

鉄道車輪のきしり音に関する研究

京大工学部 中井幹雄 (Mikio Nakai)

1. 緒言

列車が曲線路を走行するとき、車輪からかなり甲高い耳障りなきしり音 (Squeal) が発生する。このきしり音について、基礎的な研究をするために、車輪とレールを内径固定、周辺自由の円板と細いはりに置き換えた実験を行った。きしり音の発生の理論的な検討はさらに問題を簡単化し、はりの振動を考慮せず、円板の円周面の一点に円板の軸方向に摩擦力が加わるとして行った。

2. 静止円板の場合

2.1 実験結果： 図1 (a), (b) は実際の列車が曲率半径100mの曲線路を速度20km/hで走行したとき、発生したきしり音の周波数分析結果で

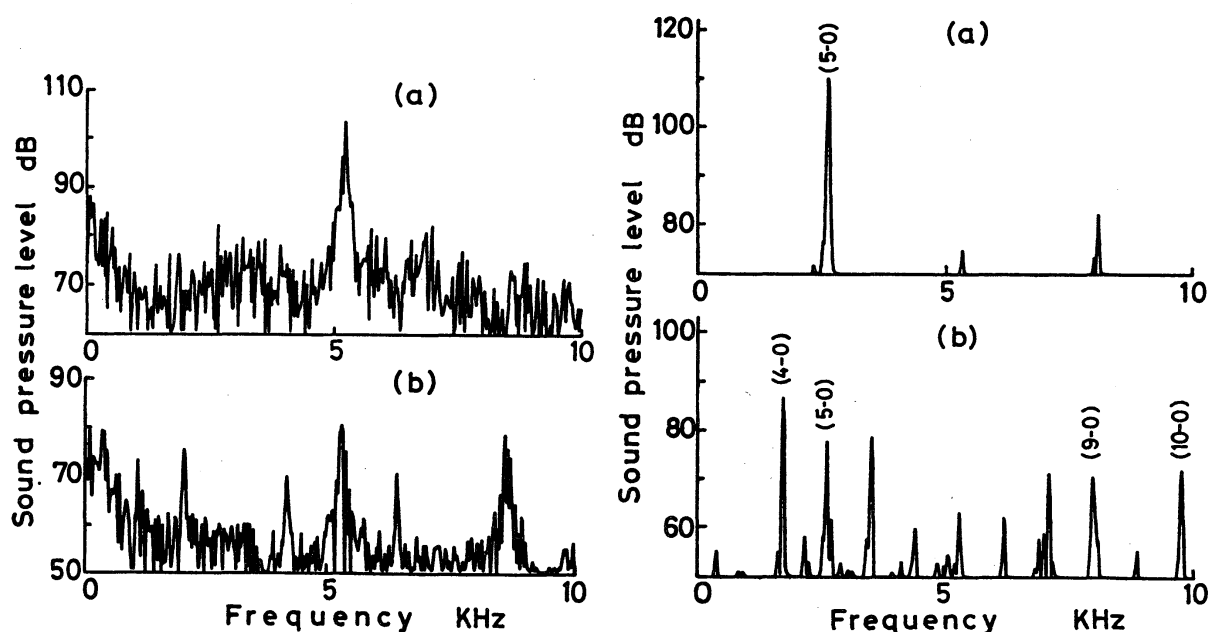


図1 実際の車輪のきしり音の周波数分析結果

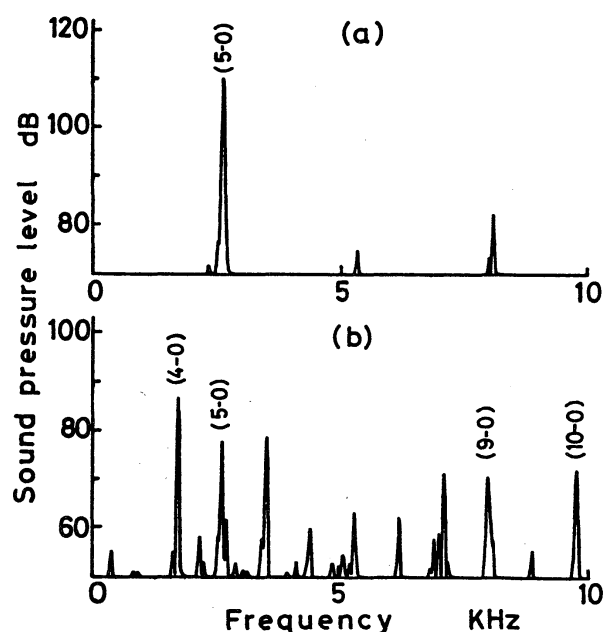


図2 静止円板のきしり音の周波数分析結果

ある。音圧レベルの高い単一の周波数（図 1 (a)）と比較的音圧レベルの低い多数の周波数成分を含む（図 1 (b)）きしり音が発生し、それらの周波数は車輪の節線モードの固有振動数にほぼ一致している。また、車輪の打撃試験結果から、減衰係数の小さい節線モードのきしり音が主に発生することがわかった。

つぎに、これらを詳しく調べるために静止円板について実験を行った。軸に固定された円板（外径 30 cm, 内径 5 cm, 厚さ 0.75 cm, S45C）は内径固定、外径自由の状態になっている。この円板の外周部の一点に正方形断面をしたはり（断面の一辺の長さ 1.6~3.0 cm, 長さ 30~60 cm）を接触させ、円板の軸方向にはりを移動してきしり音を発生させた。⁽¹⁾ きしり音は円板とはりの接触点から 10 cm の位置に円板の直角方向に 1/2" マイクロホンを設置して測定した。きしり音の周波数はリアルタイム周波数分析器によって調べた。