

# Charged Phonons III —Dispersion Relations in Metals—

岡大・電子工学教室 石井 忠 男

(12月11日受理)

## Abstract

連続媒質と見做された格子イオン系によって生ずるベクトルポテンシャル  $A$  及びスカラーポテンシャル  $\phi$  に対して電子系が線型に応答する系を考える。弱磁場の場合はイオンのラーマ振動は電子によって遮蔽され phonon と Alfvén wave が生ずるが、磁場が高くなって、例えばそのエネルギー密度が電子数密度と Fermi エネルギーとの積程度になると、イオンのラーマ振動は遮蔽されなくなり charged phonon が現われる。

charged phonon の伝播方向と磁場方向のなす角度を  $\theta$  とすると、右旋回分極  $\epsilon = 1$  に対しては  $(H_0^2/8\pi)|\cos\theta| > \frac{1}{6}n_0mv_0^2$ 、左旋回分極  $\epsilon = -1$  に対しては  $c^2q^2|\cos\theta| > \Omega_p^2$  がその臨界条件となる。一方弱磁場に対して現われていた Alfvén wave は前者の臨界値を境に、 $\epsilon = \pm 1$  に対して phonon の寄与を凌駕し、更に強い磁場領域では phonon の効果は消失していく。従ってこの領域の磁場では当該モデルに於る格子イオンの効果は消失し、代ってほぼ電子-イオンガスの性質を現わすようになる。この臨界磁場は  $\theta = 0$ 、横分極の音速  $= 4.50 \times 10^5 \text{ cm/sec}$  の Li 金属では、 $H_c \sim 1.2 \text{ MOe}$  であり、例えば  $10 \text{ MOe}$  も印加すれば Alfvén wave の (位相速度)<sup>2</sup> は  $(3.86 \times 10^6)^2 \text{ cm/sec}$  となって phonon の (音速)<sup>2</sup> の 73.6 倍となる。

## §1. Introduction

金属中の電子は、格子イオンの電荷を遮蔽するように働く。その結果、裸のイオン-イオン相互作用に由来するプラズマ振動数を有す格子振動のノーマルモードは、イオン-イオン相互作用が長距離になるほど小さい振動数のノーマルモードへと再規格化される。<sup>1)</sup> 論文 I - II<sup>2-3)</sup> では超強磁場によって、縮退している格子の固有振動数が、裸イオンのラーマ振動数  $W_L$  を含む 2 種類の振動数

$$W = \sqrt{W_L^2 + s^2 q^2} - \epsilon w_L, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (1)$$

石井忠男

に分離されることを議論したが、実際いかなる場合にそのようなモードが出現するのでしょうか？あるいは金属中では上記遮蔽効果が災いして出現しないのであろうか？

Bardeen-Pinesは金属中での電子-格子イオン系ハミルトニアンをユニタリ変換を用いて再規格化することにより phonon の存在と electron-phonon 相互作用のハミルトニアンを導出した<sup>4)</sup> この理論は電子-格子イオン相互作用のみを取扱っており、従って縦分極のみの情報を与える。磁場中での縦分極フォノンの分散関係を導いたHarrisonの方法<sup>5)</sup>も Bardeen-Pinesの方法<sup>1),4)</sup>の拡張で、やはり横分極フォノンの情報は与えてくれない。

一般に磁場をかけた場合の coupled electron-phonon modes は純粋に縦分極と横分極に分離しえない。従って横分極を含む、いわば混成型のモードに対しては上記の方法よりむしろ Rodriguezの方法<sup>6)</sup>が簡単かつ直観的でより多くの情報を与えてくれるだろう\*。q の小さい領域に対してはこの Debye の連続体模型で充分であろう。

## §2. Dispersion Relations

格子の熱振動以外には原子的不完全がなく、かつ簡単のため単純 Bravais格子をなす単純結晶を考え、一原子の価電子数は1とする。

1個のイオンに対する運動方程式は次のようにかけるだろう。 $u$ を格子変位として

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_\ell \nabla(\nabla \cdot u) - C_t \nabla \times (\nabla \times u) + eE + \frac{e}{c} \dot{u} \times H_0 \quad (2)$$

$E$ は音波の通過に伴って生ずる電場で、イオンによって生ずる電場とそれを遮蔽しようとして運動する粒子によってできる電場の和と考えられる。 $M$ はイオンの質量で、 $C_\ell$ 及び $C_t$ はイオン-電子間の長距離クーロン相互作用のない場合のイオン核間相互作用

---

\* Bardeen-Pines 方法に音場によるベクトルポテンシャル  $A$  及びスカラーポテンシャル  $\phi$  を導入すれば横分極についても議論できるであろうが、必ずしも横分極フォノンの存在を証明できるとは限らない。少くとも、電子及びイオンに直流磁場を考慮し上記  $A=0$ ,  $\phi=0$  としただけでは、Bardeen-Pines の方法は(1)式のエネルギー分散を与えることに帰着する<sup>7)</sup>。このことは以下の議論の結果と一部矛盾する。

を示す弾性定数である。従って粒子の遮蔽効果は電場  $E$  の中に全てくり込まれており、他の項は全て裸の項である。

一方全電流は次の様に表わされる。

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^{(1)} + n_0 e \dot{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{j}^{(1)} = \sigma \cdot \mathbf{E} + e \mathbf{D} \cdot \nabla n \quad (3)$$

但し  $n_0$  は粒子数密度、 $\sigma$  は交流導伝率テンソル、 $\mathbf{D}$  は拡散テンソルで  $\mathbf{D} = \sigma / e^2 g(\zeta)$  で表わされる。<sup>8)</sup> ここで  $\zeta$  は磁場の存在する場合の Fermi エネルギーで、 $\zeta / \hbar w_c \gg 1$  では、磁場の存在しない場合の Fermi エネルギー  $\zeta_0$  を用いて第 0 近似で  $\zeta \sim \zeta_0$  とおける。従って  $\zeta / \hbar w_c \gg 1$  の場合は  $g(\zeta) \sim 3n_0 / 2\zeta_0$ 。一方量子極限では  $\zeta = 16\zeta_0^3 / g(\hbar w_c)^2$  が成立つから (Appendix I 参照)  $g(\zeta) \sim n_0 / 2\zeta$  である。 $n$  は粒子数密度のゆらぎの部分であり、 $w_c$  は粒子のサイクロトロン振動数である。一方  $j$  は Maxwell の方程式から次の様に求められる。

$$\mathbf{j} = \Gamma \cdot \mathbf{E}, \quad \Gamma = \frac{i c^2 q^2}{4\pi w} \left[ 1 - \frac{w^2}{c^2 q^2} \right] \mathbf{1} - \frac{i c^2}{4\pi w} \mathbf{q} \mathbf{q} \quad (4)$$

