

対称空間上の L_p 解析 I

鳥取大 教養部

熊原啓作

G を連結半単純 Lie 群で中心有限とし, K もその一つの極大 compact 部分群とする。 $G = K A_0 N_0$ を一つの岩沢分解, $\mathfrak{a}_0$ も A の Lie 環, $\mathfrak{a}_0^*$ も $\mathfrak{a}_0$ の双対とする。 G 上の K 両側不変, 可積分関数 f に対し, その spherical Fourier 変換 (spherical Gelfand 変換ともいう) $\tilde{f}$ は $\mathfrak{a}_0^*$ 上の関数であるが, それは $\mathfrak{a}_0^*$ の複素化 $\mathfrak{a}_{0,c}^*$ のある Tube domain にまで拡張され, そこで Riemann-Lebesgue の定理が成立する ([2, p336] および本録, 江口氏の論説参照)。 この結果が対称 Riemann 空間上の Fourier 変換, さらに G の各 cuspidal parabolic 部分群 P に対応する主 P 系列に対しても成立することも示す。

§1. 記号と準備

G, K, A_0, N_0 を上の通りとする。 M_0 も $\mathfrak{a}_0$ の K における中心化群, $P_0 = M_0 A_0 N_0$ を極小 parabolic 部分群とする。

$P = MAN$ を $P \supset P_0$ なる parabolic 部分群 (ただし $P \neq G$) とする。すると $A \subset A_0$ である。 A, N の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}$ とし $\rho_P(H) = \frac{1}{2} \text{tr}(\text{ad} H)|_{\mathfrak{n}}$ ($H \in \mathfrak{a}$) とおく。 $P = P_0$ のときは ρ_0 と表す。 dk を K 上の正規化された Haar 測度, dX を $X = k a_0 n_0$ ($k \in K, a_0 \in A, n_0 \in N$) のとき $dX = e^{2\rho_0(\log a_0)} dk da_0 dn_0$ となるように正規化された標準 Haar 測度とする。 $P_M = P_0 \cap M, K_M = K \cap M, A_M = A_0 \cap M, N_M = N_0 \cap M$ とおく。 P_M は M の minimal parabolic 部分群で, $M = K_M A_M N_M$ は M の岩沢分解と与える。 $\sigma_M, \pi_M \in A_M, N_M$ の Lie 環とし, $*H \in \sigma_M$ に対して $\rho_M(*H) = \frac{1}{2} \text{tr}(*H)|_{\pi_M}$ とおく。 $m = *k *a *n \in K_M A_M N_M$ に対して M の標準 Haar 測度は $dm = e^{2\rho_M(\log *a)} d*k d*a d*n$ である。

(σ, V_σ) を M の既約ユニタリ表現とし, $\lambda \in \sigma_c^*$ に対して P の V_σ 上への表現 σ_λ を $\sigma_\lambda(man) = \sigma(m) e^{-i\lambda(\log a)}$ によって定義する。 $\delta_P(man) = e^{2\rho_P(\log a)}$ とおき,

$\delta_P^{1/2} \sigma_\lambda$ なる P の表現を G に誘導したものを $\pi_{\sigma, \lambda}^{(P)}$ とする。その表現空間 $\mathcal{H}_\sigma$ は K 上の V_σ 値可測関数で, $\phi(km) = \sigma(m)^{-1} \phi(k)$, $k \in K, m \in K_M$, かつ $\|\phi\|^2 = \int_K |\phi(k)|^2 dk < \infty$ なる ϕ からなる。 $X = K(x)m(x)\exp(H_P(x))n(x) \in KMAN$ のとき

$$(\pi_{\sigma, \lambda}^{(P)}(x)\phi)(k) = \sigma(m(x^{-1}k))^{-1} e^{(i\lambda - \rho_P)(H_P(x^{-1}k))} \phi(K(x^{-1}k))$$

($k \in K, \phi \in \mathcal{L}_\sigma$) である。

§2. Riemann-Lebesgue の定理.

$f \in L^1(G)$ の Fourier 変換を

$$\tilde{f}_p(\sigma, \lambda) = \int_G f(x) \pi_{\sigma, \lambda}^{(p)}(x) dx \quad (\sigma \in \hat{M}, \lambda \in \sigma^*)$$

によって定義する。 $f \in C_c(G)$ ならば $\tilde{f}_p(\sigma, \lambda)$ は $\hat{M} \times \sigma_c^*$ で意味をもつ。このとき

$$\tilde{f}_p(\sigma, \lambda; k_1, k_2) = \int_{M \times A \times N} f(k, m a n k_2^{-1}) e^{(\rho_p - i\lambda)(\log a)} \sigma(m) dm da dn$$

とあれば,

$$(\tilde{f}_p(\sigma, \lambda) \phi)(k_1) = \int_K \tilde{f}_p(\sigma, \lambda; k_1, k_2) \phi(k_2) dk_2$$

である。 $P = P_0$ とし, f が右 K 不変ならば $\sigma \neq \text{id.}$ ($= M$ の恒等表現) のとき $\tilde{f}_p(\sigma, \lambda; k_1, k_2) = 0$ ($\forall \lambda, \forall k_1, k_2$) である。

$$\tilde{f}_p(\text{id.}, \lambda; k_1, k_2) = \int_{A \times N} f(k, a_0 n_0) e^{(-i\lambda + \rho_0)(\log a_0)} da_0 dn_0$$

となり, これは G/K 上の Fourier-Laplace 変換である。

Lemma 1. M の各元は A の元と可換であり, $A_0 = A_m A$

$N_0 = N_M N$ は直積である. もし $H_0 = {}^*H + H$ (${}^*H \in \sigma_M$, $H \in \sigma$) ならば $\rho_0(H_0) = \rho_M({}^*H) + \rho_P(H)$ である.