図 2 (a), (b) は単独の周波数をもつきしり音と多数の周波数をもつきしり音の周波数分析結果を示す。図 1 の実際の車輪の場合と同様、単独の周波数をもつきしり音は音圧レベルが高い。荷重、はりを変えて、きしり音を発生させた結果、(3-0), (4-0), (5-0) などの節線モードのきしり音が多く発生することがわかった。以下、円板の振動モードは $(n-s)$ で表し、 n は節直径数、 s は節円数である。

さらに、円板の減衰係数を測定した。減衰係数は円板加振後の自由振動減衰波形から求めた。図 3 はそれらの結果を節線、節円モードごとに示している。明らかにきしり音がよく発生する (3-0)~(5-0) モードの減衰係数は小さい。

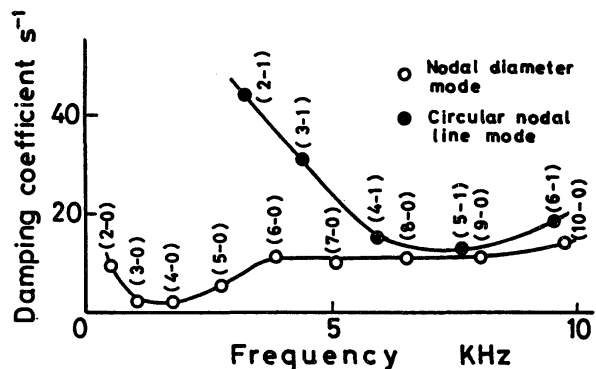


図 3 円板の減衰係数

2.2 理論的考察：円板の円周上の一点 (r_o, θ_o) に軸方向に摩擦力 μP_o が作用し，円板の回転慣性，せん断変形を無視すると，平衡位置からの円板の軸方向変位 $w(r, \theta, t)$ は次式のように表される。

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [\mu(v_r) - \mu(V)] P_o \frac{1}{r} \delta(r - r_o) \delta(\theta - \theta_o) \dots\dots\dots (1)$$

ここで， δ ：ディラックのデルタ関数， P_o ：はりと円板の間の接触荷重， μ ：摩擦係数，はりと円板の相対速度 v_r の関数， $v_r = V - (\partial w / \partial t)_{r_o, \theta_o}$ ， V ：はりの移動速度， D ：円板の曲げ剛性， ρ ：密度， h ：板厚， t ：時間， c ：減衰係数， r_i ：内半径， r_o ：外半径。