音場は角振動数  $w$ 、波数ベクトル  $\mathbf{q}$  を有し  $u = u_0 \exp [i(wt - \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})]$  で変化するとした。 $c$  は光速である。(2)–(4)式より次の関係式を得る。

$$Mw^2 u = (C_\ell - C_t) \mathbf{q} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} + C_t q^2 u - eE - i \frac{ew}{c} u \times H_0$$

$$\mathbf{E} = -i w n_0 e \left[ 1 - \mathbf{R} \cdot \Gamma \right]^{-1} \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{e g(\zeta)} \left[ 1 - \mathbf{R} \cdot \Gamma \right]^{-1} \cdot \nabla n \quad (5)$$

$$\nabla n = n_0 \mathbf{q} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdots \cdots \text{quasi-neutrality}$$

但し  $\mathbf{R} = \sigma^{-1}$  で抵抗率テンソルである。今系の幾可学的配置を次の様に仮定しよう。外部磁場  $H_0$  は  $z$  軸方向とし、変位  $\mathbf{u}$  は (5) 式で磁場の影響を受ける  $\mathbf{u}(u_x, u_y, 0)$  に限る。従って  $\mathbf{q}$  は  $(0, q_y, q_z)$  を考えれば充分であり、その特別の場合である  $\mathbf{q} = (0, 0, q_z)$  を purely transverse mode, その他を hybrid mode と呼ぼう。

## 2.1 Purely transverse modes ( $\mathbf{q}$ parallel to $H_0$ )

この場合の分散方程式は、(4), (5) 式より

石井忠男

$$w_{\pm}^2 = S_t^2 q^2 \mp 2 w_L w + \frac{m i w}{M \tau} \frac{\sigma_0 R_{\pm}}{1 - i \beta \sigma_0 R_{\pm}}$$

$$\beta = \frac{c^2 q^2}{4 \pi w \sigma_0} \left( 1 - \frac{w^2}{c^2 q^2} \right), \quad R_{\pm} = [\sigma_{\pm}]^{-1}, \quad \sigma_{\pm} = \sigma_{xx} \mp i \sigma_{xy} \quad (6)$$

$$\sigma_0 = n_0 e^2 \tau / m, \quad w_L = e H_0 / 2 M, \quad S_t^2 = C_t / M$$

ここで  $\tau$  は便宜的に導入された粒子の緩和時間であるが、もともと(2)式では collision drag の効果が考慮されてなく、従って結果は当然  $\tau$  には依存しない。

## 2.2 Hybrid modes ( $q = (0, q_y, q_z)$ )

$$(w^2 - A_{xx}) u_x - A_{xy} u_y = 0 \quad (7)$$

$$-A_{yx} u_x + (w^2 - A_{yy}) u_y = 0$$

$$A_{xx} = S_t^2 q^2 + \frac{m i w}{M \tau A} \sigma_0 [R_{xx} - \Gamma_{yy} (R_{xy}^2 + R_{xx} R_{yy})],$$

$$A_{xy} = \frac{m i w}{M \tau} \left[ -w_c \tau + \frac{\sigma_0 R_{xy}}{A} \left( 1 + \frac{\Gamma_{yy}}{i e w} Q q_y^2 \right) \right],$$

$$A_{yx} = \frac{m i w}{M \tau} \left[ w_c \tau - \frac{\sigma_0 R_{xy}}{A} \right],$$

$$A_{yy} = [S_{\ell}^2 + \frac{n_0}{M A g(\zeta)} (1 - \Gamma_{xx} R_{xx})] q_y^2 + S_t^2 q_z^2$$

$$+ \frac{m i w}{M \tau A} \sigma_0 [R_{yy} - \Gamma_{xx} (R_{xy}^2 + R_{xx} R_{yy})],$$

$$A = (1 - \Gamma_{xx} R_{xx}) (1 - \Gamma_{yy} R_{yy}) + R_{xy}^2 \Gamma_{xx} \Gamma_{yy}$$

ここで  $w_c = e H_0 / m c$ ,  $Q = [e g(\zeta)]^{-1}$  とおいた。

## §3. Conductivity Tensor

1 粒子に対するハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left[ p + \frac{e}{c} A_0 + \frac{e}{c} A \right]^2 - e\phi \quad (8)$$

$A(r, t)$ ,  $\phi(r, t)$  は系が音場で乱されることによって生ずるベクトルポテンシャル及びスカラーポテンシャルである。従って電流

$$\begin{aligned} j^{(1)}(r, t) &= T_r [\rho j_{op}^{(1)}] \\ &= -\frac{1}{2} e \sum_{\nu} \langle \nu | (v + \frac{e}{c} A) \delta(r-x) \rho + H. c. | \nu \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

$$v = \frac{1}{m} (p + \frac{e}{c} A_0)$$

を計算すれば導伝率テンソルを求めることができる。<sup>9)</sup>

## 3.1 Purely transverse modes

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ 1 - \frac{\hbar w_c}{N} \sum'_{n k_y k_z} \left\{ \frac{n+1}{\epsilon_{k_z+q} - \epsilon_{k_z} + \hbar(w_c \mp w)} + \frac{n}{\epsilon_{k_z+q} - \epsilon_{k_z} - \hbar(w_c \mp w)} \right\} \right] \\ \epsilon_{k_z} &= \hbar^2 k_z^2 / 2m, \quad w_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / m \end{aligned} \quad (10)$$

$$N = n_0 L^3$$

$\Sigma'$  は  $E_{n k_y k_z} \leq \zeta$  で和をとることを表わす。但し  $\zeta$  は磁場  $H_0$  の下での Fermi エネルギーである。(10) 式を  $k_y, k_z$  についての積分へ移行して

