

A Characterization of Regulus Nets

大阪大学教養部 平峰 豊 (Yutaka Hiramine)

3次元射影空間 $PG(3, q)$ の中の絶対既約な2次曲面には、
 錐 $\mathcal{C}_3$, 楕円型 $\mathcal{E}_3$, 双曲型 $\mathcal{H}_3$ のちうと三種類があることが
 知られている [4] である。このうち双曲型2次曲面 $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$
 は Net または直交テンソル陣の完備化の一貫性に関して興味
 深い性質をもつ。この $\mathcal{H}_3$ から得られる net — *regulus net* —
 は $SL(2, q)$ を認容する。(全自己同型群は中心積 $SL(2, q) * SL(2, q)$
 を含む。) しかし, *regulus net* と同一の parameters をもち,
 $SL(2, q)$ を認容する nets は他にもいくつかある。これら
 は $SL(2, q)$ の $V(4r, p)$ ($q = p^r$) 上の表現に対応している。
 以下ではこのことについて述べる。

$\mathcal{P}$ を有限集合 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{P}$ の部分集合のある族とする。結合構造
 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ が位数 n , 次数 r の net であるとは、次の4条件
 が満たされることを言う：

(i) $\mathcal{L} = \mathcal{C}_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}_r$ (disjoint union), $r \geq 3$.

(ii) $\mathcal{C}_i \ni l, \mathcal{C}_j \ni g \longrightarrow |l \cap g| = 1 \quad (\forall i \neq j)$

(iii) $\forall P \in \mathcal{P}, \forall i (1 \leq i \leq r) \exists l \in \mathcal{C}_i$ such that $P \in l$

(iv) $\exists g \in \mathcal{L}, |g| = n.$

($\mathcal{P}$ の元を点, $\mathcal{L}$ の元を直線と言う.)

上記4条件より 次のことが容易に確かめられる。

- $|g| = n \quad \forall g \in \mathcal{L}. \quad \mathcal{P} = \bigcup_{l \in \mathcal{C}_i} l \quad (1 \leq i \leq r)$
- $|\mathcal{C}_1| = \dots = |\mathcal{C}_r| = n \quad |\mathcal{P}| = n^2, \quad |\mathcal{L}| = nr$
- $n+1 \geq r$

$N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ を略して (n, r) -net と呼ぶ。 $d = n+1-r$ を不足数と言うが、 $d=0$ であることと $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ がアフィン平面であることは同値である。各 $\mathcal{C}_i$ ($1 \leq i \leq r$) を平行類と呼ぶ。 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ が completable であるとは、 $\mathcal{L}$ を含む $\mathcal{P}$ の部分集合の族 $\overline{\mathcal{L}}$ があって (i.e. $\mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{L}}$) $N(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{L}})$ が不足数0の net つまり位数 n のアフィン平面とできることを言う。 $N(\mathcal{P}, \overline{\mathcal{L}})$ を $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ の completion と言う。 ((n, r) -net は位数 n の $r-2$ 個の直交ラテン方陣と同値な概念である [1] から, net の completion は完備直交ラテン方陣の存在と同じことである。) 不足数が位数に比較して きれめて小さい時は常に completion が存在あることが知られている。

定理 (R.H. Bruck [2]) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$ とするとき $n > f(d-1)$ ならば $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は completion をもつ。

一方、completion の一意性については次が知られている。

定理 (R. H. Bruck) $d < \sqrt{n} + 1$ ならば、completion は高々 1 通りしか存在しない。([2])

T. G. Ostrom は $d = \sqrt{n} + 1$ の時に關して次を示した。

定理 (T. G. Ostrom [8]) $d = \sqrt{n} + 1$ の時は高々 2 通りの completion が存在する。

(このときの d を臨界的であるという。)

(n, r) -net $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ の不足数 d が臨界的で、2 通りの completion $N \cup N_1$ 及び $N \cup N_2$ をもつとする。(各 N_i は (n, d) -net で $d = \sqrt{n} + 1$) このとき N_2 の任意の直線 ℓ に対して net N_1 を ℓ に制限したものを $\ell|N_1$ (つり点集合は ℓ , 直線集合は N_1 の各直線と ℓ との共通部分の全体をとる。) は $(\sqrt{n}, \sqrt{n} + 1)$ -net となることが容易に分かる。^{空でない} アフィン平面 $\ell|N_1$ は次により完全に決定された。

