

ルートを持たない偶格子に付随する頂点作用素代数の対称性について

東北大学 大学院情報科学研究科 端川 朝典

Tomonori Hashikawa

Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1 はじめに

頂点作用素代数は非負整数の次数付ベクトル空間 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$ 上に可算無限個の積を持つ代数構造である。頂点作用素代数で、特に重要な例は Frenkel-Lepowsky-Murman によって構成された Moonshine 頂点作用素代数 $V^\natural$ であり、それは $V^\natural$ の全自己同型群が、散在型単純群の中でも最大の位数であるモンスター単純群 M であることから明らかだろう。Borcherds 氏による Moonshine 予想 (Conway-Norton 予想) の解決から、 $V^\natural$ の M によって固定される部分頂点作用素代数 $(V^\natural)^M$ と、Virasoro element と呼ばれる元 ω によって生成される部分頂点作用素代数 $V_\omega^\natural$ の次数 11 までの斉次部分空間が一致することがわかる。この性質は松尾厚氏によって一般の頂点作用素代数に S^n 級として定義された。本稿では、ルートを持たない偶格子に付随する頂点作用素代数の S^n 級について、筆者の得られた結果を述べる。

2 記号の準備と基本事項

この章では種々の記号の準備と基本事項をまとめることにする。

2.1 頂点作用素代数

Definition 2.1. 任意の n に対して $\dim V_n < \infty$ である $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} V_n$ と頂点作用素

$$\begin{aligned} Y(\cdot, z) : V &\rightarrow (\text{End} V)[[z, z^{-1}]] \\ v &\mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n z^{-n-1}, \end{aligned}$$

$1 \in V_0$ (vacuum vector), $\omega \in V_2$ (Virasoro element) の 4 つ組 $(V, Y, 1, \omega)$ で“適切な”条件を満たすものを頂点作用素代数と呼ぶ。

詳しい条件は [LL] に従う. 本稿で特に関わる条件についてのみ記述することにする.

- Virasoro relation

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0} c1_V.$$

ただし $L(n) = \omega_{n+1}$ であり, $c \in \mathbb{C}$ を中心電荷という. すなわち, 公理として V 上に Virasoro 代数の作用が要求されている.

- $L(0)$ -eigenspace decomposition

斉次空間 V_n の元 v に対して

$$L(0)v = nv.$$

頂点作用素代数 V は $\dim V_0 = 1$ であるとき CFT 型という. 本稿で扱う頂点作用素代数は CFT 型とする.

Definition 2.2. V を頂点作用素代数とする. $e \in V_2$ を中心電荷 $\frac{1}{2}$ の Virasoro relation を満たす元とする. すなわち e は $L^e(n) = e_{n+1}$ としたとき

$$[L^e(m), L^e(n)] = (m - n)L^e(m + n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0} 1_V$$

が成立する元である. e の生成する V の部分頂点作用素代数が単純 (非自明なイデアルを持たない) であるとき e を **Ising vector** と呼ぶ.

次は Ising vector と V の次数 2 の空間 V_2 に関する命題である.

Proposition 2.3. ([Mi], [HLY]) V を CFT 型の頂点作用素代数とし, $V_1 = 0$ を仮定する. さらに V は Ising vector e を持つと仮定する. このとき V_2 は

$$V_2 = \mathbb{C}e \oplus B^e(0) \oplus B^e\left(\frac{1}{2}\right) \oplus B^e\left(\frac{1}{16}\right)$$

と分解される. ただし $B^e(k) = \{v \in B \mid e_1 v = kv\}$ である.

V が Ising vector e をもつとき $d^e(k) = \dim B^e(k)$ と書くことにする.

Remark 2.4. 本稿では特に触れないが VOA は CFT 型で $V_1 = 0$ であるとき V_2 上に 1 積で可換 (非結合的) 代数の構造が入る. これを V に付随する **Griess** 代数という.

Definition 2.5. $\sigma \in GL(V)$ が V の自己同型写像とは任意の $u, v \in V$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$, Virasoro element ω に対して

$$\sigma(u_n v) = \sigma(u)_n \sigma(v), \quad \sigma(\omega) = \omega$$

を満たすことをいう. また V の自己同型写像全体は群となり, これを $\text{Aut}(V)$ と書く.

