

A stability theorem for multiplicity-free varieties and its applications

東京大学大学院数理科学研究科 北川 宜稔 (Masatoshi KITAGAWA)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

既約表現の制限や誘導表現の既約分解が一様に有界な重複度を持つとき、十分大きなパラメーターにおいて、重複度は「よい振る舞い」をすると考えられる。佐藤文広氏は [15] において、半単純な spherical pair からの誘導表現が安定性という性質を持つことを示した。本稿では、この定理を準アフィン球多様体上の加群の設定に一般化した定理を紹介する。応用として、正則離散系列表現の分岐則が同様の安定性を持つことを示す。

1 定義

G を連結な複素簡約代数群とし、 B をそのボレル部分群とする。 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ など、リー群に対応するリー環は常に、対応するドイツ文字で表す。 G の $\mathbb{C}$ 上の表現 V に対して、次のように記号を定める。(本稿では、代数群の表現といえば、常に局所有限かつ局所有理的な表現を指すこととする。)

$\Lambda^+ : B$ に関する dominant integral weight 全体 ($\subset \mathfrak{b}^*$)

$V_\lambda : \lambda \in \Lambda^+$ を最高ウェイトとする G の既約表現

$m_V^G(\lambda) : V$ の既約分解に現れる V_λ の重複度 ($= \dim \text{Hom}_G(V_\lambda, V)$)

$C_G(V) : V$ の既約分解に現れる G の既約表現の重複度の最大値 ($= \sup_\lambda \{m_V^G(\lambda)\}$)

$\Lambda^+(V) : m_V^G(\lambda) \neq 0$ となる dominant integral weight 全体

G -複素代数多様体 X に対して、 $\mathbb{C}[X]$ で正則関数環を表す。

定義 1.1. M を G の表現かつ $\mathbb{C}[X]$ -加群とする。任意の $g \in G, f \in \mathbb{C}[X], m \in M$ に対して

$$g(fm) = (gf)(gm)$$

が成り立つとき、 M を $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群と呼ぶ。

$\mathbb{C}[X]$ -加群として有限生成 (resp. torsion-free) のとき、 $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群として有限生成 (resp. torsion-free) と呼ぶ。

2 球多様体に対する安定性定理

G を連結な複素簡約代数群とし、 B をそのボレル部分群とする。 X を G -球多様体^{*1}、つまり B が開かつ稠密な軌道を持つような G -代数多様体とする。さらに、 X に次のような仮定をおく。

X の有理関数体は、 X の正則関数環の商体と一致する。 (2.0.1)

この仮定は、 X が準アフィン多様体の場合には常に成り立つ。 $x_0 \in X$ を Bx_0 が X の開集合となるような点とし、 $L := \{g \in G_{x_0} : gBx_0 = Bx_0\}$ とおく。ここで、 x_0 の固定部分群を G_{x_0} と書いた。[1] の結果より、 L は G の簡約な部分代数群になる。

命題 2.1. 上で定義した L は、次の性質を満たす。

- (i) $B_{x_0} \subset L$
- (ii) B_{x_0} の単位元成分は L の単位元成分のボレル部分群である。
- (iii) L の各連結成分は B_{x_0} と共通部分を持つ。

逆に、この三つの性質を満たす G の簡約な部分群は L と一致する。

命題 2.1 より、 L の既約表現は B_{x_0} の指標の部分集合でパラメーター付けされることがわかる。そこで、 L は一般に連結ではないが、 $m_V^L(\lambda)$ などの記号を連結な場合と同様に用いる。

定理 2.2. G, X, L を上で定義したものとする。 M を torsion-free 有限生成 $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群とする。このとき、ある $\lambda_0 \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ が存在して、任意の $\lambda \in \Lambda^+(M)$ に対して、

$$m_M^G(\lambda + \lambda_0) = m_{M/\mathfrak{m}(x_0)M}^L(\lambda|_{B_{x_0}})$$

が成り立つ。ここで、 x_0 に対応する $\mathbb{C}[X]$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}(x_0)$ とした。

注意 2.3. 任意の $\lambda_0 \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ に対して、 $\lambda_0|_{B_{x_0}} = 0$ が成り立つので、右辺は $m_{M/\mathfrak{m}(x_0)M}^L((\lambda + \lambda_0)|_{B_{x_0}})$ と等しい。