今, $\lambda \in \sigma_c^*$ と $\mu \in \sigma_{M,c}^*$ との直和 $\lambda \oplus \mu \in H_0 = {}^*H + H$ ($H_0 \in \sigma_0$, ${}^*H \in \sigma_M$, $H \in \sigma$) に對して $(\lambda \oplus \mu)(H_0) = \mu({}^*H) + \lambda(H)$ と定義する. 上の Lemma より $\rho_0 = \rho_P \oplus \rho_M$ である. $M'_0 \in A_0$ の K における正規化群, $W = M'_0 / M_0 \in G/K$ の Weyl 群, $[W] \in W$ の位数とする. $\Delta^+ \in (\sigma, \sigma_0)$ の正の root 全体とし, $\sigma_0^+ = \{H \in \sigma_0 \mid \alpha(H) > 0 \ (\forall \alpha \in \Delta^+)\}$ と正の Weyl 領域とする. $C_{\rho_0} \in \{\rho_0 \mid \rho \in W\}$ の σ_c^* における凸閉区間とする.

$$\mathcal{F}' = \{ \lambda \in \sigma_c^* \mid \text{Im}(\lambda \oplus \rho_M) \in C_{\rho_0} \}$$

とおく.

Lemma 2. $\mathcal{F}' = \{ \lambda \in \sigma_c^* \mid \text{Im}(s(\lambda \oplus \rho_M)X) \neq \rho_0(H) \}$
 $\forall H \in \sigma_0^*, \ s \in W \}$.

Lemma 3. f を G 上の両側 K 不変, 非不値可積分関数とすれば, $\lambda \in C_{\rho_0}$ のとき

$$\int_{A_0 \times N_0} f(a_0 n_0) e^{(\lambda + \rho_0)(\log a_0)} da_0 dn_0 \leq [W] \|f\|_1$$

である。

$f \in L^1(G)$ とする。 $f_1(x) = \int_{K \times K} |f(kxk')| dk dk'$ とおけば f_1 は Lemma 3 の条件を満たす。今 $\lambda \in \mathcal{F}'$, $\lambda = \xi + i\eta$, とすれば,

$$\begin{aligned} & \int_{K \times M \times A \times N \times K} |f(k_1 m a n k_2^{-1})| e^{(\eta + \rho_P)(\log a)} dk_1 dm da dn dk_2 \\ &= \int_{K_M \times A_M \times N_M \times A \times N} f_1(*k^* a^* n a n) e^{z \rho_M(\log^* a) + (\eta + \rho_P)(\log a)} d^* k d^* a d^* n da dn \\ &= \int_{A_0 \times N_0} f_1(a_0 n_0) e^{((\eta \oplus \rho_M) + \rho_0)(\log a_0)} da_0 dn_0 \\ &\leq [W] \|f\|_1 \end{aligned}$$

を得る。従って $M \times A$ 上の関数

$$\psi(m, a) = \int_N f(k_1 m a n k_2^{-1}) dn e^{(\eta + \rho_P)(\log a)}$$

は Fubini の定理によつて殆んど必ず $(k_1, k_2) \in K \times K$ に対し ψ が可積分である。そこで Dixmier [1] による次の Lemma を使う。

Lemma 4. G は局所 compact 群, $\hat{G}$ は既約ユニタリ表現の

同値類の集合に hull-kernel topology を入れたものとする.

$f \in L^1(G)$, $[\pi] \in \hat{G}$ に対して

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(x) \pi(x) dx$$

とおく. すると $\forall \varepsilon > 0 \exists \omega : \hat{G}$ の compact set, $\pi \notin \omega$

$$\Rightarrow \|\hat{f}(\pi)\| < \varepsilon.$$

$$\hat{f}_p(\sigma, \lambda; k_1, k_2) = \int_{M \times A} \psi(m, a) e^{-i\lambda(\log a)} \sigma(m) dm da$$

であるから, Lemma 4 より次の定理を得る.

定理 (Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(G)$ とする. $(\sigma, \lambda) \in \hat{M} \times \mathcal{F}'$ であって $\operatorname{Im} \lambda = -\varepsilon$ ならば, 殆んどすべての $(k_1, k_2) \in K \times K$ に対して, $(\sigma, \lambda) \rightarrow \infty$ のとき $\hat{f}_p(\sigma, \lambda; k_1, k_2) \rightarrow 0$ となる.

文 献

- [1] Dixmier : Les C^* -algèbres et leur représentations. Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [2] G. Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple

Lie Groups II. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York (1972).

本稿の内容に次の論文に発表されている。

M. Eguichi and K. Kumahara : Riemann-Lebesgue lemma for real reductive groups, Proc. Japan Acad. 56 (1980), 465 - 468.