 $\langle q \rangle$ の時間発展を示す ($0 \leq t \leq 3000$)。図2には $\langle q \rangle$ のパワースペクトルを示す。図3は非可積分系における力学量の期待値 $\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ の時間発展を示す。 ($\Delta t = T_0/2$ ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$: 外力の周期) の時間間隔で $0 < t \leq 110T_0$)。ここで $\langle q \rangle$ は系の対称性と初期値の取り方により常に0。非可積分系の時間発展では力学量の期待値は量子古典対応が破れた後（この系では約 $t \geq 2T_0$ ）は、非常にランダムな時間変化を示す。これに対し、可積分系の時間発展では力学量の期待値は量子古典対応が破れた後（この系では約 $t \geq 30$ ）においてもうなり現象に似たある種の特徴的なパターンを示す。可積分系でこのような時間変化を示す理由は、エネルギー固有値や固有関数の性質と初期状態として極小波束を選んだこと

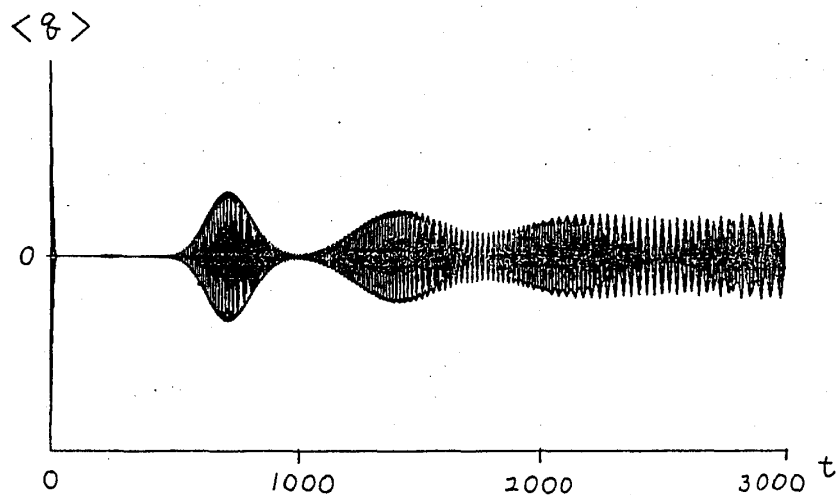


Fig. 1 可積分系における $\langle q \rangle$ の時間発展

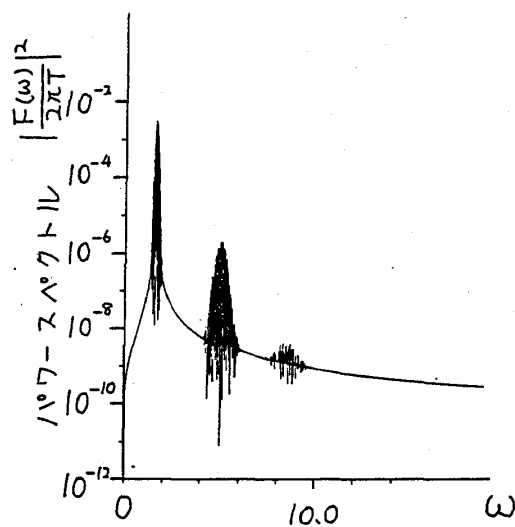


Fig. 2 可積分系における $\langle q \rangle$ のパワースペクトル

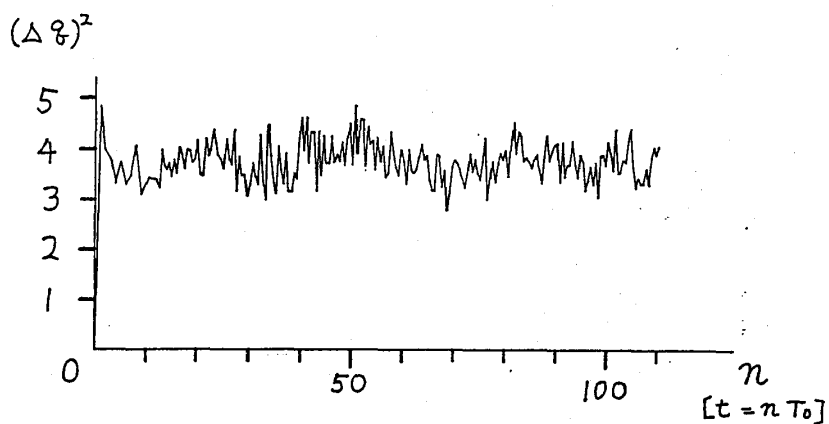


Fig. 3 非可積分系における $\langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$ の時間発展。点の間隔は $\Delta t = T_0/2$ ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 0.7$)

により、各スペクトルの間に強い相関が生じるためと考えられる。そこで初期状態として極小波束を取った可積分系のスペクトルを簡単なモデルを使って特徴づけてみよう。エネルギー固有値を E_n その固有関数を u_n とし、系のパリティを考慮すると、一般に $\langle q \rangle$ は、