典型的な例として、 M が X 上のベクトルバンドルの大域切断全体の場合があげられる。この場合には、 $M/\mathfrak{m}(x_0)M$ は x_0 におけるファイバーと同一視できる。定理 2.2 は、十分

*1 一般的な定義では、球多様体に正規性を仮定するが、本稿の議論では正規性は必要ない。

大きなパラメーターでは M の既約分解がファイバー $M/\mathfrak{m}(x_0)M$ で統制されているということを示している。

系 2.4. G, X, L は定理 2.2 と同様とする。 M を *torsion-free* $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群とする。このとき、重複度の最大値に関する次の等式が成り立つ。

$$C_G(M) = C_L(M/\mathfrak{m}(x_0)M)$$

特に、 M が G の表現として無重複であることと、 $M/\mathfrak{m}(x_0)M$ が L の表現として無重複であることは同値になる。

この系は、小林俊行氏による可視的作用の無重複性の伝播定理 ([6, 10]) の球多様体版と見ることできる。多くの球多様体は可視的作用でも扱えることが知られている (例えば、[7]、[17]、[14])。定理 2.2 は、可視的作用よりも適応範囲が狭い代わりに、より詳しい情報が比較的簡単に取り出せていると考えられる。

3 例

この節では、定理 2.2 の仮定を満たすような G, X, M の例を紹介する。

3.1 準アフィン球等質空間

G を連結複素簡約代数群、 H を G の部分群であり、 (G, H) が spherical pair になるものとする。さらに、 G/H は準アフィン多様体になると仮定する。この仮定は、仮定 (2.0.1) と同値であることが知られている (例えば、[18, Theorem 3.12])。

H の有限次元表現 V に対して、誘導表現を

$$\mathrm{Ind}_H^G(V) := (\mathbb{C}[G] \otimes V)^H$$

とすると、自然な作用で $(\mathbb{C}[G/H], G)$ -加群になる。さらに、この加群は有限生成かつ *torsion-free* になるので定理 2.2 を適応することができる。

特に、 H が半単純な場合が佐藤氏の結果になっている。

3.2 旗多様体

射影多様体の場合には、仮定 (2.0.1) が満たされないので、直接定理 2.2 を適応することはできない。しかし、アフィンコーンに帰着させることで、弱い結果を得ることができる。

G を連結複素簡約代数群、 H を G の連結簡約部分群、 P を G の放物型部分群とする。さらに、 G/P は H -球多様体になると仮定する。このような組 (G, H, P) は H がレビ部分群の場合には分類がされている ([17])。

$X := G/[P, P]$ とおくと、 X は $H \times P/[P, P]$ -準アフィン球多様体になる。この X に定理 2.2 を適応することで次の結果を得る。

系 3.1. W を P の既約表現とする。このとき、 P のある指標 λ_0 が存在して、 $\text{Ind}_P^G(\mathbb{C}_\lambda) \neq 0$ となる任意の P の指標 λ に対して、

$$C_H(\text{Ind}_P^G(W \otimes \mathbb{C}_{\lambda+\lambda_0})) = C_L(W)$$

が成り立つ。ここで、 L は H のボレル部分群に対して定理 2.2 と同様に定める。

4 定理 2.2 の証明

この節では、定理 2.2 の証明の概略を説明する。 G, X, L などを定理 2.2 の上で定義した通りとする。

命題 4.1. M を *torsion-free* 有限生成 $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群とする。このとき、ある $\lambda_0 \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ が存在して、任意の $\lambda \in \Lambda^+(M), \nu \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ に対して、

$$m_M^G(\lambda + \lambda_0) = m_M^G(\lambda + \lambda_0 + \nu) \quad (4.1.1)$$

が成り立つ。

Proof. まず、 M は G の表現として一様に有界な重複度を持つことを示す。 M は有限生成 $\mathbb{C}[X]$ -加群なので、 G の有限次元部分表現 $V (\subset M)$ であって、掛け算で定義される写像 $\mathbb{C}[X] \otimes V \rightarrow M$ が全射になるようなものが存在する。 X は球多様体なので、 $\mathbb{C}[X]$ は G の無重複表現である。よって、 $\mathbb{C}[X] \otimes V$ における重複度は一様に $\dim V$ で抑えることができる。 M には $\mathbb{C}[X] \otimes V$ からの全射が存在するので、 M における重複度も一様に $\dim V$ で抑えることができる。