2.2 V_L について

偶格子 L から構成される頂点作用素代数 V_L 及び、その自己同型写像と V_L^+ について述べる. L を偶格子とし、 L の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す. また $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_L = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ とし、 L の内積を $\mathfrak{h}$ 上の対称双線型形式へと拡張する. さらに $\hat{\mathfrak{h}}^- = \mathfrak{h} \otimes t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$ とする (ただし t は不定元).

$$1 \rightarrow \langle \kappa \mid \kappa^2 = 1 \rangle \rightarrow \hat{L} \rightarrow L \rightarrow 1 \quad (2.2.1)$$

を $\alpha, \beta \in L$ に対して $c(\alpha, \beta) = \kappa^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ である commutator map をもつ、位数 2 の巡回群 $\langle \kappa \rangle$ による L の中心拡大とする. 巡回群 $\langle \kappa \rangle$ の生成元 κ を $\mathbb{C}$ 上 -1 倍作用させることで $\mathbb{C}$ を $\langle \kappa \rangle$ 加群と見る.

$$\mathbb{C}\{L\} = \mathbb{C}[\hat{L}] \otimes_{\langle \kappa \rangle} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[L] \text{ (linearly)}$$

とする. $a \in \hat{L}$ に対して $\iota(a) = a \otimes 1 \in \mathbb{C}\{L\}$ と書くことにする. このとき $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ を $\hat{\mathfrak{h}}^-$ の対称代数とすると

$$V_L = S(\hat{\mathfrak{h}}^-) \otimes \mathbb{C}\{L\}$$

に中心電荷が L の階数の頂点作用素代数の構造が入る.

2.3 V_L の自己同型写像と V_L^+

次に自己同型写像について述べる. 群 G に対して $\text{Aut}(G)$ を G の全自己同型群とする. (2.2.1) より

$$\begin{aligned} O(L) &= \{ \sigma \in \text{Aut}(L) \mid \langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in L \}, \\ O(\hat{L}) &= \{ g \in \text{Aut}(\hat{L}) \mid \nu(g) \in O(L) \} \end{aligned}$$

とすると

$$1 \rightarrow \text{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{*} O(\hat{L}) \xrightarrow{\nu} O(L) \rightarrow 1 \quad (2.3.2)$$

も完全列となる. ただし、 ν は $f \in \text{Aut}(\hat{L}), \alpha = \bar{a} \in L$ に対して $\nu(f)(\alpha) = \overline{f(a)}$ で定まる写像であり、 $\lambda \in \text{Hom}(L, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対して $*(\lambda) = \lambda^*$ は $\lambda^*(a) = (-1)^{\lambda(\bar{a})}a$ ($a \in \hat{L}$) である. 任意の $\sigma \in O(\hat{L})$ は $\alpha_i \in \mathfrak{h}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a \in \hat{L}$ に対して

$$\sigma(\alpha_1(-n_1) \cdots \alpha_k(-n_k) \otimes \iota(a)) = \nu(\sigma)(\alpha_1)(-n_1) \cdots \nu(\sigma)(\alpha_k)(-n_k) \otimes \iota(\sigma(a))$$

と作用させると V_L の自己同型写像となる. ただし、 $h \in \mathfrak{h}, n \in \mathbb{Z}$ に対して $h(n) = h \otimes t^n$ である. この作用によって $O(\hat{L}) \leq \text{Aut}(V_L)$ とみなせる. ここで $\theta \in \nu^{-1}(-1)$ ($-1 \in O(L)$) をとる. このとき

$$V_L^+ = V_L^\theta = \{ u \in V_L \mid \theta(u) = u \}$$

とすると、 V_L^+ は中心電荷が L の階数の V_L の部分頂点作用素代数となる.

2.4 V_L^+ の自己同型群

n を正の整数とし, $\Omega_n = \{1, \dots, n\}$ とおく. また $\{\alpha_i \mid i \in \Omega_n\}$ をノルム 2 の $\mathbb{R}^n$ の直交基底とし, Ω_n の部分集合 J に対して, $\alpha_J = \sum_{i \in J} \alpha_i$ とする. C を長さ n の二元線型符号とすると, このとき C は Ω_n の冪集合 $P(\Omega_n)$ の部分集合としてみなせる. 格子

$$L_A(C) = \sum_{c \in C} \mathbb{Z} \frac{1}{2} \alpha_c + \sum_{i \in \Omega_n} \mathbb{Z} \alpha_i$$

を $\{\alpha_i \mid i \in \Omega_n\}$ に関して C から構成法 A で得られる格子といい, また

$$L_B(C) = \sum_{c \in C} \mathbb{Z} \frac{1}{2} \alpha_c + \sum_{i, j \in \Omega_n} \mathbb{Z} (\alpha_i + \alpha_j) \quad (2.4.3)$$