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ 1 - \frac{m^2 w_c^2}{4\pi^2 n_0 \hbar^2 q} \times \right. \\ &\quad \left. \sum_{n, a} \left\{ (n+1) \ln \left| \frac{K_n + \frac{q}{2} + \frac{m(w_c \mp w)}{\hbar q}}{K_n - \frac{q}{2} - \frac{m(w_c \mp w)}{\hbar q}} \right| + n \ln \left| \frac{K_n + \frac{q}{2} - \frac{m(w_c \mp w)}{\hbar q}}{K_n - \frac{q}{2} + \frac{m(w_c \mp w)}{\hbar q}} \right| \right\} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

石井忠男

但し  $K_n$  は  $\zeta \equiv \frac{\hbar^2 K_n^2}{2m} + (n + \frac{1}{2})\hbar w_c$  で定義される。更に (11) 式を  $\hbar w_c \gg \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$ ,  $\hbar w$ ,  $\frac{\hbar^2 q K_n}{m}$  かつ  $(\zeta/\hbar w_c) \gg 1$  と近似すれば次の結果を得る。

$$\sigma_{\pm} = -\epsilon \frac{w_p^2}{4\pi i w_c} \cdot \frac{1}{1 - \epsilon \frac{w}{w_c}}, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (12)$$

(12) 式は *strong field* ( $w_c \tau \gg 1$ ,  $\zeta \gg \hbar w_c$ )<sup>10)</sup> の場合の結果であり、計算の過程で Poisson の和公式<sup>11)</sup> を用いスピン和  $\Sigma_{\sigma} = 2$  とおいた (Appendix I を参照)。 *quantum limit* ( $n=0$ ,  $a=-\frac{1}{2}$ )<sup>12)</sup> の場合は後に論ずる。(12) 式は helicon を表わす場合の導伝率で  $\epsilon_{\pm}(q, w) = 1 - i4\pi\sigma_{\pm}/w$  が helicon の分散関係である。この関係は §4 でも論じられる。

### 3.2 Hybrid modes (quantum limit $n=0$ , $\sigma=-\frac{1}{2}$ )

一般の  $n$  に対する結果は

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ 1 - \frac{2mw_c}{\hbar N} \sum'_{\alpha, \sigma} \left( \frac{\partial f_{n+\alpha, n}}{\partial q_y} \right)^2 \frac{\alpha + \frac{\epsilon_{k_z} + q_z - \epsilon_{k_z}}{\hbar w_c}}{\left\{ \alpha + \frac{\epsilon_{k_z} + q_z - \epsilon_{k_z}}{\hbar w_c} \right\}^2 - \frac{w^2}{w_c^2}} \right], \\ \sigma_{yy} &= \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ 1 - \frac{2mw_c}{\hbar N q_y^2} \sum' f_{n+\alpha, n}^2 \alpha^2 \frac{\alpha + \frac{\epsilon_{k_z} + q_z - \epsilon_{k_z}}{\hbar w_c}}{\left\{ \alpha + \frac{\epsilon_{k_z} + q_z - \epsilon_{k_z}}{\hbar w_c} \right\}^2 - \frac{w^2}{w_c^2}} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = -\frac{w_p^2}{4\pi w} \frac{mw}{\hbar N q_y} \sum' \frac{\partial f_{n+\alpha, n}^2}{\partial q_y} \frac{\alpha}{\left[ \alpha + \frac{\epsilon_{k_z} + q_z - \epsilon_{k_z}}{\hbar w_c} \right]^2 - \frac{w^2}{w_c^2}},$$

$$f_{n+\alpha, n}(q) = \sqrt{\frac{n!}{(n+\alpha)!}} \zeta^{\frac{\alpha}{2}} \exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) L_n^{\alpha}(\xi), \quad \xi = \frac{\hbar q^2}{2mw_c}$$

$\frac{\hbar q_z K_0}{m w_c}, \frac{w}{w_c}, \frac{\hbar q_z^2}{2 m w_c} \ll 1$  において  $n=0$ ,  $\alpha=0, 1, 2$  まで求めると

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &\sim \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ \frac{\hbar q_z^2}{2 m w_c} - \frac{w^2}{w_c^2} - \frac{2}{3} \left( \frac{\hbar q_z K_0}{m w_c} \right)^2 + \frac{q_y^2}{4} \frac{1}{K_0^2 - \left( \frac{m w^2}{\hbar q_z} \right)} \right], \\ \sigma_{yy} &\sim \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ \frac{\hbar q_z^2}{2 m w_c} - \frac{w^2}{w_c^2} - \frac{2}{3} \left( \frac{\hbar q_z K_0}{m w_c} \right)^2 \right] \\ \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} &\sim -\frac{w_p^2}{4\pi w_c} \left[ 1 - \frac{\hbar q^2}{m w_c} \right].\end{aligned}\tag{14}$$

但し関係式  $2K_0 m w_c / 4\pi^2 n_0 \hbar = 1$  を用いた (Appendix I を参照)。

#### §4. Charged Phonons

##### 4.1 Purely transverse modes (*strong field case*)

(6), (12) 式より次の分散式が求まる。

$$w^2 = S_t^2 q^2 - \epsilon 2 w_L w + \frac{\epsilon 2 w_L w}{1 - \epsilon \frac{c^2 q^2 w_c}{w w_p^2}}\tag{15}$$

上式は  $\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy} = i \frac{c^2 q^2}{4\pi w} \left( 1 - \frac{w^2}{c^2 q^2} \right) \sim i \frac{c^2 q^2}{4\pi w}$  及び (12) 式を  $\sigma_{\pm} = -\epsilon \frac{w_p^2}{4\pi i w_c}$  として