M は *torsion-free* なので、非零な $f \in \mathbb{C}[X]$ を掛ける写像は単射になる。特に、 f として B -固有関数をとると、任意の $\lambda \in \Lambda^+(M), \nu \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ に対して、 $m_M^G(\lambda) \leq m_M^G(\lambda + \nu)$ となることがわかる。 m_M^G は有界なので、どこかで最大値をとる。したがって、 $\lambda \in \Lambda^+(M)$ を固定すれば、求める式 (4.1.1) を満たすような λ_0 が取れる。 B の冪単根基を N とすると、 N による不変部分 M^N は有限生成 $\mathbb{C}[X]^N$ -加群になることが知られている。このことから、条件を満たす λ_0 が取れることがわかる。□

命題 4.2. $\mathbb{C}[Bx_0] = \mathbb{C}[X][1/f : f \text{ は } \mathbb{C}[X] \text{ の非零 } B\text{-固有関数}]$ が成り立つ。

この命題は佐藤氏による証明でも用いられているので、証明は省略する。

定理 2.2 の証明. 簡単のために、ある G の有限次元表現 V があって、 $(\mathbb{C}[X], G)$ -加群とし

て M は $\mathbb{C}[X] \otimes V$ と同型であると仮定する。一般の場合も、この場合に帰着することができる。

命題 4.1 を満たすような λ_0 をとる。 $\lambda \in \Lambda^+(M)$ を固定する。 x_0 での値をとる写像を $\text{ev}_{x_0} : \mathbb{C}[X] \otimes V \rightarrow V$ とする。定理を示すためには、 ev_{x_0} を制限した写像

$$\text{ev}_{x_0} : (\mathbb{C}[X] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0) \rightarrow V^{(B_{x_0})}(\lambda|_{B_{x_0}})$$

が全単射であることを示せばよい。ここで、ウェイト λ の B -固有関数全体を $(\cdot)^{(B)}(\lambda)$ と表した。

単射性は、 Bx_0 が X の開かつ稠密な部分集合なので、 B -固有関数が x_0 で 0 なら全体で 0 になることからわかる。

全射性を示す。 $v \in V^{(B_{x_0})}(\lambda|_{B_{x_0}})$ とする。 Bx_0 上の関数 φ を

$$\varphi(bx_0) = b^{-\lambda-\lambda_0}(bv)$$

で定める。ここで b^λ で指標 λ の b での値を表した。 v は B_{x_0} -固有ベクトルなので、 φ は Bx_0 上 well-defined な関数となる。さらに、 φ はウェイト $\lambda + \lambda_0$ の B -固有関数なので、 $\varphi \in (\mathbb{C}[Bx_0] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0)$ となる。

あとは、 φ が X 全体に伸びることを示せばよい。命題 4.2 より、ある $\nu \in \Lambda^+(\mathbb{C}[X])$ と $f \in \mathbb{C}[X]^{(B)}(\nu)$ が存在して、 $f\varphi \in (\mathbb{C}[X] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0 + \nu)$ となる。 λ_0 のとり方から、 f を掛ける写像

$$f \cdot : (\mathbb{C}[X] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0) \rightarrow (\mathbb{C}[X] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0 + \nu)$$

は全単射になる。したがって、 $\varphi \in (\mathbb{C}[X] \otimes V)^{(B)}(\lambda + \lambda_0)$ となる。これで、定理 2.2 は証明された。 $\square$

5 正則離散系列の分岐則

ここからは実リー群を扱う。

G はエルミート型連結単純リー群かつ、有限な中心を持つとする。 K を G の極大コンパクト部分群で、対応するカルタン対合を θ とする。 G はエルミート型であるので、 $\mathfrak{k}$ は一次元の中心を持つ。 Z を $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}(:= \mathfrak{k} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ の中心の元であって、 $\text{ad}(Z)$ の固有値が $\pm 1, 0$ となるものを取り固定する。 $\text{ad}(Z)$ の固有値 $+1, 0, -1$ に応じて、 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_-$ と分解する。

σ を G の対合とし、 $\sigma(Z) = Z$ を満たすものとする。ここで、 σ の微分も同じ記号で表した。 H を G^σ の単位元成分とする。このとき、 H もいくつかのエルミート型リー群とコンパクトリー群の積になる。

