

葉層構造に随伴される
コホモロジーと第2特性類

豊田高専

伊藤敏和
Ito Toshikazu

Introduction

n 次元 C^∞ -多様体 M 上に余次元 k 葉層構造 $\mathcal{F}$ が与えられたときに, 小平・スペンサー [10] の葉層構造の変形をまねて, J. Heitsch は, [5] において, 葉層構造 $\mathcal{F}$ から随伴される cohomology $H^*(T(\mathcal{F}); \mathcal{V}(\mathcal{F}))$ を構成した, そして葉層構造 $\mathcal{F}$ の変形 $\mathcal{F}_t$ ($\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$) から $H^1(T(\mathcal{F}); \mathcal{V}(\mathcal{F}))$ の元 (i.e. $\mathcal{F}_t$ の無限小変形) を構成した。さらに, J. Heitsch は, [6] において, $H^1(T(\mathcal{F}); \mathcal{V}(\mathcal{F}))$ の元をもちいて, 第2特性類の微分を考えた。

一方, 我々は [9], [7] において第2特性類の消滅に関する性質の考察のために cohomology $H^*(T(\mathcal{F}); \mathcal{V}^*(\mathcal{F}))$ (§1 をみよ) を構成し, 葉層構造 $\mathcal{F}$ が横断的向きづけ可能であるときに $H^2(T(\mathcal{F}); \mathcal{V}^*(\mathcal{F}))$ の元 $\widehat{R_1 \cdot C_1}$ を作った。この $\widehat{R_1 \cdot C_1}$ は $\mathcal{F}$ の Godbillon-Vey class $R_1 \cdot C_1^g \in H^{2g+1}(M; \mathbb{R})$

と次の関係をもっている元である。

定 理

もし, $\widehat{h_1 \cdot C_1} = 0$ in $H^2(T(F); \mathcal{Y}^*(F))$ ならば, $h_1 \cdot C_1^{\mathcal{Z}} = 0$ in $H^{2\mathcal{Z}+1}(M; R)$ が成立する。

特に, $\mathcal{Z}=1$ のときは, もし $\widehat{C_1} = 0$ in $H^1(T(F); \mathcal{Y}^*(F))$ ならば $h_1 \cdot C_1 = 0$ in $H^3(M; R)$ が成立する。

しかしながら, Godbillon-Vey class 以外の第2特性類に対応する元は $H^*(T(F); \mathcal{Y}^*(F))$ の中に構成できなかった。

ところが, 最近にな, 森田茂之先生の suggestion から $H^*(T(F); \wedge^{\mathcal{R}} \mathcal{Y}^*(F))$, $\mathcal{R}=1, 2, \dots, \mathcal{Z}$, なる cohomologies を構成することにより, 葉層構造 $\mathcal{F}$ の法束 $\mathcal{Y}(\mathcal{F})$ が自明の場合に, 第2特性類それぞれに対応する元が $H^*(T(F); \wedge^{\mathcal{R}} \mathcal{Y}^*(F))$

$\mathcal{R}=1, 2, \dots, \mathcal{Z}$, の中に構成できて, 上記の定理と同様の関係が成立する。 §2 の定理 2.3, 2.4 をみよ。

ここでは, 記号の煩雑さをさけ, かつ本質的な部分がよくわかるという2つの理由から $\mathcal{Z}=2$ の場合のみを扱うことにする。

1. Cohomologies $H^{p, \mathbb{R}}(T(\mathcal{F}); \wedge^{\mathbb{R}} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$ の構成

n 次元 C^∞ -多様体 M 上の余次元 2 葉層構造 $\mathcal{F}$ に随伴されるコホモロジーを構成する。

$T(M)$, $T(\mathcal{F})$ でも, $T(M)$ の接バンドルと $\mathcal{F}$ の接バンドルを表わす。 i.e. $T(M) \supset T(\mathcal{F})$, $[T(\mathcal{F}), T(\mathcal{F})] \subset T(\mathcal{F})$.
 そして, $T^*(M)$ でも, $T(M)$ の余接バンドルを表わすと,
 $\mathcal{Y}^*(\mathcal{F})$ は $\mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) = \{ \omega \in T^*(M) \mid \omega|_{T(\mathcal{F})} = 0 \}$ で定義され,
 $\mathcal{F}$ の dual normal bundle という。 Frobenius の定理から, 点 $x \in M$ の局所座標 U 上では $\mathcal{Y}^*(\mathcal{F})|_U$ の basis

$$\omega_U = \begin{pmatrix} \omega_U^1 \\ \omega_U^2 \end{pmatrix} \text{ が存在して, } \omega_U^1 \wedge \omega_U^2 \wedge d(\omega_U^1 \wedge \omega_U^2) = 0$$