$$\begin{aligned} \langle q \rangle = & \sum_{n,m} \langle u_n | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_0 | u_{n+2m+1} \rangle \langle u_{n+2m+1} | \hat{q} | u_n \rangle e^{\frac{i}{\hbar} (E_{n+2m+1} - E_n) t} \\ & + \sum_{n,m} \langle u_{n+2m+1} | \Psi_0 \rangle \langle \Psi_0 | u_n \rangle \langle u_n | \hat{q} | u_{n+2m+1} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{n+2m+1} - E_n) t} \end{aligned} \quad (3)$$

となる。可積分系なので古典量子化で近似可能である。初期値として極小波束を取ったことにより振幅と位相の間に特殊な関係が成り立ち、近似的に次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \langle q \rangle \sim & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(\frac{E_{n+2m+1} - E_n}{\hbar} - (2m+1)\omega_0)^2}{2((2m+1)\Delta)^2}} \\ & \times (C_m e^{\frac{i}{\hbar} (E_{n+2m+1} - E_n) t} + C_m^* e^{-\frac{i}{\hbar} (E_{n+2m+1} - E_n) t}) \end{aligned} \quad (4)$$

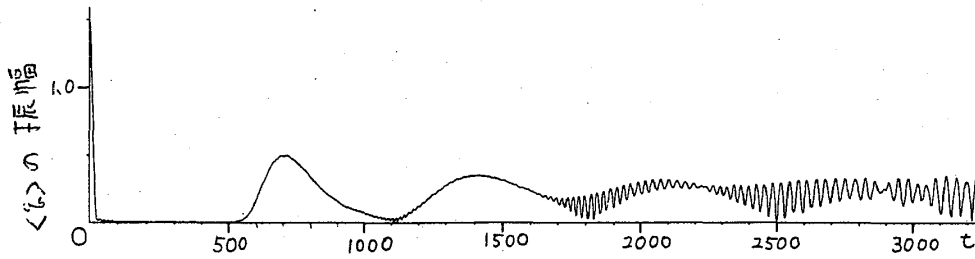
図2のパワースペクトルは、この近似とよく一致する。 m を固定すると分散 $(2m+1)\Delta\omega$ をもったガウス分布になり、 $\hbar \sim 0$ とすれば、ピークの間隔 $D\omega_m \sim \frac{1}{\hbar} (E_{n+2m+1} - E_n) - \frac{1}{\hbar} (E_{n+2m} - E_{n-1})$ は、ほぼ一定となる。さらにこの系の時間発展では $m \geq 1$ のスペクトルは小さいために時間発展にあまり寄与しない（最初に出てくる小さいうなりのみ）。そこで、 $m=0$ の場合のみ考え、初期条件より $C_m = C_m^* = C$ とおいて、次のモデルを考える。

$$\langle q \rangle \sim C \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \cos((\omega_0 + D\omega n)t) e^{-\frac{(D\omega n)^2}{2(\Delta\omega)^2}} \quad (5)$$