定理 (O. Prohaska [9]) $\ell|N_1$ はデカルツ平面である。
とくに n は素数の偶数中ではなければならない。

上の場合、完備化された net $N \cup N_1$ で N_1 の部分を N_2 に取り換えることにより他の完備な net $N \cup N_2$ が得られている。完備化の一意性が崩れる時すなわち不足数が臨界的な状態の時に生ずるこの2つの部分 nets N_1, N_2 のあり方は N を無視

も有限幾何的にみても特殊であることが予想される。一般に (n, s) -net $M_1 (= M_1(\mathcal{O}, \mathcal{L}))$ が derivable であるとは、点集合 $\mathcal{O}$ の上に構成された (n, s) -net $M_2 (= M_2(\mathcal{O}, \mathcal{L}'))$ があって、

$\mathcal{L}|_{M_1} = (s-1, s)$ -net $(\forall l \in \mathcal{L}')$ が成り立つことを言う。

($n = |\mathcal{L}| = (s-1)^2$ であるから必然的に $s = \sqrt{n} + 1$ である。) M_2 を M_1 の opposite net という。先の N_1 は derivable で、 N_2 は N_1 の opposite net である。

derivable net の例として regulus net がある。次にこれを定義する。 $\mathcal{F}$ を 3次元射影空間 $PG(3, q)$ の中の双曲型 2次曲面 $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ とする。 $\mathcal{F}$ は $(q+1)^2$ 個の点からなり、 $2(q+1)$ 個の射影直線を含む。これらは次の条件を満たすような 2組 $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ に分けることができる。 ([4])

(i) $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}'$ は $\mathcal{F}$ に含まれる射影直線の全体。

(ii) $|\mathcal{R}| = |\mathcal{R}'| = q+1$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \emptyset$.

(iii) $l_1, l_2 \in \mathcal{R}$ ($l_1 \neq l_2$) ならば $l_1 \cap l_2 = \emptyset$.

(iv) $l'_1, l'_2 \in \mathcal{R}'$ ($l'_1 \neq l'_2$) ならば $l'_1 \cap l'_2 = \emptyset$

(v) $l \in \mathcal{R}, l' \in \mathcal{R}'$ ならば $|l \cap l'| = 1$

$\mathcal{R}$ を regulus, $\mathcal{R}'$ を opposite regulus という。

regulus net を定義するために $PG(3, q)$ と $V(4, q)$ を同一視して考える。従って上の条件 (iii) (iv) (v) は次のように言い換える

ことができる。

(iii)' $\mathcal{R}$ の異なる 2 直線は 零ベクトル だけを共有する。

(iv)' $\mathcal{R}'$ の異なる 2 直線は 零ベクトル だけを共有する。

(v) $\mathcal{R}$ の直線と $\mathcal{R}'$ の直線は 1 個のベクトルを共有する。

$(q^2, q+1)$ -net $N_{\mathcal{R}}$ を次のように定義する。

点集合 $\mathcal{P}$: $V(4, q)$ のベクトル全体

直線集合 $\mathcal{L}$: $\mathcal{R}$ の直線 及び その translates 全体

(つまり $\mathcal{L} = \{l+v \mid l \in \mathcal{R}, v \in V = V(4, q)\}$)

Incidence : 包含関係

$l \in \mathcal{R}$ を含む 平行類は $\{l+v \mid v \in V\}$ となり $N_{\mathcal{R}}$ が $(q^2, q+1)$ -net であることが確かめられる。同様に $N_{\mathcal{R}'}$ も定める。 $N_{\mathcal{R}}$ を *regulus net* という。 $N_{\mathcal{R}}$ は *derivable* で、 $N_{\mathcal{R}'}$ が $N_{\mathcal{R}}$ の *opposite net* となることから上の (iii)', (iv)', (v)' より明らかである。 $(N_{\mathcal{R}}$ は後半の例 3 の $p=1$ に同型。例 3 を参照)

derivable nets は上の *regulus nets* に限ることから、N.L. Johnson により示された。

定理 (N.L. Johnson [5]) $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ を *derivable net* とすると、ある体 K が存在して $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は K 上の 3 次元射影空間 $\mathcal{E}$ の *regulus* から得られたものに同型である。さらに $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ の全自己同型群は $\text{P}\Gamma\text{L}(4, K)_W$ (*global stabilizer*) と同型である。
(ここで W は $\mathcal{E}$ のある射影直線とする。)

この定理は derivable net の位数は $n = p^{2m}$ (p は素数) の形
 であることを示している。また自己同型群として次の群と
 同型な群を含むことも分かる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid \det A \det B = 1, A, B \in GL(2, q), C \in M(2, q) \right\}$$