(i.e. completely integrable) をみたす。 だから,

$$(1.1) \quad d\omega_U^i = \sum_{j=1}^2 \Theta_U^{ij} \wedge \omega_U^j \quad i=1, 2$$

ここで, Θ_U^{ij} は U 上の 1-形式である。

$\Theta_U = (\Theta_U^{ij})$ とおいて, (1.1) を行列の形で書くと

$$(1.2) \quad d\omega_U = \Theta_U \wedge \omega_U$$

そこで, 今

$$(1.3) \quad \Omega_U = d\Theta_U - \Theta_U \wedge \Theta_U$$

とおくと, (1.1) の両辺を微分することによって

$$(1.4) \quad \Omega_U = \begin{pmatrix} \eta_U^{i\bar{j}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_U^1 & \omega_U^1 \\ \omega_U^2 & \omega_U^2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $\eta_U = (\eta_U^{i\bar{j}})$ は 2×2 行列、 $\eta_U^{i\bar{j}}$ は U 上の 1-形式 である。

この Θ_U と Ω_U は $\mathcal{Y}^*(F)$ の Bott connection の connection form と curvature form になっている。

記号 E を M 上のベクトル束としたとき、 E への section の germ の作る sheaf を同じ記号 E でかき、 $\Gamma(E)$ で E への global section を表わすとする。 $T^*(F) = \cancel{T^*(M)}_{\mathcal{Y}^*(F)}$ とおき、 $\varphi \in T^*(M)$ の $T^*(F)$ への projection を同じ記号 $\varphi \in \cancel{T^*(M)}_{\mathcal{Y}^*(F)}$ でかくことにする。

ここで、我々は複体 $\{\Gamma(\wedge^k T^*(F) \otimes \wedge^k \mathcal{Y}^*(F)), D_k\}$ $k=1, 2$ を定義する。

定義 1.1 $\hat{\varphi} \in \Gamma(\wedge^1 T^*(F) \otimes \mathcal{Y}^*(F))$, $\hat{\varphi}|_U = \sum_{i=1}^2 \varphi_U^i \otimes \omega_U^i$ と局所表示されているとき、 D_1 を次のように定義する。

$$(1.5) \quad D_1(\hat{\varphi})|_U = \sum_{i=1}^2 (d\varphi_U^i + (-1)^i \sum_{j=1}^2 \varphi_U^j \wedge \theta_U^{j\bar{i}}) \otimes \omega_U^i$$

又、 $\hat{\psi} \in \Gamma(\wedge^2 T^*(F) \otimes \wedge^2 \mathcal{Y}^*(F))$, $\hat{\psi}|_U = \psi_U \otimes \omega_U^1 \wedge \omega_U^2$ に対して、 D_2 を次のように定義する。

$$(1.6) \quad D_2(\hat{\psi})|_U = (d\psi + (-1)^p \psi_U \wedge \text{Tr}(\Theta_U)) \otimes \omega_U^1 \wedge \omega_U^2$$

Lemma 1.2 (i) D_1 と D_2 は well defined である.

(ii) $D_1 \circ D_1 = 0$, $D_2 \circ D_2 = 0$ が成立する。

この Lemma の証明は省略する。しかし、以下で我々は D_1, D_2 を局所座標系をもちいて記述する。

そこで, (U, x_U) , $x_U = (x_U^1, \dots, x_U^n)$ を distinguished coordinate とする。即ち $\mathcal{Y}^*(\mathcal{F})|_U$ は $\{dx_U^{n-1}, dx_U^n\}$ で生成され,

$$(1.7) \quad \frac{\partial x_U^i}{\partial x_U^j} = 0 \quad \text{on } U \cap V \quad \text{if } 1 \leq j \leq n-2 < i \leq n$$

を満たす。このとき, $\mathcal{Y}^*(\mathcal{F})|_U$ の basis ω_U^1, ω_U^2 は

$$(1.8) \quad \omega_U^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 h_U^{\alpha\beta} \cdot dx_U^{n-2+\beta} \quad \alpha = 1, 2.$$