既約 $(\mathfrak{g}, K)$ -加群 V の $\mathfrak{p}_+$ 不変部分 $V^{\mathfrak{p}_+}$ が非零であるとき、 V を最高ウェイト加群と呼ぶ。本稿では特に、ユニタリーかつ (完備化が) 離散系列表現になる最高ウェイト加群を扱

う。このようなものは正則離散系列表現と呼ばれる。正則離散系列表現は一般化 Verma 加群 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+)} V^{\mathfrak{p}_+}$ と $(\mathfrak{g}, K)$ -加群として同型であることが知られている。 K の既約表現 W に対して、 $N^{\mathfrak{g}}(W) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}_+)} W$ とおく。

V を G の正則離散系列表現とする。これを H に制限した表現 $V|_H$ の分岐則を考えたい。(正確には $(\mathfrak{h}, H \cap K)$ -加群だが、便宜的に $V|_H$ という記号を使った。) $V|_H$ の分岐則に関して次のことが知られている ([5, 9])。

命題 5.1. $V|_H$ は H -admissible、つまり、離散的に分解し各重複度が有限になる。さらに、 $\mathbb{C}[\mathfrak{p}_+^{-\sigma}] \otimes V^{\mathfrak{p}_+}$ の $H \cap K$ に関する既約分解が

$$\mathbb{C}[\mathfrak{p}_+^{-\sigma}] \otimes V^{\mathfrak{p}_+} \simeq \bigoplus_{\pi} m(\pi) \pi$$

と表されたとする。右辺の和は $H \cap K$ の既約表現を動く。このとき、 $V|_H$ は次のように既約分解する。

$$V|_H \simeq \bigoplus_{\pi} m(\pi) N^{\mathfrak{h}}(\pi)$$

また、 $m(\pi) \neq 0$ ならば、 $N^{\mathfrak{h}}(\pi)$ は H の正則離散系列表現になる。

$\mathbb{C}[\mathfrak{p}_+^{-\sigma}]$ は $K \cap H$ の表現として無重複であることが知られているので ([3], [16], [9])、この命題を用いると、 $V|_H$ の分岐則の問題に対して定理 2.2 を適応することができる。特に、系として次の結果を得る。

系 5.2. G, H, V は上の通りとする。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間とし、 $L := Z_{K \cap H}(\mathfrak{a})$ とおく。このとき、 $C_H(V) = C_L(V^{\mathfrak{p}_+})$ となる。ここで、 $V|_H$ の重複度の最大値を $C_H(V)$ とした。特に、 V が H の表現として無重複であることと、 $V^{\mathfrak{p}_+}$ が L の表現として無重複であることは同値になる。

定理 2.2 の前で定義した L が $Z_{K \cap H}(\mathfrak{a})^{*2}$ と等しくなることは、ルート系と strongly orthogonal root の関係を記述した Moore の定理 (例えば、[2, Proposition 4.8 in Chapter 5]) を用いるとわかる。

6 ϵ -family と分岐則

ϵ -family は大島氏と関口氏により導入された ([11, 12]) 対称対の族のことである。この節では、同じ ϵ -family に属する対称対への正則離散系列表現の分岐則はある意味で似ているということを紹介する。

*2 定理 2.2 に合わせるなら、正確には複素化する必要がある。

G, K, H などは前の節と同様とする。 $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{g}^{-\sigma}$ の極大可換部分空間とする。 $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ に対して、

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_\alpha &:= \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X \text{ for all } H \in \mathfrak{a}\} \\ \Sigma(\mathfrak{a}) &:= \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} : \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}\end{aligned}$$

とおく。このとき、 $\Sigma(\mathfrak{a})$ はルート系になる([13])。

対称対の ϵ -family を定義する。 $\epsilon : \Sigma(\mathfrak{a}) \cup \{0\} \rightarrow \{\pm 1\}$ が、任意の $\alpha, \beta \in \Sigma(\mathfrak{a}) \cup \{0\}$ に対して、

$$\epsilon(\alpha + \beta) = \epsilon(\alpha)\epsilon(\beta)$$

を満たすとき、 ϵ は $(\Sigma(\mathfrak{a}))$ の signature であるという。

signature ϵ が与えられたとき、 ϵ を使って対称対を「変形」することができる。 σ_ϵ を次で定義する。

$$\sigma_\epsilon(X) = \epsilon(\alpha)\sigma(X) \text{ for } \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}) \cup \{0\} \text{ and } X \in \mathfrak{g}_\alpha$$