求められた。参考のため上記近似をしない結果を誘電関数  $\epsilon(q, w)$  の形で記しておく。

$$\epsilon(q, w) \equiv \frac{c^2 q^2}{w^2} = 1 - \frac{w_p^2}{w(w - \epsilon w_c)} - \frac{\Omega_p^2}{w(w + \epsilon \Omega_c - \frac{S^2 q^2}{w})}\tag{16}$$

$$\Omega_p^2 = 4\pi n_0 e^2 / M, \quad \Omega_c = 2 w_L$$

以下 (15) 式について議論しよう。

石井忠男

#### 4.1.1 Alfven wave and phonon vanishing

(15) 式を次の条件

$$\frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} \ll 1 \quad (17)$$

のもと近似を行うと (18) 式の結果を得る。

$$w^2 = S_t^2 q^2 + S_H^2 q^2, \quad S_H^2 = \frac{H_0^2}{4\pi n_0 M} \quad (18)$$

この式は音速の磁場依存性を測定することによって, Alers-Fleury<sup>13)</sup> によって実験的に確かめられている。用いられた物質は Cu, Ag, Au, Al, Ta, Vなどで, 測定は  $H_0 \sim 10^4$  Oe, 10MHz の周波数, 温度  $\sim 4.2$  K で行われた。この実験条件は (17) 式を充分満足する。従って (15) 式の解は (18) 式のみである。一方 (18) 式の  $S_H$  は Alfven wave の位相速度を表わしている。<sup>14)</sup> (16) 式から, 更に無視した電子の項をも考慮すれば結局  $S_H^2 = H_0^2 / 4\pi n_0 (M+m) = H_0^2 / 4\pi \rho$  が得られる。従って (18) 式は  $S_H^2 \gg S_t^2$  であれば Alfven wave そのものを示し, イオンが格子を組んでいる効果が薄れる。即ち格子フォノンが相対的に消失する。この臨界磁場は Bohm-Staver の音速<sup>15)</sup>  $S^2 = mv_0^2 / 3M$  を用いて次の様にかける。

$$\frac{H_0^2}{8\pi} \gg \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} n_0 m v_0^2 \right) \quad (19)$$

この条件は後述する charged phonon の右旋回分極が出現する臨界条件と全く符号する。

#### 4.1.2 Charged phonons

条件 (17) と逆の場合, 即ち

$$\frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} \gg 1 \quad (20)$$

の場合, (15) 式は分母の 1 を無視して (1) 式のエネルギー分散

$$w = \sqrt{w_L^2 + S^2 q^2} - \epsilon w_L, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (1')$$

\* 横分極の音速が Bohm-Staver の音速で書き現わされるという保証はないが, 物理的意味を調べる上で有意義である。

を得る。(1')は charged phonon のエネルギー分散である。<sup>2)-3)</sup> 実際に (20) 式が charged phonon が存在するための必要充分条件であるかどうかを Li 金属を例にとって具体的に調べてみよう。但し物理定数は次の表に示されている。

|         |                              |                                    |
|---------|------------------------------|------------------------------------|
| $H_0$ : | external magnetic field      | 10MOe                              |
| $S_t$ : | sound velocity at 77K        | $4.50 \times 10^5 \text{ cm/sec}$  |
| $w_p$ : | electron plasma frequency    | $1.21 \times 10^{16} / \text{sec}$ |
| $w_c$ : | electron cyclotron frequency | $1.76 \times 10^{14} / \text{sec}$ |
| $w_L$ : | ion Larmor frequency         | $6.85 \times 10^9 / \text{sec}$    |
| $v_0$ : | Fermi velocity               | $1.31 \times 10^8 \text{ cm/sec}$  |

$\epsilon = 1$ , 右旋回分極

$w_L \gg S_t q$  の領域で (1') 式は

$$w \sim \frac{S_t^2 q^2}{2w_L} = \frac{\hbar q^2}{2M^*}, \quad M^* \equiv \frac{\hbar w_L}{S_t^2} \quad (21)$$

(21) 式を (20) 式の左辺に代入して値を求めると  $w_c c^2 q^2 / w_p^2 w = 73.2$  となり条件 (20) は満足される。従って少くとも  $w_L / S_t = 1.52 \times 10^4 \text{ cm}^{-1} \gg q$  の領域では charged phonon が現われる。ここで再び Bohm-Staver の音速を用いて条件 (20) を変形すると

$$\frac{H_0^2}{8\pi} \gg \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} n_0 m v_0^2 \right) \sim \frac{1}{2} n_0 m v_0^2 \quad (22)$$

となる。この式は Alfvén wave の現われる条件 (19) と全く同一である。(22) 式は 1 粒子の Fermi エネルギーより磁場の 1 粒子当りのエネルギーが大きいことを示している。従って粒子は磁場に凍結されてイオンを遮蔽しないことが判る。(19), (22) 式より  $H_0 \gg 1.74 \text{ MOe}$  が求まる。但し音速  $S_t$  をそのまま用いれば,  $H_0 \gg 1.17 \text{ MOe}$  となる。

$\epsilon = -1$ , 左旋回分極

$\epsilon = 1$  の場合と同様に  $q \ll 1.52 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$  の領域について調べよう。(1') 式より  $w$

石井忠男

$\sim 2w_L = \Omega_c$ を得る。従って(20)式の条件とより  $q$  の範囲を求めると  $3.56 \times 10^3 \text{ cm}^{-1} \ll q \ll 1.52 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$  となる。この領域で charged phonon が現われる。条件(20)式を書き直して次の結果となる。

$$cq \gg \Omega_p \quad (23)$$

この条件は音波によって生ずる電磁波がイオンの遮断周波数より大きいことを意味し、従って電磁波が存在する領域を示している。電子は右旋回するから、今の様に左旋回の場合、charged phonon の存在は電磁場とイオンとの関係によって決定され、(22)式の如く電子の効果は直接入らない。

一方  $q \ll 3.56 \times 10^3 \text{ cm}^{-1}$  の領域では分散式(15)は(18)式と一致する。この場合  $S_H = 3.86 \times 10^6 \text{ cm/sec}$  となり Alfvén wave の寄与が大で phonon の項はほとんど寄与しない。この速度は Fermi 速度のほゞ  $1/30$  である。

$q > 1.52 \times 10^4 \text{ cm}^{-1}$  については条件(20)式は常に満足されるから、結局 charged phonon の存在領域は

$$\begin{aligned} \epsilon = 1, \quad w = -w_L + \sqrt{w_L^2 + S_t^2 q^2} \quad \text{for all } q's \\ \text{and } \frac{H_0^2}{8\pi} > \frac{1}{6} n_0 m v_0^2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\epsilon = -1, \quad w = w_L + \sqrt{w_L^2 + S_t^2 q^2} \quad \text{for } cq > \Omega_p$$