を $\{\alpha_i \mid i \in \Omega_n\}$ に関して C から構成法 B で得られる格子という [CS]. ここで C を長さ n の二元線型重偶符号とする. $k \in \Omega_n$ に対して $a_k \in \widehat{L_A(C)}$ を $\alpha_k = \overline{a_k}$ であるものとする. このとき σ_0 を

$$\sigma_0 = \prod_{k=1}^n \exp((1 + \sqrt{-2})(a_k)_0) \exp\left(\left(\sqrt{\frac{-1}{2}}\right)(a_k^{-1})_0\right) \exp((-1 + \sqrt{-2})(a_k)_0) \quad (2.4.4)$$

とおく. これは [FLM] で構成された $V_{L_A(C)}$ の自己同型写像であり, 同時に $V_{L_B(C)}^+$ の自己同型写像になる. σ_0 と V_L^+ の自己同型群について次の事実がある.

Theorem 2.6. ([Sh]) L をルートを持たない偶格子とする. このとき

$$O(\hat{L})/\langle \theta \rangle \subsetneq \text{Aut}(V_L^+) \iff L \text{ は構成法 B で得られる}$$

である. さらに L が構成法 B で得られる格子ならば $\text{Aut}(V_L^+) = \langle O(\hat{L})/\langle \theta \rangle, \sigma_0 \rangle$ である.

3 S^n 級

本稿で言うところの“頂点作用素代数の対称性”である, S^n 級について述べる. V_ω を Virasoro element ω によって生成される V の部分頂点作用素代数とする. また,

$$V^{\text{Aut}(V)} = \{v \in V \mid g(v) = v, \forall g \in \text{Aut}(V)\}$$

とすると $V^{\text{Aut}(V)}$ は V の部分頂点作用素代数となる.

Definition 3.1. ([Ma]) 頂点作用素代数 V が S^n 級であるとは $V^{\text{Aut}(V)}$ と V_ω の次数 n までの斉次部分空間が等しいとき, すなわち $0 \leq m \leq n$ に対して

$$(V^{\text{Aut}(V)})_m = (V_\omega)_m$$

が成立することを言う.

Remark 3.2. 頂点作用素代数 V の Virasoro element ω は自己同型写像の定義から, 常に自己同型写像によって固定されている. よって常に $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(V_\omega)_m \subset (V^{\text{Aut}(V)})_m$ が成立している. つまり次数 n までの斉次部分空間に対して逆の包含関係が成立すれば S^n 級となる.

$V_1 = 0$ の頂点作用素代数 V は中心電荷が $0, 1/2, -46/3, -3/5, -22/5, -68/7, -232/11$ でないと仮定する. このとき [Ma] より, V が S^{2k} 級 ($1 \leq k \leq 5$) ならば, V_2 上の k 次の跡公式が得られる. ここで V に更に次を仮定する.

- V は Ising vector e をもつ.
- 中心電荷 c は正の整数である.
- $d := \dim V_2$ は 2 以上である.

このとき V が S^4 級かつ $d^e(\frac{1}{16}) = 0$ であるならば [Ma] で得られた跡公式から (c, d) は

$$(4, 22), (8, 156), (10, 685) \quad (3.0.1)$$

のいずれかとなる. 更に S^6 級ならば次の命題が成立する.

Proposition 3.3. ([Ma]) 頂点作用素代数 V は $d^e(\frac{1}{16}) = 0$ となる Ising vector を持つと仮定する. このとき V が S^6 級かつ $d \geq 2$ ならば $c = 8, d = 156$ となる.

また V が S^6 級かつ $d^e(\frac{1}{16}) \neq 0$ であるとき, (c, d) は

$$(16, 2296), (20, 10310), (24, 196884), (32, 139504), (36, 35856) \quad (3.0.2)$$

のいずれかとなる.

一方で, $L = \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ に付随する頂点作用素代数 V_L^+ の中心電荷 c と次数 2 の斉次部分空間 $(V_L^+)_2$ の次元 d は

V_L^+	$V_{\sqrt{2}D_4}^+$	$V_{\sqrt{2}E_8}^+$	$V_{BW_{16}}^+$
(c, d)	$(4, 22)$	$(8, 156)$	$(16, 2296)$

となっている (ここで $\sqrt{2}D_4$ は $\sqrt{2}$ 倍の D_4 ルート格子, $\sqrt{2}E_8$ は $\sqrt{2}$ 倍の E_8 ルート格子, BW_{16} は階数 16 の Barnes-Wall 格子である). これら (c, d) は (3.0.1), (3.0.2) のリストに現れる. よって [Ma] にて, それぞれ S^4 級, S^6 級, S^6 級になるだろうと考察された. 本稿では, これらに関する研究で得られた結果を述べる.