となる。ここで, $h_U^{\alpha\beta}$ は U 上の関数である。そして,

$H_U = (h_U^{\alpha\beta})$ とおけば $\det H_U \neq 0$ である。さらに,

(1.8) を微分することにより,

$$d\omega_U^\alpha = \sum_{\gamma=1}^2 \left(\sum_{\beta=1}^2 dh_U^{\alpha\beta} \cdot h_{U,\beta\gamma} \right) \wedge \omega_U^\gamma$$

となる。ここで, H_U の逆行列 H_U^{-1} を $H_U^{-1} = (h_{U,\beta\gamma})$ と

かく。故に,

$$(1.9) \quad \Theta_U^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta=1}^2 dh_U^{\alpha\beta} \cdot h_{U,\beta\gamma} \quad \text{mod } \mathcal{Y}^*(\mathbb{F})$$

となる。(1.9) を行列の形でかくと, $\Theta_U = dH_U \cdot H_U^{-1}$ である。

Proposition 1.3 (i) $\hat{\varphi} \in \Gamma(\wedge^p T^*(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathbb{F}))$,
 $\hat{\varphi}|_U = \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_U^\alpha \otimes dx_U^{n-2+\alpha}$ なる局所表示に対し

$$(1.10) \quad D_1(\hat{\varphi})|_U = \sum_{\alpha=1}^2 d\varphi_U^\alpha \otimes dx_U^{n-2+\alpha}$$

が成り立つ。

(ii) $\hat{\psi} \in \Gamma(\wedge^p T^*(\mathbb{F}) \otimes \wedge^2 \mathcal{Y}^*(\mathbb{F}))$, $\hat{\psi}|_U = \psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n$
 なる局所表示に対し,

$$(1.11) \quad D_2(\hat{\psi})|_U = d\psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n$$

が成り立つ。

[注 意] (1.10), (1.11) において $d\varphi_U^\alpha, d\psi_U$ は
 厳密には $d_{\mathbb{F}}\varphi_U^\alpha, d_{\mathbb{F}}\psi_U$ であって $x_U^1, \dots, x_U^{n-2}$ 変数につい
 ての微分を意味している。

証 明 (i)

$$\hat{g}|_U = \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_U^\alpha \otimes dx_U^{n-2+\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_U^\alpha \cdot h_{U,\alpha\beta} \otimes \omega_U^\beta$$

より, D_1 の定義 (1.5) から,

$$\begin{aligned} D_1(\hat{g})|_U &= \sum_{\beta=1}^2 \left(\sum_{\alpha=1}^2 d(\varphi_U^\alpha \cdot h_{U,\alpha\beta}) + (-1)^p \sum_{\alpha,\gamma=1}^2 \varphi_U^\alpha h_{U,\alpha\gamma} \wedge \theta_U^{\gamma\beta} \right) \otimes \omega_U^\beta \\ &= \sum_{\mu=1}^2 \left\{ \sum_{\beta=1}^2 \left(\sum_{\alpha=1}^2 (d\varphi_U^\alpha \cdot h_{U,\alpha\beta} + (-1)^p \varphi_U^\alpha \wedge dh_{U,\alpha\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^p \sum_{\alpha,\gamma=1}^2 \varphi_U^\alpha \cdot h_{U,\alpha\gamma} \wedge \sum_{\kappa=1}^2 dh_U^{\gamma\kappa} \cdot h_{U,\kappa\beta} \right) \cdot h_U^{\beta\mu} \right\} \otimes dx_U^{n-2+\mu} \\ &= \sum_{\mu=1}^2 d\varphi_U^\mu \otimes dx_U^{n-2+\mu} \end{aligned}$$

(ii) まず $\omega_U^1 \wedge \omega_U^2 = \det H_U \cdot dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n$ より

$$\hat{\psi}|_U = \psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n = \psi_U \cdot \frac{1}{\det H_U} \otimes \omega_U^1 \wedge \omega_U^2$$

よ, り, $D_2(\hat{\psi})|_U$

$$= \left(d\left(\psi_U \cdot \frac{1}{\det H_U}\right) + (-1)^p \psi_U \cdot \frac{1}{\det H_U} \wedge \text{Tr}(\theta_U) \right) \otimes \omega_U^1 \wedge \omega_U^2$$

$$= \left(d\psi_U + (-1)^p \psi_U \cdot d\left(\frac{1}{\det H_U}\right) \cdot \det H_U + (-1)^p \psi_U \wedge \text{Tr} \theta_U \right) \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n$$

$$= d\psi_U \otimes dx_U^{n-1} \wedge dx_U^n$$

g.e.d.