(module scalars)

$$(\geq GL(2, q) \cdot E_{q^4} \supset E_{q^4}) \quad M(2, q) \text{ は } K (= GF(q)) \text{ 上の } 2 \times 2 \text{ 行列全体}$$

Regulus nets の群論的特徴付け。

derivable net と同じ parameters $\{n, r (= \sqrt{n} + 1)\}$ をもつ
 net を考えると、上に述べた N. L. Johnson の定理により
 $n = p^{2m}$, $r = p^m + 1$ の形をしていなければならない。
 このような net は位数 $n (= p^{2m})$ を与えたとき非常に
 多く存在する。なぜなら位数 n のアフィン平面 (これ自体が
 すでに非常に多く存在することが分かっている) を一つとり、その $n+1$ 個
 の平行類のうち、 $\sqrt{n} + 1$ 個を任意に選べば $(n, \sqrt{n} + 1)$ -net が
 得られるからである。従って特徴付けを得るには derivable
 net の他の性質を考える必要がある。N. L. Johnson の定理に
 より、derivable net は regulus net であり、その自己同型群
 は $PSL(4, q)_W$ を含んでいた。N. L. Johnson は regulus
 net をこの性質に注目して特徴付けた。

定理 (N. L. Johnson [6]). N を $(q^2, q+1)$ -net とする。

とあけは. $X(=GT)$ は $\Delta = \{C_0, \dots, C_2\}$ の置換を引きおこす. $H^\Delta = 1$ の時は [6] によつて N は *regulus net* となるので, $H^\Delta \neq 1$ としてよい. Dickson による $SL(2, q)$ の部分群に関する結果 ([10] 参照) より, (i) H^Δ が可移でなく $q \in \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 又は (ii) H^Δ が可移 のいずれかが起きる.

(i) の場合について考える. $q=2$ では 次数 $= q+1=3$ となるので, 明らかに *regulus net* だけである. また $q=7, 9, 11$ の時は起りえないことも示すことができる. しかし, $q \in \{3, 5\}$ の時は *regulus* でない $(q^2, q+1)$ -net が実際にたど一つずつ存在することが示される. この例を具体的に書くために記号を次のように定める.

$V = V(2m, K)$ K : 体 とする. $V = V(m, K) \times V(m, K)$ とする.

- $(x=0) \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, y) \mid y \in V(m, K)\}$ (0 は $V(m, K)$ の零ベクトル)
- $(y=xM) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid y=xM, x \in V(m, K)\}$ ($M \in M(m, K)$)
- $\mathcal{L}_0 = \{(x=0)\} \cup \{(y=xM) \mid M \in \mathcal{S}\}$ ($\mathcal{S} \subset GL(m, K) \cup 0$)

に対して $\mathcal{L} = \{l+v \mid l \in \mathcal{L}_0, v \in V\}$, $\mathcal{P} = V$

とあけは

$$N(\mathcal{P}, \mathcal{L}) \text{ が net } \iff \det(M_1 - M_2) \neq 0 \quad \forall \underset{(\neq)}{M_1, M_2 \in \mathcal{S}}$$

(上が成り立つ時 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は $(|K|^m, |\mathcal{S}|+1)$ -net で, $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ の直線が 零ベクトルを含むもの全体となっている。)

例1. $q=3$, $K=GF(3)$, $V=V(2, K)$, $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$

点集合 $\mathcal{P} = V \times V$

直線集合 $\mathcal{L} = \{l+v \mid l \in \mathcal{L}_0, v \in V \times V\}$

$$\text{ただし } \mathcal{L}_0 = \{(x=0)\} \cup \{(y=xM) \mid M \in \mathcal{S}\}$$

この時 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は $(9, 4)$ -net であり *regulus net* と同型ではなく、次の群 G を認容する。 ($G \cong GL(2, 3)$)

$$G = \left\langle x, y, t \mid x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$x^3 = y^3 = 1, (xy)^2 = -1, t^2 = 1, x^t = y, y^t = x$$

例2. $q=5$, $K=GF(5)$, $V=V(2, K)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{L}_0 = \{(x=0)\} \cup \{(y=xM) \mid M \in \mathcal{S}\}$$