4 V_L^+ の S^n 級について

ルートを持たない, すなわちノルム 2 のベクトルを持たない偶格子 L について考える. 次の 2 つの主張がこれまでの V_L^+ の対称性の研究で得られた筆者の主結果である.

Theorem 4.1 (主結果 1). L を $\langle L, L \rangle \subset 2\mathbb{Z}$ を満たすルートを持たない偶格子とする. V_L^+ が S^4 級であることと L が $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8$ のいずれかと同型であることは必要十分である.

Theorem 4.2 (主結果 2). L をルートを持たない偶格子とする. V_L^+ が S^6 級であることと L が $2A_1, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ のいずれかと同型であることは必要十分である.

すなわち, 本稿 3 章で述べた, [Ma] で考察されたことを肯定的に解決し, さらに対称性の高い V_L^+ の分類を行った. Theorem 4.1, 4.2 の証明をいくつかの命題に分けて述べる. $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_k$ を $u_1(-n_1) \cdots u_r(-n_r)$ ($u_i \in \mathfrak{h}, n_1 \geq \cdots \geq n_r \geq 1, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^r n_i = k$) で生成される $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)$ の部分ベクトル空間とする. このとき筆者は次の命題を示した.

Proposition 4.3. L をルートを持たない構成法 B で得られる偶格子とする. このとき $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)} = 3$ ならば V_L^+ は S^4 級である.

上の命題について述べる. まず $O(\hat{L})/\langle \theta \rangle$ の作用を見ることで $(V_L^+)_4^{\text{Aut}(V_L^+)} \subset S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ が言える. 実は $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ の次元の下限は 3 である. $S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ の次元が下限と一致するとき, σ_0 の作用を見ることで $(V_\omega)_4$ の次元との一致が示せる. また同様の議論をすることで次の命題も得られる.

Proposition 4.4. L をルートを持たない構成法 B で得られる偶格子とする. また L の階数は 1 より大きいとする. このとき $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)} = 7$ ならば V_L^+ は S^6 級である.

Remark 4.5. Proposition 4.4 で格子 L の階数が 1 より大きいと仮定しているが, これは階数が 1 のときは $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)}$ の下限が 6 となってしまうことから除外している. しかし階数 1 の場合は Proposition 4.4 の仮定を $\dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_6^{O(L)} = 6$ とすれば同様の議論で V_L^+ が S^6 級となることが示せる.

実際, $2A_1, \sqrt{2}D_4, \sqrt{2}E_8, BW_{16}$ は構成法 B で得られる格子であることが知られている. また, これら格子について Molien 級数を用いて斉次部分空間の次元を評価し, 実際に Proposition 4.3 や Proposition 4.4 仮定を満たすことを示した.

また, 筆者は V_L^+ の対称性が高いとき, L がどのような格子であるか示した.

Proposition 4.6. L をルートを持たない偶格子とする. このとき V_L^+ が S^4 級ならば L は構成法 B で得られる格子である.

Proof. 簡単にではあるが証明をつけておく. 実際は対偶を示す. L が構成法 B で得られないとすると Theorem 2.6 から $\text{Aut}(V_L^+) = O(\hat{L})/\langle \theta \rangle$ である. このとき $(V_L^+)_4^{\text{Aut}(V_L^+)} = S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)}$ となることがわかり, 後は次元を評価するだけである.

$$\begin{aligned} \dim(V_L^+)_4^{\text{Aut}(V_L^+)} &= \dim S(\hat{\mathfrak{h}}^-)_4^{O(L)} \\ &= \dim \text{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-1)u_2(-1)u_3(-1)u_4(-1) \mid u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)} \\ &\quad + \dim \text{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-3)u_2(-1) \mid u_1, u_2 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)} \\ &\quad + \dim \text{Span}_{\mathbb{C}}\{u_1(-2)u_2(-2) \mid u_1, u_2 \in \mathfrak{h}\}^{O(L)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \dim S^4(\mathfrak{h})^{O(L)} + \dim(\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h})^{O(L)} + \dim S^2(\mathfrak{h})^{O(L)} \\
&\geq 3 > 2 = \dim(V_\omega)_4.
\end{aligned}$$