ところがこのモデルでは、 $t = \frac{2\pi}{D\omega} \times \text{整数}$ で完全に初期状態にもどってしまう。しかし実際の系では、 $t = \frac{2\pi}{D\omega} \sim 710$ は最初の大きなうなりのピークにあたり完全に再帰していない。従って、このモデルではこの現象を説明できない。そこでスペクトルの間隔が等間隔ではなく n^2 にも依存するモデルを考える。

$$\langle q \rangle \sim 2C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 \tau + D\omega(n - \varepsilon n^2)t) \exp\left(-\frac{(D\omega(n - \varepsilon n^2))^2}{2(\Delta\omega)^2}\right) \quad (6)$$

図4にこのモデルで計算した振幅の変化を示す ($0 \leq t \leq 3000$)。この範囲では実際の系との違いはほとんどみられない。 $t \geq 5000$ における実際の系の振幅は、数十秒おきに大きくなったり小さくなったりするがこの変動はかなりランダムに変化する。これに対し、近似計算ではこのような振幅の変化の他に一定周期を持ったピークが数周期続くようなことがある。これはスペ

Fig. 4 $\langle q \rangle$ の時間発展のモデル(式(6))の計算結果

クトルの間隔のずれを εn^2 の形で入れたためと考えられる。もし $t = \frac{2\pi}{D\omega} m$ のときに次のような関係が成り立つとすると,

$$D\omega(n_0 - \varepsilon n_0^2) \frac{2\pi}{D\omega} m = 2\pi n_0 m - 2\pi m \varepsilon n_0^2 \sim 2\pi k$$

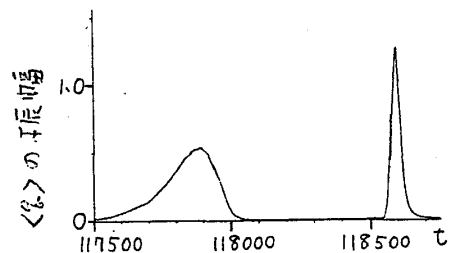
$$\varepsilon n_0^2 \sim \frac{-k'}{m} \quad (7)$$

n_0 のスペクトルの位相は 0 になるさらにほかのスペクトルで $n_1^2 = l n_0^2$ となるスペクトルの位相も 0 となり, このような関係にない他のスペクトルの位相がでたらめでお互いに打ち消し合うとするとこの時かなり大きな振幅になる。さらに $t = \frac{2\pi}{D\omega} m + \frac{2\pi}{n_0 D\omega} l$ ごとに近似的に同じ大きさの振幅になり近似的な周期 $\frac{2\pi}{n_0 D\omega} l$ を持つ。すなわち

$$D\omega(n_0 - \varepsilon n_0^2) \left(\frac{2\pi}{D\omega} m + \frac{2\pi l}{n_0 D\omega} \right)$$

$$= 2\pi n_0 m - 2\pi m \varepsilon n_0^2 + 2\pi l - 2\pi \varepsilon n_0 l \quad (8)$$

であり, ここで最後の項 $-2\pi \varepsilon n_0 l$ の誤差を無視すればほぼ周期的になるからである。特に $n_0 = 1$ のときは他のすべてのスペクトルの位相が 0 となるので完全に初期状態になる。図 5 に近似的に $\varepsilon \sim \frac{k}{m}$ が成り立ちほぼ再帰している場合を示す。しかし実際の系では, このような再帰は起きていない。これは, 再帰が起こる時間ではすでに近似式が成り立たなくなっているからである。従って, さらに高次の項の近似を考えなければならない。しかし, もし $\hbar$ がもっと 0 に近い系であれば再帰が起こるまでの時間まで近似式が成り立ち実際に再帰現象がみられるはずである。量子力学の時間発展はすべて準周期的である。従って近似的な再帰現象は必ず起こる。しかし可積分系ではそのような再帰現象が普通に考えられているよりも短い時間 ($\sim \frac{1}{\hbar^2}$) で起きると考えられる。

Fig. 5 モデル(式(6))でみられる $\langle q \rangle$ の再帰現象。