式(1)の解を固有関数 $\varphi_{ns}(r, \theta)$ と時間の関数 $\xi_{ns}(t)$ で次のように表す。

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n,s} \varphi_{ns}(r, \theta) \xi_{ns}(t) \dots\dots\dots (2)$$

$\varphi_{ns}(r, \theta)$ は $r = r_i$ において固定， $r = r_o$ において自由の境界条件から次式のように表される。 $\varphi_{ns}(r, \theta) = R_{ns}(r) \cos n(\theta - \theta^*)$ ，

$$R_{ns}(r) = \{ J_{ns}(k_{ns}r) + B_{ns} Y_{ns}(k_{ns}r) + C_{ns} I_{ns}(k_{ns}r) + D_{ns} K_{ns}(k_{ns}r) \}$$

ここで， $k_{ns}, B_{ns}, C_{ns}, D_{ns}$ ：式(2)を境界条件に代入して得られる振動方程式から求められる係数， $k_{ns}^4 = \rho h \omega_{ns}^2 / D$ ， ω_{ns} ：円板の固有角振動数，

J_{ns}, Y_{ns}, I_{ns} および K_{ns} ： n 次の第一種，第二種，変形第一種および変形第二種ベッセル関数， θ^* ：きしり音発生の場合，接触点が振動モードの腹になると考えられるので $\theta^* = 0$ である。

式(2)を式(1)に代入し， $\varphi_{ns}(r, \theta)$ が直交関数であるから，ガラーキン法によって次のような式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_{ns} + \frac{c}{\rho h} \dot{\xi}_{ns} + \omega_{ns}^2 \xi_{ns} &= \frac{P_o \varphi(r_o, \theta_o)}{\rho h N_{ns}} \left\{ \mu \left(V - \sum_{n,s} \dot{\varphi}_{ns}(r_o, \theta_o) \xi_{ns} \right) - \mu(V) \right\} \\ N_{ns} &= \int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_o} \varphi_{ns}^2(r, \theta) r dr d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし， $[\dot{\quad}]$ ：時間に関する微分。

ここで， n を 0 から n_o ， s を 1 から s_o まで考えて式(3)を自由度

$N=(n_0+1)s_0$ の方程式に変え, かつ, $x_i=\xi_{ns}$, $\varphi_i=\varphi_{ns}$, $\omega_i=\omega_{ns}$, $N_i=N_{ns}$,

$D_i=P_0\varphi_i/\rho h N_i$, $C_i=c/\rho h$ (c の値は振動モードによって変化するものと考えた) とおくと, 式(3)は式(4)のようになる.

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = D_i \left\{ \mu \left(V - \sum_{i=1}^N \varphi_i \dot{x}_i \right) - \mu(V) \right\} - C_i \dot{x}_i \quad (i=1, N) \dots\dots\dots (4)$$

さらに, 摩擦係数 $\mu(v_r)$ を次の多項式で表すことにする.

$$\mu(v_r) = \mu_0 \operatorname{sgn}(v_r) + \mu_1 v_r + \mu_2 v_r^3 \dots\dots\dots (5)$$

ここで, μ_0, μ_1, μ_2 : 定数.

式(5)を式(4)に代入し, その右辺を $\varepsilon_i f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N)$ とすると

$$\ddot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \varepsilon_i f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_N) \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $\varepsilon_i = D_i \varepsilon_1 / D_1$, $\varepsilon_1 = D_1 B_1 - C_1$, $B_1 = -(\mu_1 + 3\mu_2 V^2) \varphi_1$.