ここで $S^k(\mathfrak{h})$ は $\mathfrak{h}$ の対称代数の次数 k の部分空間である. 上の不等式から V_L^+ は S^4 級ではないことがわかる. $\square$

Proposition 4.6 から V_L^+ が S^4 級とすると, L の階数が 1 であるときは $L \cong 2A_1$ となる. また L の階数が 1 より大きいときは, (2.4.3) から L にノルム 4 のベクトルが存在することがわかる. 一般に V_L^+ について, L のノルム 4 のベクトル α から Ising vector $w^+(\alpha)$ が構成できることが知られている ([DMZ]). 主結果 1 の場合, 仮定の $\langle L, L \rangle \subset 2\mathbb{Z}$ から $w^+(\alpha)$ は $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) = 0$ である Ising vector となる. このとき [Ma] で得られた跡公式から V_L^+ の中心電荷 c と次数 2 の空間の次元 d は (3.0.1) のいずれかとなる. また次のことに注意する.

Remark 4.7. L をルートを持たない偶格子とする. このとき V_L^+ の中心電荷を c , 次数 2 の空間の次元を d とすると

$$|L(4)| = 2d - c(c+1)$$

となる. ただし $L(k) = \{u \in L \mid \langle u, u \rangle = k\}$ である.

Remark 4.8. L を長さ n の二元線形符号 C から構成法 B で得られるルートを持たない偶格子とする. このとき

$$|L(4)| = 2n(n-1) + 128|C(8)|$$

となる. ただし $C(s) = \{c \in C \mid |\text{supp}(c)| = s\}$ である.

まず Remark 4.7 を (3.0.1) に適用すると

(c, d)	$ L(4) $
$(4, 22)$	24
$(8, 156)$	240
$(10, 685)$	1260

を得る. ここで $(c, d) = (10, 685)$ と仮定すると Remark 4.8 から $|C(8)| = \frac{3^{3.5}}{2^4}$ となり, $|C(8)|$ の整数性に矛盾する. また他の 2 つに関して Remark 4.8 を適用すると

(c, d)	$ L(4) $	$ C(8) $
$(4, 22)$	24	0
$(8, 156)$	240	1

を得る. 特に C の長さは中心電荷 c と等しいので C と, C から構成法 B で得られる格子 $L_B(C)$ は次となる.

(c, d)	$ L(4) $	$ C(8) $	C	$L_B(C)$
$(4, 22)$	24	0	$\{(0^4)\}$	$\sqrt{2}D_4$
$(8, 156)$	240	1	$\{(0^8), (1^8)\}$	$\sqrt{2}E_8$

よって主結果 1 を得る. また主結果 2 は, 主結果 1 と同様の議論で Ising vector $w^+(\alpha)$ が $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) = 0$ ならば $L \cong \sqrt{2}E_8$, $d^{w^+(\alpha)}(\frac{1}{16}) \neq 0$ ならば $L \cong BW_{16}$ が示せる.

現在, 他に階数 32 の Barnes-Wall 格子 BW_{32} から $\mathbb{Z}_2$ 軌道体構成法で得られる頂点作用素代数 $\tilde{V}_{BW_{32}}$ が S^6 級になるだろうと考察されている. 今後は $\mathbb{Z}_2$ 軌道体構成法から得られる頂点作用素代数の S^n 級についても考える必要がある.

参考文献

- [CS] Conway, J. H., Sloane, N.J.A. *Sphere packings, lattices and groups*. 3rd Edition, Springer, New York, 1999.
- [DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu. Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, *Proc. Symp. Pure. Math., American Math. Soc.* 56 II, (1994), 295-316.
- [FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman. *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol 134, Academic Press, Boston, 1988.
- [HLY] G. Höhn, C. H. Lam and H. Yamauchi. McKay's E_7 observation on the baby monster, *Int. Math. Res. Not.*, (2012), 166-212.
- [Hö] G. Höhn. Conformal designs based on vertex operator algebras, *Adv. Math.*, 217, (2008), 2301-2355.
- [LL] J. Lepowsky, H. Li. *Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 2004.
- [Ma] A. Matsuo. Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Comm. Math. Phys.* 224 (2001) 565-591.
- [Mi] M. Miyamoto. Vertex operator algebras generated by two conformal vectors whose τ -involutions generate S_3 , *J. Algebra* 268 (2003) 653-671.
- [Sh] H. Shimakura. The automorphism group of the vertex operator algebra V_L^+ for an even lattice L without roots, *J. Algebra* 228 (2004) 29-57.