下図は(15)式を計算機に描かせた結果である。 $\epsilon = 1$  については charged phonon の他に Alfvén (phonon) - helicon 相互作用による曲線が現われている。図では  $S_t = v_s$  とおいてある。

#### 4.2 Helicon-phonon interaction<sup>16)</sup>

(15)式をそのまま変形すると

$$[w^2 - \epsilon q^2 u_0^2(w)][w^2 - S_t^2 q^2] = \frac{H_0^2}{4\pi n_0 M} q^2 w^2$$

$$u_0(w) = [cwH_0 / 4\pi n_0 e]^{1/2} : \text{helicon phase velocity}$$

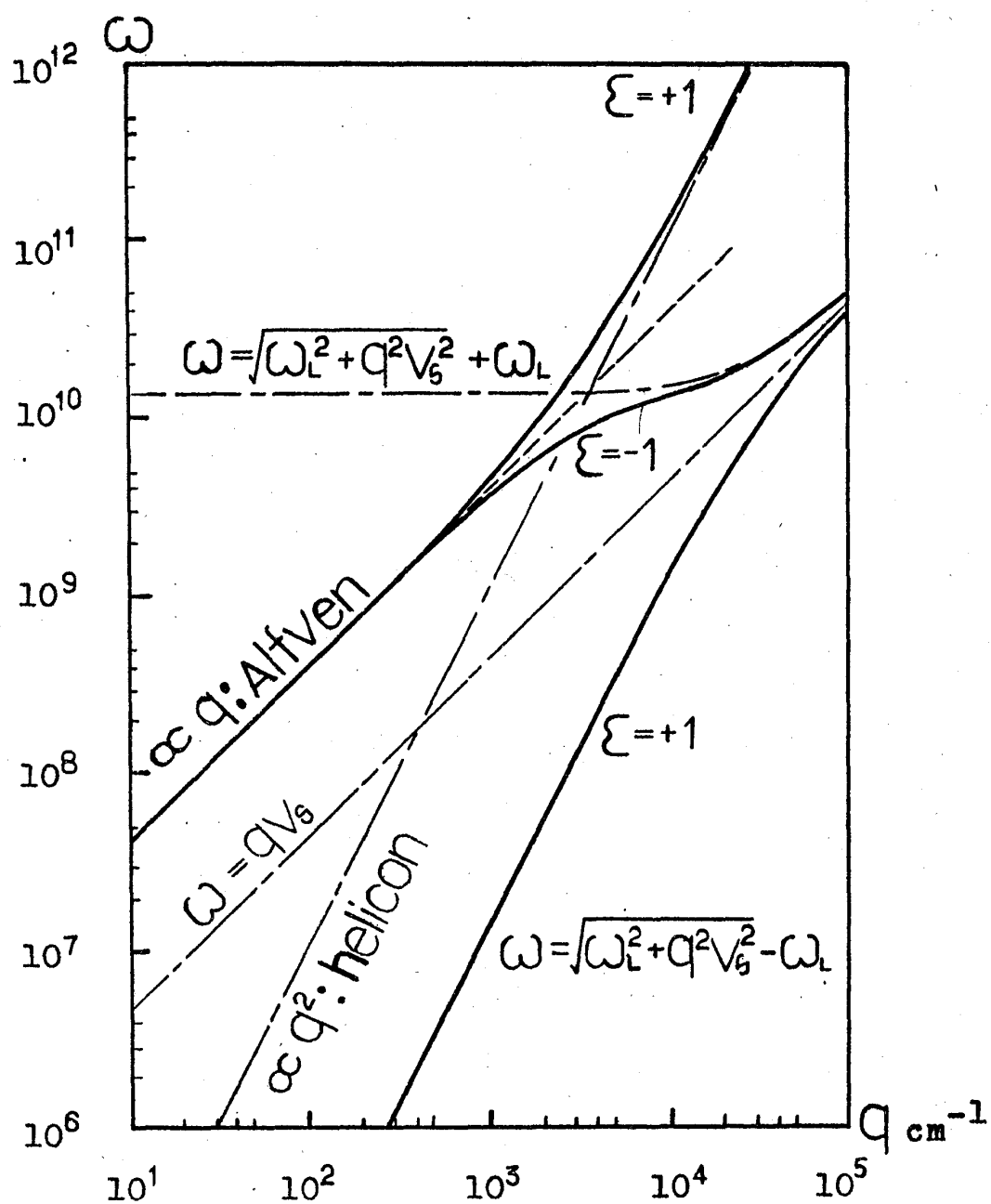


Fig. 1 Dispersion curves in Li-metal, purely transverse modes at  $H = 10$  MOe

石井忠男

この式は helicon と phonon が磁場を通じて相互作用を行っていることを意味している。しかしその意味は (25) 式の右辺が小さい場合に有効であって、今扱っているような磁場領域では上図からも解るようにその意味を失う。(25) 式は Kaner-Skobov<sup>17)</sup> のそれと一致している。

#### 4.3 Hybrid modes (quantum limit: $n=0$ , $\sigma=1/2$ ; $H=400$ MOe in Li)\*

##### 4.3.1 $\mathbf{q} = (0, q_y, 0)$ : quasi-transverse and quasi-longitudinal modes

この幾可学的配置では  $\Gamma_{xx} \equiv i\beta\sigma_0$ ,  $\Gamma_{yy} = -i\gamma\sigma_0$ ,  $\beta = c^2 q^2 / 4\pi w\sigma_0$ ,  $\gamma = w / 4\pi\sigma_0$ , かつ  $|R_{xy}| \geq |R_{yy}|$ ,  $|R_{xy}| \gg |R_{xx}|$ ,  $|\Gamma_{xx}R_{xx}|$ ,  $|\Gamma_{yy}R_{yy}|$ ,  $|\Gamma_{xx}\Gamma_{yy}R_{xy}^2| \ll 1$  であって、従って  $A \sim 1$  である。 $\sigma_0 R_{xy} = w_c \tau$  であるから (7) 式の  $A_{xy}$ ,  $A_{yx}$  の格子振動の磁場に起因する  $w_c \tau$  の項が打ち消され、結局 charged phonon は存在しない。このことは縦分極が主に寄与していて、ほぼ完全にイオンを遮蔽するからであろう。あるいは横分極の場合に流れる正味の電流  $j$  に比して縦分極の場合のそれが十分に小さいことに原因するともいえよう。