式(6)の解を

$$x_i = a_i(t) \sin\{\omega_i t + \psi_i(t)\} \dots\dots\dots (7)$$

と仮定し, さらに, $v_r > 0$ とし, 平均法を用いると a_i, ψ_i は次式で表される.

$$\dot{\psi}_i = 0 \text{ したがって, } \psi_i = \text{const.} \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{a}_i = \frac{\varepsilon_i a_i}{2\omega_i} (A_{i1} + A_{i2} a_1^2 + A_{i3} a_2^2 + \dots + A_{iN+1} a_N^2) \quad (i=1, N) \dots\dots\dots (9)$$

ここで, $A_{i1} = \frac{(D_i B_i - C_i) \omega_i}{\varepsilon_i}$, $A_{i,i+1} = \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^3 \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right)^3 A_{12}$, $B_i = \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right) B_1$,

$$A_{ij} = 2 \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right) \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right) \left(\frac{\omega_{j-1}}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\varphi_{j-1}}{\varphi_1} \right)^2 A_{12} \quad (j \neq 1, j \neq i+1), \quad A_{12} = \frac{3\omega_1^3 D_1 B_{11}}{4\varepsilon_1}, \quad B_{11} = -\mu_2 \varphi_1^3$$

さらに, $y_i(t) = [a_i(t)]^2$ とおき, 式(9)を $y_i(t)$ で書き表すと

$$\dot{y}_i = \frac{\varepsilon_i}{\omega_i} y_i (A_{i1} + A_{i2} y_1 + A_{i3} y_2 + \dots + A_{iN+1} y_N) \dots\dots\dots (10)$$

式(10)は生物の種内および種間の競合現象を表す Lotka-Volterra の式に一致している.

式(10)の定常解を調べる. 定常解は次の3つの場合に分けられる.

(a) $y_1, y_2, \dots, y_N$ のすべてが零となる $(0, 0, \dots, 0)$ の場合

(b) $y_1, y_2, \dots, y_N$ のうち 1 つの正なる解があり, 他はすべて零となる場合, すなわち

$$(0, \dots, 0, \alpha_i, 0, \dots, 0), \alpha_i = -A_{i1}/A_{i+1}$$

(c) $y_1, y_2, \dots, y_N$ のうち n ($N \geq n \geq 2$) 個の正なる解があり, 他はすべて零の場合

$$(0, \overbrace{\alpha, \beta, 0, \dots, \gamma}^n, 0, \delta, 0, \dots)$$

これらの定常解の安定性を考える.

式(10)の変分方程式は, 定常解からの変分を η とし, η の高次項を無視すれば次式のようになる.

$$\dot{\eta} = A\eta \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N)^T$

式(11)の A のすべての固有値の実数部が負であれば, 解は安定である.

上述の 3 つの場合について解の安定性を調べる.

(a) の場合

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} A_{11} & & 0 \\ & \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} A_{21} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{\varepsilon_N}{\omega_N} A_{N1} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (12)$$

A の固有値は $\lambda_i = (\varepsilon_i/\omega_i) A_{i1} = D_i B_i - C_i$, ($i=1, N$) であり, 解が安定であるためには

$$D_i B_i < C_i \quad (i=1, N) \quad \dots\dots\dots (13)$$

でなければならない, この解が安定であることは, 振動モードの減衰係数が大きいとすべてのモードが減衰することを意味する.

(b) の場合

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\omega_1}(A_{11}+A_{1i+1}\alpha_i) & 0 & 0 \cdots 0 \cdots \cdots 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}(A_{21}+A_{2i+1}\alpha_i) & 0 \cdots 0 \cdots \cdots 0 \\ \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{i2} & \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{i3} & \cdots \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{ii+1} \cdots \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{iN+1} \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \frac{\varepsilon_N}{\omega_N}(A_{N1}+A_{Ni+1}\alpha_i) \end{pmatrix} \cdots (14)$$

A の固有値は $\lambda_i = (\varepsilon_i/\omega_i)\alpha_i A_{ii+1}$, $\lambda_j = (\varepsilon_j/\omega_j)(A_{j1}+A_{ji+1}\alpha_i)$, ($j=1, N, j \neq i$) となるので, 解が安定であるための条件は次式のように表される.

$$D_i B_i > C_i, 2(D_i B_i - C_i) D_j \varphi_j > (D_j B_j - C_j) D_i \varphi_i \quad (j=1, N) \cdots \cdots (15)$$

この解の安定範囲を C_i と C_j を両軸にとって示すと図4のようになる. 減衰係数の大きさによって解の安定性が変化し, 減衰係数が小さいほど解の安定範囲は大きくなる.