点集合 $\mathcal{P} = V \times V$

直線集合 $\mathcal{L} = \{l+v \mid l \in \mathcal{L}_0, v \in V \times V\}$

この時 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は $(25, 6)$ -net であり *regulus net* と同型ではなく、次の群 G を認容する。 ($G \cong GL(2, 5)$)

$$G = \left\langle d, t, e, f, s \mid d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\langle d, t \rangle \cong Q_8, \langle d, t, e \rangle \langle s \rangle \cong SL(2, 5)$$

記号: 以下では例1, 例2の net をそれぞれ $NR(3)$, $NR(5)$ と書く。

(ii)の場合については H^{ω} が可移で、 $HT \supset T$ より、 $T^{\omega} = 1$ となるので、この net は $V(4r, p)$ 上に上の例1や例2のFうな方法(点集合を $V(4r, p)$ とみて、直線集合は $\mathcal{L}_0$ をもとにして構成する)で得られるものと同型になる。次数が $4r$ 以下の既約な $GF(p)SL(2, p^r)$ -加群は分かっている(cf. [3])ので、 $V(4r, p)$ の $GF(p)SL(2, p^r)$ -加群としての既約成分で起りうるものが限られてくる。このことをもとにして(ii)の場合も net を完全に分類できる。

例3 $K = GF(q)$, $q = p^r$ (p は素数) $V = V(2, q)$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & kp \end{pmatrix} \mid k \in K \right\} \quad \mathcal{L}_0 = \{(x=0)\} \cup \{(y=xM) \mid M \in \mathcal{S}\}$$

(p は K の自己同型) ($x, y \in V$)

点集合 $\mathcal{P} = V \times V$

直線集合 $\mathcal{L} = \{l+v \mid l \in \mathcal{L}_0, v \in V \times V\}$

この時 $N(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は $p \neq 1$ ならば $(q^2, q+1)$ -net で non-regular かつ $GL(2, q)$ を認容する。この net を near regular net と呼ぶことにする。($p=1$ の時は regular net になっている。)

例4 $K = GF(q)$, $q = p^r$ (p は素数で $p \geq 5$)

$$V = V(2, K) \quad U_{\infty} = \langle (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1) \rangle \leq V \times V$$

$$U_k = \langle (k^3, k^2, k, 1), (3k^2, 2k, k, 1) \rangle \leq V \times V, \quad k \in K$$

$$\mathcal{L}_0 = \{U_k \mid k \in K \cup \{\infty\}\}$$

点集合, 直線集合を例3と同様に定めれば $(q^2, q+1)$ -net
を得てこれは non-regulus かつ $GL(2, q)$ を認容する。この net の
completion の一つに Hering plane がある ([7])。この net を Hering
net と呼ぶことにする。

定理 (☆) をみたす net は次のいずれかである。

- (i) regulus net, (ii) near regulus net, (iii) Hering net,
(iv) $NR(3)$, (v) $NR(5)$.

Remark: (ii) の場合 $H(\cong SL(2, q))$ は N を定義している
ベクトル空間上 完全可約, (iii) の場合 H は 2 変数 x, y の 3 次
の同次式上に $SL(2, q)$ が引き起す表現と同じもの, (iv) は
 $SL(2, 3)$ の $V(4, 3)$ への完全可約でない表現で $Z(SL(2, 3))$ が
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として作用しているもの, (v) は $SL(2, 5)$ の $V(4, 5)$ への完全可約
でない表現で $Z(SL(2, 5))$ が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ として作用しているものである。

文 献

- [1] Beth-Jungnickel-Lenz, Design Theory, Cambridge
University Press, 1986
[2] R.H. Bruck, Finite nets II, Uniqueness and embedding,

- Pacific J. Math. 13, 421-457 (1963)
- [3] D. A. Foulser and N. L. Johnson, The translation planes of order q^2 that admit $SL(2, q)$ as a collineation group. I Even Order, J. Alg. 86, 385-406 (1984)
- [4] Hirschfeld, Projective Geometries over finite fields, Oxford University Press, 1979.
- [5] N. L. Johnson, Derivable nets and 3-dimensional projective spaces II - the structure, Arch. Math. 55, 94-104 (1990)
- [6] ———, A group theoretic characterization of finite derivable nets, J. Geometry, 40, 95-104 (1991)
- [7] H. Lüneburg, Translation Planes, Springer-Verlag, 1980
- [8] T. G. Ostrom, Nets with critical deficiency, Pacific J. Math. 14, 1381-1387 (1964)
- [9] O. Prohaska, Endliche ableitbare affine Ebenen, Geom. Dedicata, 1, 6-17 (1972)
- [10] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer, 1967