$F((\mathfrak{g}, \mathfrak{h})) := \{(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\sigma_\epsilon}) : \epsilon \text{ は } \Sigma(\mathfrak{a}) \text{ の signature}\}$ とおき、これを対称対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の ϵ -family と呼ぶ。例えば、 $F((\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{u}(n))) = \{(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{u}(p, q)) : p + q = n\} \cup \{(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}))\}$ となる。

命題 6.1. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}') \in F((\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ とする。 $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ と $\mathfrak{h}'_\mathbb{C}$ は $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の中で $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ の内部自己同型で移りあう。

つまり、同じ ϵ -family に属する対称対は、複素化すると本質的に同じ対称対になる。

定理 6.2. $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}') \in F((\mathfrak{g}, \mathfrak{h}))$ とし、 H' を $\mathfrak{h}'$ に対応する解析的部分群とする。さらに、 $\mathfrak{h}' \ni Z$ とする。つまり、 $\mathfrak{h}$ と同じ仮定を満たすとする。 V を G の正則離散系列表現とする。このとき、 $C_H(V) = C_{H'}(V)$ が成り立つ。

これは、 ϵ の定義 ($\epsilon(0) = 1$) より、 $Z_{K \cap H}(\mathfrak{a}) = Z_{K \cap H'}(\mathfrak{a})$ となることからすぐにわかる。 H と H' の G/K への可視的作用の観点から見ると、この二つは同じスライスを取ることができ、同じ等方部分群を持つ ([8]) という事実に対応していると考えられる。

参考文献

- [1] M. Brion, D. Luna, and Th. Vust. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3):617–632, 1986.
- [2] Sigurdur Helgason. *Geometric analysis on symmetric spaces*, volume 39 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

- [3] L. K. Hua. *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*. Translated from the Russian by Leo Ebner and Adam Korányi. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1963.
- [4] M. Kitagawa. Stability of branching laws for highest weight modules. 2013. preprint, available at arXiv:1307.0606.
- [5] Toshiyuki Kobayashi. Discrete series representations for the orbit spaces arising from two involutions of real reductive Lie groups. *J. Funct. Anal.*, 152(1):100–135, 1998.
- [6] Toshiyuki Kobayashi. Geometry of multiplicity-free representations of $GL(n)$, visible actions on flag varieties, and triunity. *Acta Appl. Math.*, 81(1-3):129–146, 2004.
- [7] Toshiyuki Kobayashi. A generalized Cartan decomposition for the double coset space $(U(n_1) \times U(n_2) \times U(n_3)) \backslash U(n) / (U(p) \times U(q))$. *J. Math. Soc. Japan*, 59(3):669–691, 2007.
- [8] Toshiyuki Kobayashi. Visible actions on symmetric spaces. *Transform. Groups*, 12(4):671–694, 2007.
- [9] Toshiyuki Kobayashi. Multiplicity-free theorems of the restrictions of unitary highest weight modules with respect to reductive symmetric pairs. In *Representation theory and automorphic forms*, volume 255 of *Progr. Math.*, pages 45–109. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2008.
- [10] Toshiyuki Kobayashi. Propagation of the multiplicity-freeness property for holomorphic vector bundles. In *Lie Groups: Structure, Actions, and Representations*, volume 306 of *Progr. Math.* Birkhäuser Basel, 2013.
- [11] Toshio Ōshima and Jirō Sekiguchi. Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space. *Invent. Math.*, 57(1):1–81, 1980.
- [12] Toshio Ōshima and Jirō Sekiguchi. The restricted root system of a semisimple symmetric pair. In *Group representations and systems of differential equations (Tokyo, 1982)*, volume 4 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 433–497. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [13] W. Rossmann. The structure of semisimple symmetric spaces. *Canad. J. Math.*, 31(1):157–180, 1979.
- [14] Atsumu Sasaki. Visible actions on irreducible multiplicity-free spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (18):3445–3466, 2009.
- [15] Fumihito Satō. On the stability of branching coefficients of rational representations of reductive groups. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 42(2):189–207, 1993.
- [16] Wilfried Schmid. Die Randwerte holomorpher Funktionen auf hermitesch sym-

- metrischen Räumen. *Invent. Math.*, 9:61–80, 1969/1970.
- [17] Yuichiro Tanaka. Classification of visible actions on flag varieties. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 88(6):91–96, 2012.
- [18] Dmitry A. Timashev. *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, volume 138 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Heidelberg, 2011. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8.