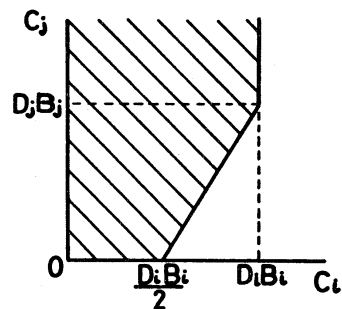


図4 解(b)の場合の安定範囲

(c) の場合, 解として,

$$(0, \overbrace{\alpha_2, 0, \alpha_4, \alpha_5, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i}^n, 0, 0)$$

とすると, A は次式となる.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1}{\omega_1}(A_{11} + A_{13}\alpha_2 + \cdots) & 0 & 0 & \cdots \cdots 0 \\ \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}\alpha_2 A_{22} & \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}\alpha_2 A_{23} & \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}\alpha_2 A_{24} & \cdots \frac{\varepsilon_2}{\omega_2}\alpha_2 A_{2N+1} \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_3}{\omega_3}(A_{31} + A_{33}\alpha_2 + \cdots) & \cdots \cdots 0 \\ \frac{\varepsilon_4}{\omega_4}\alpha_4 A_{42} & \frac{\varepsilon_4}{\omega_4}\alpha_4 A_{43} & \frac{\varepsilon_4}{\omega_4}\alpha_4 A_{44} & \cdots \frac{\varepsilon_4}{\omega_4}\alpha_4 A_{4N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{i2} & \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{i3} & \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{i4} & \cdots \frac{\varepsilon_i}{\omega_i}\alpha_i A_{iN+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \frac{\varepsilon_N}{\omega_N}(A_{N1} + A_{N3}\alpha_2 + \cdots) \end{pmatrix} \cdots (16)$$

式(16)の固有方程式を並びかえると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} A_1 - \lambda E & A_2 \\ 0 & A_3 - \lambda E \end{vmatrix} = |A_1 - \lambda E| |A_3 - \lambda E| = 0 \cdots \cdots (17)$$

と表され、 $|A_1 - \lambda E|$ は n 次の正方行列式となり、解の安定性はこの固有値のみ調べればよい。この固有方程式を λ について展開し、係数の符号を式によって調べた。その結果、この固有値は不安定となることがわかった。他の形の解も同様に計算でき、解は不安定となる。

以上、定常解の安定性を検討した結果、 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ のうち1個の正の解 α_i のみあり他の解がすべて零である $(0, \cdots, 0, \alpha_i, 0, \cdots, 0)$ が式(15)を満たす場合と $y_1, y_2, \cdots, y_N$ がすべて零である $(0, 0, \cdots, 0)$ が式(13)を満たす場合、解が安定となる。したがって、定常状態において、二つあるいはそれ以上の振動モードが同時に振動することではなく、ある一つのモードで振動することがわかる。このことは完全なきしり音が発生する場合、単一モードである実験結果に一致している。また、式(15)より、減衰係数 C_i が小さいと解が安定になり、きしり音が発生しやすいことがわかる。

2.2.1 2自由度の場合： 簡単な2自由度の場合について考える。解は減衰係数の大きさによって、図5に示すような6つの範囲に分けられる。図6は y_1, y_2 を両軸にとって $\dot{y}_1=0, \dot{y}_2=0$ の直線および安定解を●印、不安定解を○印で示したものである。生物のように二種共存することな

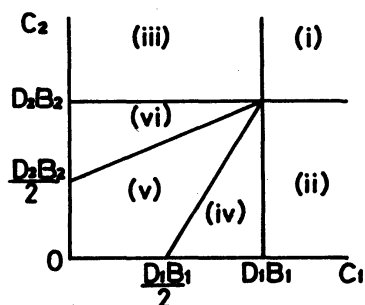


図5 (i)～(vi)の範囲

く、すべて定常状態ではいずれか一つのモードになることが図からわかる。

2.2.2 内部共振を考えた場合:

以上の解析は円板の固有振動数の間に内部共振関係がない場合について行った。しかし、円板の固有振動数の間には内部共振関係が存在する可能性がある。図2においても(5-0)モードの ω_{5-0} のほかにわずかに(9-0)モードの ω_{9-0} が生じている。すなわち、 i モードのきしり音のほかに、 i モードと内部共振関係にある j モードの周波数成分($j > i$)がわずかに生じる。図7は(a): $5\omega_{3-0} \cong \omega_{7-0}$, (b): $3\omega_{4-0} \cong \omega_{7-0}$ のような内部共振関係があるときのきしり音の周波数分析結果である。わずかに j モードの周波数成分が生じている。しかし、図7(c)に示すように j モードのきしり音を発生させたとき、内部共振関係にある i モード

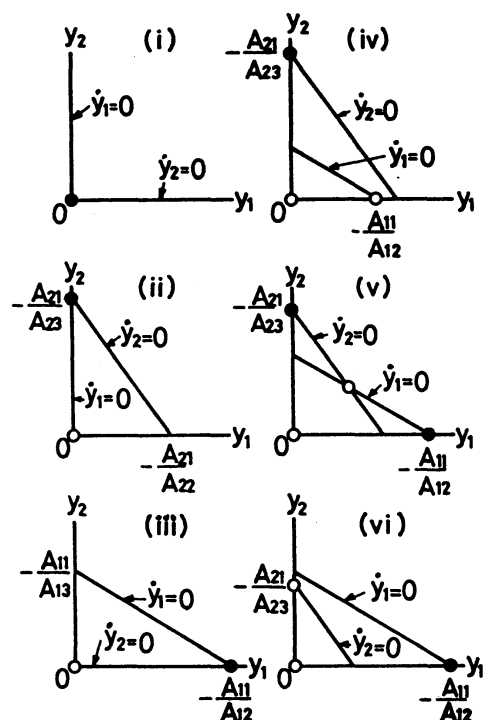


図6 2自由度の場合の解の安定性

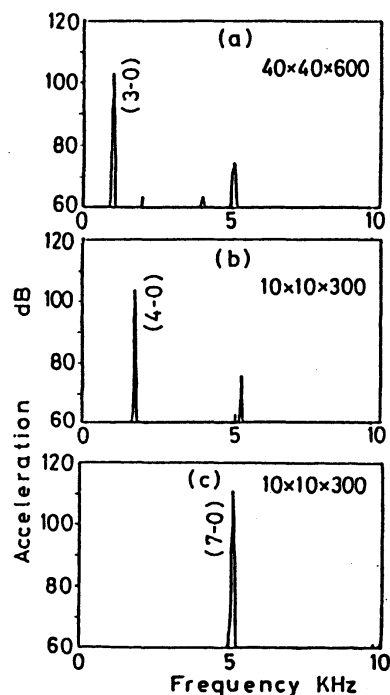


図7 内部共振関係がある場合のきしり音発生時における振動加速度の周波数分析結果

のきしり音は発生せず j モードのきしり音のみ発生する。

例として, $\omega_j \cong 3\omega_i$ の場合について考察する。⁽²⁾ ω_i および ω_j を ε の高次項を無視して次式のようにおきかえる。⁽³⁾

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= p_{i0} + \varepsilon p_{i1} \\ \omega_j &= p_{j0} + \varepsilon p_{j1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

なお, p_{i0} と p_{j0} の間には $p_{j0} = 3p_{i0}$ の関係が成立する。ここで, $\varepsilon = \varepsilon_i$ 。

内部共振関係がある i, j モードについて式(18)を式(4)に代入し, 高次項を無視すると,

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_i + p_{i0}^2 x_i &= D_i \left\{ \mu \left(V - \sum_{m=1}^N \varphi_m \dot{x}_m \right) - \mu(V) \right\} - C_i \dot{x}_i - 2\varepsilon p_{i0} p_{i1} x_i \\ \ddot{x}_j + p_{j0}^2 x_j &= D_j \left\{ \mu \left(V - \sum_{m=1}^N \varphi_m \dot{x}_m \right) - \mu(V) \right\} - C_j \dot{x}_j - 2\varepsilon p_{j0} p_{j1} x_j \\ \ddot{x}_k + p_{k0}^2 x_k &= D_k \left\{ \mu \left(V - \sum_{m=1}^N \varphi_m \dot{x}_m \right) - \mu(V) \right\} - C_k \dot{x}_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