一方  $|A_{xy}| \sim |A_{yx}| \ll |A_{xx}|$ ,  $|A_{yy}|$  より次の分散関係を得る。

$$[w^2 - S_\ell^2 q^2] [w^2 - (S_\ell^2 + S_{eff}^2 + S_H^2) q^2] \sim 0, \quad (26)$$

$$S_{eff}^2 = \frac{2}{M} \zeta = \frac{mv_0^2}{3M} \left[ \frac{4\zeta_0}{\sqrt{3}\hbar w_c} \right]^2$$

(26) 式は  $A_{xy} \sim A_{yx} \rightarrow 0$  の結果であるから、横分極と縦分極の相互作用がなく、独立に存在することを示している。更に縦分極の音速は  $S_\ell$ ,  $S_{eff}$ ,  $S_H$  から成り、特に  $S_{eff}$  は磁場の小さい場合は Bohm-Staver の音速と一致する<sup>6)</sup> (Appendix II を参照)。 $\zeta \sim \hbar w_c$  の様な超強磁場では 4.1 でも議論したように当然  $S_H \gg S_{eff}$ ,  $S_\ell$  であって、従って縦分極は Alfvén wave であり、phonon は相対的に消失する。

##### 4.3.2 $\mathbf{q} = (0, 0, q_z)$ : purely transverse modes

この場合の議論は次の導伝率を用いれば 4.1 と全く同様にできる。(14) 式より

---

\* 実際 400 MOe の磁場など全く興味の対象とはならないが, *strong field case* の場合と比較するために論じられる。

$$\sigma_{\pm} = -\frac{w_p^2}{i4\pi w_c} \left[ \epsilon + \frac{\hbar K_0^2}{2mw_c} \cdot \frac{4\hbar q^2}{3mw} - \frac{\hbar q^2}{2mw} \right] \quad (28)$$

$\epsilon = 1$  に対しては上式の 2, 3 項目は, ほぼ  $O(1)$  であり,  $\epsilon = -1$  に対しては, 2, 3 項目は 1 項目に比して無視しうる。4.1 の議論に従って charged phonon の存在する臨界条件は

$$\begin{aligned} \frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} &> \frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} \left[ 1 + \frac{\hbar q^2}{2mw} \left\{ \frac{4\hbar K_0^2}{3mw_c} - 1 \right\} \right]^{-1} > 1, \quad \text{for } \epsilon = 1 \\ \frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} &> 1, \quad \text{for } \epsilon = -1 \end{aligned} \quad (29)$$

で表わされる。従って条件 (20) は条件 (29) を含んでいて, 今の場合充分満足される。

#### 4.3.3 $\mathbf{q} = (0, q_y, q_z)$ : hybrid modes

$\mathbf{q}$  の磁場に対する角度を  $\theta$  とすると  $\Gamma_{xx} = i\beta\sigma_0$ ,  $\Gamma_{yy} = i(\beta\cos^2\theta - r)\sigma_0 \sim i\beta\sigma_0\cos^2\theta$ 。この場合は縦及び横分極が分離しえずそれ程簡単ではない。そこで議論を簡単にするため,  $q_y \gg q_z$ , 但し  $\beta\cos^2\theta \gg r$ , とおいて charged phonon の存在を調べてみよう。この場合の  $\sigma$  は (14) 式より

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &\sim \frac{w_p^2}{4\pi i w_c} \left[ \frac{\hbar q_y^2}{2mw} - \frac{w}{w_c} \right] \\ \sigma_{yy} &\sim -\frac{w_p^2}{4\pi i w_c} \frac{w}{w_c} \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} \sim -\frac{w_p^2}{4\pi w_c} \end{aligned} \quad (30)$$

従って  $|\sigma_{xy}| \gtrsim |\sigma_{xx}|$ ,  $|\sigma_{xy}| \gg |\sigma_{yy}| \rightarrow |R_{xy}| \gtrsim |R_{yy}|$ ,  $|R_{xy}| \gg |R_{xx}|$ ,  $A \sim R_{xy}^2 \Gamma_{xx} \Gamma_{yy} + 1$ 。今  $|R_{xy} \Gamma_{xx} \cos\theta| \gg 1$  とおけば,

$$A_{xx} \sim S_t^2 q^2 - \frac{w}{c^2 q^2} \Omega_p^2 \sim S_t^2 q^2$$

$$\begin{aligned}
A_{yy} &\sim \left[ S_\ell^2 + \frac{2\zeta}{M} \frac{1}{R_{xy}^2 \Gamma_{xx}^2 \cos^2 \theta} \right] q_y^2 - \frac{w^2 \Omega_p^2}{c^2 q^2 \cos^2 \theta} + S_t^2 q_z^2 \\
&\sim S^{*2} q_y^2 + S_t^2 q_z^2
\end{aligned} \tag{31}$$

$$A_{xy} = -A_{yx} \sim -i 2 w_L w$$

(31) 式で  $S^* = S_t = S$  とおけば(7)式とより, charged phonon (1') が存在する。但しこの場合の臨界条件は

$$\frac{w_c c^2 q^2}{w_p^2 w} |\cos \theta| \gg 1 \tag{20'}$$

とかける。以上の結果を考慮して我々は次の分散式に到達する。臨界条件(20')に対して

$$w_\pm^2 = S^2 q^2 - \epsilon 2 w_L w + \frac{\epsilon 2 w_L w}{1 - \epsilon \frac{c^2 q^2 w_c}{w_p^2 w} |\cos \theta|} \tag{15'}$$