この Proposition 1.3 とパラメータ - つきの Poincaré の Lemma より, 2つの完全列ができる。

$$(1.12) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F})_1 \rightarrow \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{D_1} \overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})$$

$$\xrightarrow{D_1} \overset{2}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{D_1} \cdots \cdots \xrightarrow{D_1} \overset{n-2}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

$$(1.13) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F})_2 \rightarrow \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{D_2} \overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})$$

$$\xrightarrow{D_2} \overset{2}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{D_2} \cdots \cdots \xrightarrow{D_2} \overset{n-2}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

そこで, $\mathcal{N}(\mathcal{F})_1 = \{ \hat{\varphi} \in \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \mid D_1 \hat{\varphi} = 0 \}$, $\mathcal{N}(\mathcal{F})_2 = \{ \hat{\varphi} \in \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}) \mid D_2 \hat{\varphi} = 0 \}$ である。

よ, τ , 複体 $\{ \Gamma(\overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})), D_1 \}$ と $\{ \Gamma(\overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})), D_2 \}$ の cohomologies をそれぞれ $H^{p,1}(T(\mathcal{F}); \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$, $H^{p,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$ とかく。一方, (1.12), (1.13) は $\mathcal{N}(\mathcal{F})_1$, $\mathcal{N}(\mathcal{F})_2$ のそれぞれ fine resolution にな, τ によることから,

$$H^{p,1}(T(\mathcal{F}); \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})) = H^{p,1}(M; \mathcal{N}(\mathcal{F})_1)$$

$$H^{p,2}(T(\mathcal{F}); \overset{2}{\wedge} \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})) = H^{p,2}(M; \mathcal{N}(\mathcal{F})_2)$$

である。

2. $H^{p, \mathbb{R}}(T(\mathcal{F}); \wedge^{\mathbb{R}} \mathcal{F}^*(\mathcal{F}))$ と第2特性類の関係

この節では, n 次元 C^∞ -多様体 M 上の余次元2葉層構造で $\mathcal{F}^*(\mathcal{F})$ が自明な場合に考察する。

まず, $\mathcal{F}^*(\mathcal{F})$ の global basis を ω^1, ω^2 とする。 ω^1, ω^2 が1次独立で, 完全積分可能であることから,

$$(2.1) \quad d\omega^i = \sum_{j=1}^2 \theta^{ij} \wedge \omega^j$$

が成立する。ここで, θ^{ij} は M 上の1-形式である。

$$(2.2) \quad \theta = (\theta^{ij}) \quad \text{とおき, さらに}$$

$$(2.3) \quad \Omega = d\theta - \theta \wedge \theta \quad \text{とおけば, (1.4) 式が成立}$$

$$(2.4) \quad \Omega = \zeta \wedge \begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^1 \\ \omega^2 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

する。 $\zeta = (\zeta^{ij})$, ζ^{ij} は M 上の1-形式。

一方, $k_1(\Omega) = \text{Tr} \theta$, $C_1(\Omega) = \text{Tr}(\Omega)$, $C_2(\Omega) = \det(\Omega)$ とおけば, (2.4) 式より

$$(2.5) \quad C_1(\Omega) = d(k_1(\Omega)) = \zeta^1 \wedge \omega^1 + \zeta^2 \wedge \omega^2$$

となる。ここで, ζ^1, ζ^2 は M 上の1-形式である。さらに,

$$(2.6) \quad C_2(\Omega) = \alpha \wedge \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$= d \left[\theta^{11} \wedge d\theta^{22} - \theta^{12} \wedge d\theta^{21} + \theta^{11} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21} - \theta^{22} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21} \right]$$

となる。ここで、 α は M 上の 2-形式である。

(2.7)

$$h_2(\Omega) = \theta^{11} \wedge d\theta^{22} - \theta^{12} \wedge d\theta^{21} + \theta^{11} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21} - \theta^{22} \wedge \theta^{12} \wedge \theta^{21}$$

とおくと、(2.6) 式より

$$(2.8) \quad C_2(\Omega) = d(h_2(\Omega))$$

となる。

定義 2.1 $\widehat{C}_1, \widehat{h_1 C_1}, \widehat{C}_2, \widehat{h_2 C_1}, \widehat{h_1 C_2}, \widehat{h_1 C_1^2},$
 $\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2}, \widehat{h_2 \cdot C_2}, \widehat{h_1 h_2 C_2}$ をそれぞれ、次のように定義する。

$$\widehat{C}_1 = \zeta^1 \otimes \omega^1 + \zeta^2 \otimes \omega^2$$

$$\widehat{h_1 C_1} = h_1(\Omega) \wedge \zeta^1 \otimes \omega^1 + h_1(\Omega) \wedge \zeta^2 \otimes \omega^2$$