($k=1, N, k \neq i \neq j$)

が得られる。ここで,

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a_i \sin(p_{i0} t + \theta_i) \\ x_j &= a_j \sin(p_{j0} t + \theta_j) \\ x_k &= a_k \sin(p_{k0} t + \theta_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ただし, a_i, a_j, a_k : 振幅, $\theta_i, \theta_j, \theta_k$: 位相差

とおき, 式(19)に平均法を用いると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{da_i}{dt} &= \frac{\varepsilon a_i \varphi_i p_{i0}}{2 p_{i0}} \left\{ D_i^* - B_i^* \left[\frac{3}{4} a_i^2 \varphi_i^2 p_{i0}^2 + \frac{3}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N a_m^2 \varphi_m^2 p_{m0}^2 + \frac{3}{4} a_i \varphi_i p_{i0} a_j \varphi_j p_{j0} \cos \Theta_1 \right] \right\} \\ \frac{da_j}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2 p_{j0}} \left\{ a_j \varphi_j p_{j0} D_j^* - B_j^* \left[\frac{3}{4} a_j^3 \varphi_j^3 p_{j0}^3 + \frac{3}{2} a_j \varphi_j p_{j0} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N a_m^2 \varphi_m^2 p_{m0}^2 + \frac{1}{4} a_i^3 \varphi_i^3 p_{i0}^3 \cos \Theta_1 \right] \right\} \\ \frac{da_k}{dt} &= \frac{\varepsilon a_k \varphi_k p_{k0}}{2 p_{k0}} \left\{ D_k^* - B_k^* \left[\frac{3}{4} a_k^2 \varphi_k^2 p_{k0}^2 + \frac{3}{2} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N a_m^2 \varphi_m^2 p_{m0}^2 \right] \right\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここで, $D_i^* = (D_i B_i - C_i) / \varepsilon_i \varphi_i$, $B_i^* = D_i \mu_2 / \varepsilon_i$, $\Theta_1 = 3\theta_i - \theta_j$, $p_{m0} = \omega_m$ ($m=1, N, m \neq i \neq j$)

$$\left. \begin{aligned} a_i \frac{d\theta_i}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2p_{i0}} \left\{ 2a_i p_{i0} p_{i1} + \frac{3}{4} B_i^* a_i^2 \varphi_i^2 p_{i0}^2 a_j \varphi_j p_{j0} \sin \Theta_1 \right\} \\ a_j \frac{d\theta_j}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2p_{j0}} \left\{ 2a_j p_{j0} p_{j1} - \frac{1}{4} B_j^* a_i^3 \varphi_i^3 p_{i0}^3 \sin \Theta_1 \right\} \\ a_k \frac{d\theta_k}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

式(21), (22)の定常解のうち次の解以外は不安定であった。

- (a) $(0, 0, 0, \dots\dots\dots, 0, 0)$
- (b) $(0, a_k, 0, \dots\dots\dots, 0, 0) \quad k \neq i \neq j, \quad a_k^2 = \frac{4D_k^*}{3B_k^* \omega_k^2 \varphi_k^2}$
- (c) $(0, 0, a_j, 0, \dots\dots\dots, 0, 0) \quad \text{ただし, } p_{j1} = 0$
- (d) $(0, 0, a_i, 0, \dots\dots\dots, 0, a_j, 0)$

なお, $(0, 0, 0, a_i, 0, \dots\dots\dots, 0)$ の解は存在しない。このことは i と j のモードの間に内部共振関係がある場合, 解(c)に相当する j モードの単一のきしり音は発生するが, i モードのきしり音は発生しなかった実験結果に一致している。