この結果は(7)式に於て,  $\Gamma_{xx} = \Gamma_{yy} = i\beta \sqrt{\cos^2 \theta}$ ,  $R_{xx} = R_{yy}$ ,  $\frac{\Gamma_{yy}}{i e w} Q q_y^2 \ll 1$ ,

$$\left[ S_\ell^2 + \frac{n_0}{M a g} (1 - \Gamma_{xx} R_{xx}) \right] q_y^2 + S_t^2 q_z^2 = S_t^2 q^2 = S^2 q^2 \text{ とおいたことと全く同等である。}$$

条件(20') 式を満足しない  $\theta$  の領域では, ほど(26) 式となる。

#### 4.3.4 Conclusion and its application to the strong field case

以上 *quantum limit* に於ては, ほとんどの領域について charged phonon が出現することが判った。特に興味深いのは一般の場合について, 分散式が(15') で表わされることである。 $\cos \theta \rightarrow 0$  まで適用すれば  $w^2 = S_t^2 q^2$  となって(26) 式の横波の結果となる。この結果は *strong field* の場合についても適用できるであろう。そうすれば(15) 式は(15') 式と修正され, 従って一般に臨界条件(20) 式は(20') 式を用いて

$$\frac{H_0^2}{8\pi} |\cos \theta| \gg \frac{1}{6} n_0 m v_0^2 = \frac{h^2 (3\pi^2)^{2/3}}{6m} n_0^{5/3}, \quad \text{for } \epsilon = 1$$

$$c q \sqrt{|\cos \theta|} \gg \Omega_p, \quad \text{for } \epsilon = -1$$

となる。因みに  $H_0 = 10 \text{ MOe}$  の場合で  $\cos \theta \gg 0.0137$  で charged phonon  $\epsilon = 1$  が存在する。これはほぼ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の全域で存在することを意味する。

## §5. Discussion

charged phonon は (22') 及び (23') を臨界条件として出現する。従って上記条件を満足する十分に強い磁場であれば、ほぼ  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  の全域に渡って存在するが、それ程強くなければある上限  $\theta_0$  が存在する。後者の場合は  $\theta > \theta_0$  で phonon + (Alfven) が  $\theta < \theta_0$  で、加えて charged phonon が現われる cone に分離する。(Fig. 2)

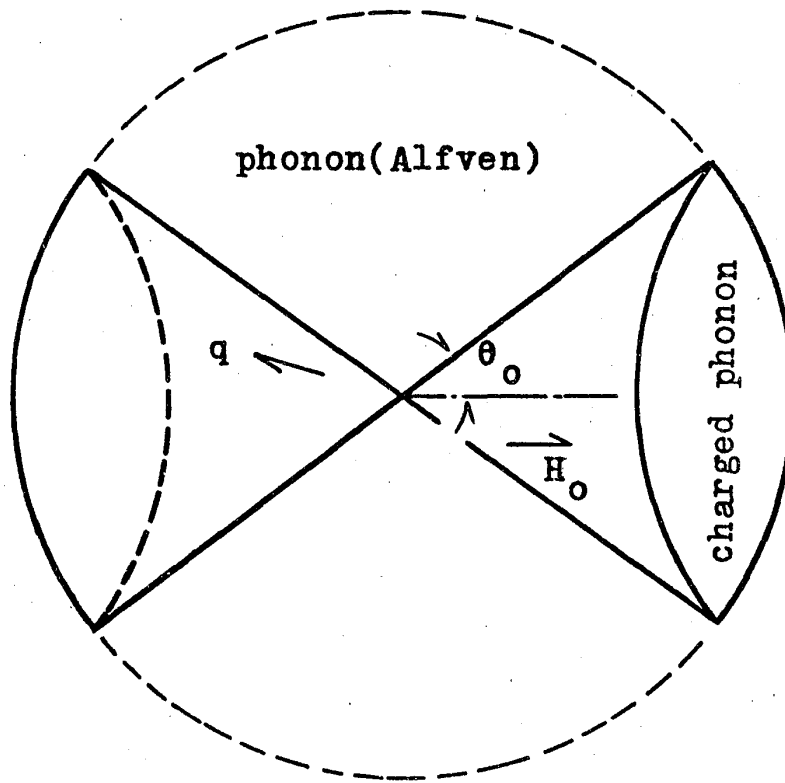


Fig. 2 Charged phonon cone and phonon (Alfven) cone

石井忠男

一方磁場が充分高く  $\theta_0 \sim \frac{\pi}{2}$  の場合は全領域で charged phonon が現われ、従って比熱及び電気伝導などにも大きく寄与するだろう。<sup>2-3)</sup> 他方この場合には phonon の寄与のほとんどないモード、即ち Alfvén wave が出現し格子イオンの寄与が消失する。

価電子数が  $Z$  の場合の臨界条件 (22') 式は  $n_0$  が粒子数密度、(23') 式は右边を  $\Omega_p = 4\pi n_{ion} (Ze)^2 / M$  と読みかえればよい。一方  $w_L$  についても  $w_L = ZeH_0 / 2Mc$  と読みかえる。従って  $\cos \theta = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  に対して、1, 2, 3 価金属に対する臨界磁場  $H_c$  はそれぞれ 1.74, 3.10, 4.35, MOe となる。

本論文をこのような形にまとめたのは東大物性研中嶋貞雄先生及び黒田義浩、栗原康成両氏の重要な問題点の指摘、そして全く有意義な議論を頂いたお蔭であり、ここに改めて深い感謝の意を表す。又計算機計算でお世話になった川辺健氏にも厚い感謝の意を表す。

#### Reference

- 1) S. Nakajima: Teion-Gensho, ed. K. Ariyama et al (Kyoritsu, Tokyo, 1958) Chap. 3.
- 2) T. Ishii: Bussei-Kenkyu 19(1972)186.
- 3) T. Ishii: Bussei-Kenkyu 19(1973)369.
- 4) J. Bardeen and D. Pines: Phys. Rev. 99(1955)1140.
- 5) M. J. Harrison: Phys. Rev. Letters 9(1962)299.
- 6) S. Rodriguez: Phys. Rev. 130(1963)1778.
- 7) T. Ishii: unpublished.
- 8) M. H. Cohen, M. J. Harrison and W. A. Harrison: Phys. Rev. 117(1960)937.
- 9) J. J. Quinn and S. Rodriguez: Phys. Rev. 128(1962)2487.
- 10) R. Kubo, S. J. Miyake and N. Hashitsume: Solid State Physics, ed. F. Seitz and D. Turnbull (Academic, New York, 1966) Vol. 17, p. 269.