$$\widehat{C}_2 = \alpha \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\widehat{h_2 \cdot C_1} = h_2(\Omega) \wedge \zeta^1 \otimes \omega^1 + h_2(\Omega) \wedge \zeta^2 \otimes \omega^2$$

$$\widehat{h_1 \cdot C_2} = h_1(\Omega) \wedge \alpha \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\widehat{h_1 \cdot C_1^2} = -2 h_1(\Omega) \wedge \zeta^1 \wedge \zeta^2 \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2} = -2 h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge \zeta^1 \wedge \zeta^2 \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\widehat{h_2 \cdot C_2} = h_2(\Omega) \wedge \alpha \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$\widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_2} = h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge \alpha \otimes \omega^1 \wedge \omega^2$$

Lemma 2.2

上記の記号のもとで、

$$(i) \quad \widehat{C}_1 \in H^{1,1}(T(\mathbb{F}); \mathcal{V}^*(\mathbb{F})), \quad \widehat{h_1 C_1} \in H^{2,1}(T(\mathbb{F}); \mathcal{V}^*(\mathbb{F}))$$

$$\widehat{h_2 \cdot C_1} \in H^{4,1}(T(\mathbb{F}); \mathcal{V}^*(\mathbb{F}))$$

$$\begin{aligned}
(\text{ii}) \quad \widehat{C}_2 &\in H^{2,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})), & \widehat{h_1 \cdot C_2} &\in H^{3,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
\widehat{h_1 \cdot C_1^2} &\in H^{3,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})), & \widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2} &\in H^{6,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
\widehat{h_2 \cdot C_2} &\in H^{5,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})), & \widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_2} &\in H^{6,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F}))
\end{aligned}$$

この Lemma の証明は略する。 次の定理 2.3 は de Rham cohomology と同じでつまらないと思える対応関係である。

定理 2.3

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad \text{もし, } \widehat{h_1 \cdot C_1^2} &= 0 \text{ in } H^{3,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
&\Rightarrow h_1(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2 = 0 \text{ in } H^5(M; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.10) \quad \text{もし, } \widehat{h_1 \cdot C_2} &= 0 \text{ in } H^{3,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
&\Rightarrow h_1(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \text{ in } H^5(M; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad \text{もし, } \widehat{h_2 \cdot C_2} &= 0 \text{ in } H^{5,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
&\Rightarrow h_2(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \text{ in } H^7(M; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad \text{もし, } \widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_1^2} &= 0 \text{ in } H^{6,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
&\Rightarrow h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2 = 0 \text{ in } H^8(M; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad \text{もし, } \widehat{h_1 \cdot h_2 \cdot C_2} &= 0 \text{ in } H^{6,2}(T(\mathbb{F}); \bar{\lambda} \mathcal{V}^*(\mathbb{F})) \\
&\Rightarrow h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = 0 \text{ in } H^8(M; \mathbb{R})
\end{aligned}$$

この定理の証明は略す。 次の定理 2.4 の対応関係は

非常に興味深いものをふくんでいえると思える。

定理 2.4

$$(2.14) \quad \text{もし, } \widehat{h_1 \cdot c_1} = 0 \quad \text{in } H^{2,1}(T(\mathcal{F}); \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$$

$$\Rightarrow (i) \quad h_1(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0 \quad \text{in } H^5(M; \mathbb{R})$$

$$(ii) \quad h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0 \quad \text{in } H^8(M; \mathbb{R})$$

$$(2.15) \quad \text{もし, } \widehat{c_2} = 0 \quad \text{in } H^{2,2}(T(\mathcal{F}); \wedge^2 \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$$

$$\Rightarrow (i) \quad h_1(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^5(M; \mathbb{R})$$

$$(ii) \quad h_2(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^7(M; \mathbb{R})$$

$$(iii) \quad h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_2(\Omega) = 0 \quad \text{in } H^8(M; \mathbb{R})$$

$$(2.16) \quad \text{もし, } \widehat{h_2 c_1} = 0 \quad \text{in } H^{4,1}(T(\mathcal{F}); \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$$

$$\Rightarrow \quad h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge c_1(\Omega)^2 = 0 \quad \text{in } H^8(M; \mathbb{R})$$

証明

まず (2.14) の (i) の証明から始める。

仮定より $\widehat{h_1 c_1} = D_1 \widehat{\varphi}$, $\widehat{\varphi} \in \Gamma(\wedge^1 T^*(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{Y}^*(\mathcal{F}))$ となるから, $\widehat{\varphi} = \varphi^1 \otimes \omega^1 + \varphi^2 \otimes \omega^2$ とすれば,

$$h_1(\Omega) \wedge \eta^1 = d\varphi^1 - \varphi^1 \wedge \theta^{11} - \varphi^2 \wedge \theta^{21} \quad \text{mod } \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})$$

$$h_1(\Omega) \wedge \eta^2 = d\varphi^2 - \varphi^1 \wedge \theta^{12} - \varphi^2 \wedge \theta^{22} \quad \text{mod } \mathcal{Y}^*(\mathcal{F})$$

が成り立つ。よって,

$$= (h_1(\Omega) \wedge \eta^1 \wedge \omega^1 + h_1(\Omega) \wedge \eta^2 \wedge \omega^2) \wedge c_1(\Omega)$$

$$= [(d\varphi^1 - \varphi^1 \wedge \theta^{11} - \varphi^2 \wedge \theta^{21}) \wedge \omega^1 + (d\varphi^2 - \varphi^1 \wedge \theta^{12} - \varphi^2 \wedge \theta^{22}) \wedge \omega^2] \wedge c_1(\Omega)$$

$$= [d(\varphi^1 \wedge \omega^1) + d(\varphi^2 \wedge \omega^2)] \wedge C_1(\Omega)$$

$$= d[(\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega)].$$

よ、了、(2.14)の(i)は証明された。同様にして、

(2.14)の(ii)は証明される。

$$h_1(\Omega) \wedge h_2(\Omega) \wedge C_1(\Omega)^2$$

$$= -h_2(\Omega) \wedge d[(\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega)]$$

$$= d[h_2(\Omega) \wedge (\varphi^1 \wedge \omega^1 + \varphi^2 \wedge \omega^2) \wedge C_1(\Omega)]$$

次に、(2.15)の(i)の証明をする。仮定より、 $\hat{C}_2 = D_2 \hat{\psi}$,

$\hat{\psi} = \psi \otimes \omega^1 \wedge \omega^2 \in \Gamma(\wedge^1 T^*(F) \otimes \wedge^2 \mathcal{V}^*(F))$ であるから、

$$\alpha = d\psi - \psi \wedge \text{Tr}(\theta) \quad \text{mod } \mathcal{V}^*(F)$$

が成り立つ。 $h_1(\Omega) = \text{Tr}(\theta)$ に注意すれば、

$$h_1(\Omega) \wedge C_2(\Omega) = h_1(\Omega) \wedge \alpha \wedge \omega^1 \wedge \omega^2$$

$$= h_1(\Omega) \wedge d\psi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 = d(\psi \wedge d(\omega^1 \wedge \omega^2))$$

これで、(2.15)の(i)は証明された。

他の証明は略す。

References

- [1] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Springer Lecture Notes in Math. 297(1972), 1-94.
- [2] ———, Gel'fand-Fuks Cohomology and Foliations, Proc. of the Eleventh Annual Holiday Symposium at New Mexico State University, 1973.
- [3] I. M. Gel'fand and D. B. Fuchs, Cohomologies of the Lie algebra of tangent vector fields on a smooth manifold, Functional Analysis 3 (1969), 32-52.
- [4] C. Godbillon and J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C. R. Acad. Sci. Paris, 273(1971), 92-95.
- [5] J. Heitsch, A cohomology for foliated manifolds, Comment. Helv. 50(1975), 197-218.
- [6] ———, Derivatives of secondary characteristic classes, J. Diff. Geometry 13(1978), 311-339.
- [7] T. Ito, On the cohomology associated foriations and Godbillon-Vey classes of transverselly orientable foliations of codimension q , (to appear).
- [8] ———, On some cohomologies associated with foliations and the secondary characteristic classes, (to appear).
- [9] 伊藤敏和: 葉層構造に随伴されるコホモロジーについて, 京都大学数理解析研究所講究録 № 413 「確定系における不規則現象と力学系理論」, (1981), 153-166.
- [10] K. Kodaira and D. C. Spencer, Multifoliate Structures, Ann. Math., 74(1961), 52-100.
- [11] H. V. Pittie, Characteristic classes of foliations, Pitman, London, 1976.

- [12] Y. Shikata, On the cohomology of bigraded forms associated with foliated structures, Bull. Soc. Math. Grèce Tome 15(1974), 68-76.