- 11) R. Courant and D. Hilbert: Methods of Mathematical Physics (Wiley, New York, 1953) Vol. 1, p. 77.
- 12) L. M. Roth and P. N. Argyres: Semiconductors and Semimetals, ed. R. K. Willardson A. C. Beer (Academic, New York, 1966) Vol. 1, p. 159.
- 13) G. A. Alers and P. A. Fleury: Phys. Rev. 129(1963)2425.
- 14) L. Spitzer, Jr.: Physics of Fully Ionized Gases (Interscience, New York, 1962) Chap. 3.
- 15) D. Bohm and T. Staver: Phys. Rev. 84(1951)836. see also ref. 1).
- 16) D. N. Langenberg and J. Bok: Phys. Rev. Letters 11(1963)549.
- 17) E. A. Kaner and V. G. Skobov. Advances in Physics 17(1968)605.

## Appendix I

(10) 式に於て  $K_n \ll \frac{mw_c}{\hbar q}$ ,  $w_c \gg w$ ,  $\hbar w_c \gg \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$  として

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\pm} \sim & \frac{w_p^2}{4\pi i w} \left[ 1 - \frac{mw_c}{\pi^2 n_0 \hbar} \sum_n \left\{ K_n \left( 1 + \epsilon \frac{w}{w_c} \frac{1}{1 - \epsilon \frac{w}{w_c}} \right) \right. \right. \\
 & - \frac{\hbar q^2}{mw_c} \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) K_n - \frac{1}{3} \frac{\hbar K_n^3}{mw_c} \right) \\
 & \left. \left. - 2 \epsilon \frac{w}{w_c} \frac{\hbar q^2}{mw_c} \left( n + \frac{1}{2} \right) K_n \right\} \right] \quad (A \cdot 1)
 \end{aligned}$$

一方

$$n_0 = \int dE \rho(E) f(E), \quad \rho(E) = V^{-1} \text{Tr} [\delta(E - H_e)] \quad (A \cdot 2)$$

より次の和法則を得る。

$$\frac{mw_c}{2\pi^2 n_0 \hbar} \sum_{n\sigma} K_n = 1, \quad (A \cdot 3)$$

石井忠男

$$\frac{mw_c}{2\pi^2 n_0 \hbar} K_0 = 1, \quad \text{for } n=0, \quad \sigma = -\frac{1}{2} \rightarrow \zeta = 16\zeta_0^3/g(\hbar w_c)^2 \quad (\text{A}\cdot 3)$$

$\zeta/\hbar w_c \gg 1$  を仮定しポアッソンの和公式を用いて

$$\Sigma \left( n + \frac{1}{2} \right) [\zeta - (n + \frac{1}{2})\hbar w_c]^{1/2} \sim \frac{4}{15} \frac{\zeta^{5/2}}{(\hbar w_c)^2} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

$$\Sigma [\zeta - (n + \frac{1}{2})\hbar w_c]^{3/2} \sim \frac{2}{5} \frac{\zeta^{5/2}}{\hbar w_c}$$

以上より (A.1) 式の [ ] 中の 1 行目は  $-\epsilon \frac{w}{w_c} \frac{1}{1 - \epsilon \frac{w}{w_c}}$  2 行目は

$$\Sigma_n \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) K_n - \frac{1}{3} \frac{\hbar K_n^3}{mw_c} \right] = 0$$

4 行目の項は

$$\frac{4}{5} \epsilon \frac{w}{w_c} \frac{\hbar q^2}{mw_c} \frac{\zeta}{\hbar w_c} \sim \frac{4}{5} \epsilon \frac{w}{w_c} \frac{\hbar q^2}{mw_c} \frac{\zeta_0}{\hbar w_c}$$

で  $\frac{\hbar q^2}{mw_c} \cdot \frac{\zeta_0}{\hbar w_c} \ll 1$  であれば 1 行目に比して無視しうる。従って (A.1) 式は次の様に簡単にかける。

$$\sigma_{\pm} = -\epsilon \frac{w_p^2}{4\pi i w_c} \frac{1}{1 - \epsilon \frac{w}{w_c}} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

## Appendix II

Bardeen-Pines の方法<sup>4, 6)</sup>に従って音速を求めよう。誘電率は

$$\epsilon(q, w) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \sum_{n', n} |J_{n', n}|^2 \frac{f_{n'} k_z - q_z - f_n k_z}{E_{n'} k_z - q_z - E_n k_z - \hbar w} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

但し  $q$  は任意の方向を示す。一方

$$J_{n'n}(X, q_x, X') = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x-X) e^{iq_z x} \varphi_{n'}(x-X') dx$$

$$J_{n'n}(X, 0, X') = f_{n'n}(q_y), \quad X' = X + \ell^2 q_y, \quad X = -c\hbar q_y / eH_0$$

である。従って量子極限では

$$\varepsilon(q, w) = 1 + \frac{3w_p^2}{q^2 v_0^2} \left[ \frac{\sqrt{3} \hbar w_c}{4\zeta_0} \right]^2 \quad (\text{A} \cdot 7)$$

但し  $\zeta \sim \hbar w_c \gg \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar q_z}{\sqrt{2} m} \right) \right]^2$ ,  $\left[ \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{w}{q_z} \right]^2$  を用いた。従って

$$w^2 = \Omega_p^2 / \varepsilon(q, w) \sim \frac{m v_0^2}{3M} \left[ \frac{4\zeta_0}{\sqrt{3} \hbar w_c} \right]^2 q^2 \quad (\text{A} \cdot 8)$$

となり (26) 式と一致する。

一方 (7) 式で弱磁場領域について  $|R_{xx} \Gamma_{xx}| \ll 1$ ,  $A \sim 1$ ,  $g(\zeta) = 3n_0 / 2\zeta_0$  を用いれば

$$S_{eff}^2 = \frac{2\zeta_0}{3M} = \frac{m v_0^2}{3M} \quad (\text{A} \cdot 9)$$