二重モードの解である(d)は次式から求められる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_i^2 - 4(D_i^*/3B_i^* + \beta_j) \beta_i - 3\beta_j^2 + 4\beta_j D_j^*/B_j^* &= 0 \\ \left\{ 3B_i^* \varphi_i \left(\frac{3}{4} \beta_i + \frac{3}{2} \beta_j - D_i^*/B_i^* \right) + B_j^* \varphi_j \left(\frac{3}{4} \beta_j + \frac{3}{2} \beta_i - D_j^*/B_j^* \right) \right\}^2 \\ + (2\bar{\eta} \omega_i)^2 - \frac{1}{16} \frac{\beta_i}{\beta_j} \{ 9B_i^* \varphi_i \beta_j + B_j^* \varphi_j \beta_i \}^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで, $\beta_i = a_i^2 \varphi_i^2 p_{i0}^2$, $\beta_j = a_j^2 \varphi_j^2 p_{j0}^2$, $\bar{\eta} = \frac{3p_{i1} - p_{j1}}{\omega_i} = \frac{3\omega_i - \omega_j}{\varepsilon \omega_i}$ であり, ω_i と

$3\omega_i$ の一致の割合を表す。

式(21), (22)の右辺を零とおいた式, 式(18)および式(23)から, $\beta_i, \beta_j, a_i, a_j, p_{i0}, p_{j0}, p_{i1}, p_{j1}, \Theta_1$ の定常値 Θ_{10} を求めることができる。また, 解の安定性も検討することができる。

図8は内半径 r_i と外半径 r_o の比 r_i/r_o (r_i :一定) に対する円板の接触点における無次元化した振幅 $\bar{a}_i, \bar{a}_j$ および振動加速度 $\bar{a}_i \bar{p}_{i0}^2$, $\bar{a}_j \bar{p}_{j0}^2$ (dB表示している) を計算した結果を示す。なお, $\bar{a}_i = a_i \varphi_i \omega_i \sqrt{-\mu_2/(\mu_1 + 3\mu_2 V^2)}$,

$\bar{p}_{i0} = p_{i0}/\omega_i$ の関係がある。また、図には ω_j と $3\omega_i$ の一致の割合を表す $\phi = \varepsilon \bar{\eta}$ の値も示している。 $3\omega_i$ が ω_j と完全に一致するとき ($\phi=0$)、 j モードの振動レベルが高くなっているが、レベルが高くなる範囲は狭い。したがって、 $3\omega_i$ が ω_j と完全に一致しない限り、 i モードの振動が支配的であり、単一モードに近いきしり音が発生する。このほか、3つのモードが内部共振関係にある $\omega_k - \omega_j \cong 2\omega_i$ などでは、三重モードのきしり音が発生する場合がある。(2)

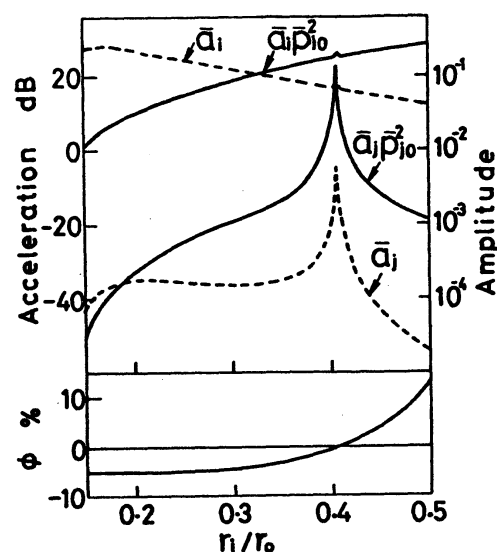


図8 $\omega_j \cong 3\omega_i$ のときの r_i/r_0 と振動変位および振動加速度の関係

3. 回転円板の場合

3.1 実験結果： 図9 ははりの長さ 60 cm を用い、静止時、低速の 3 rpm および比較的高速の 60 rpm で (4-0) モードのきしり音が発生した場合の静止座標系から測定した振動変位を示している。静止座標系の振動変位は図10に示すように 10° おきに設置された6個の渦電流型微

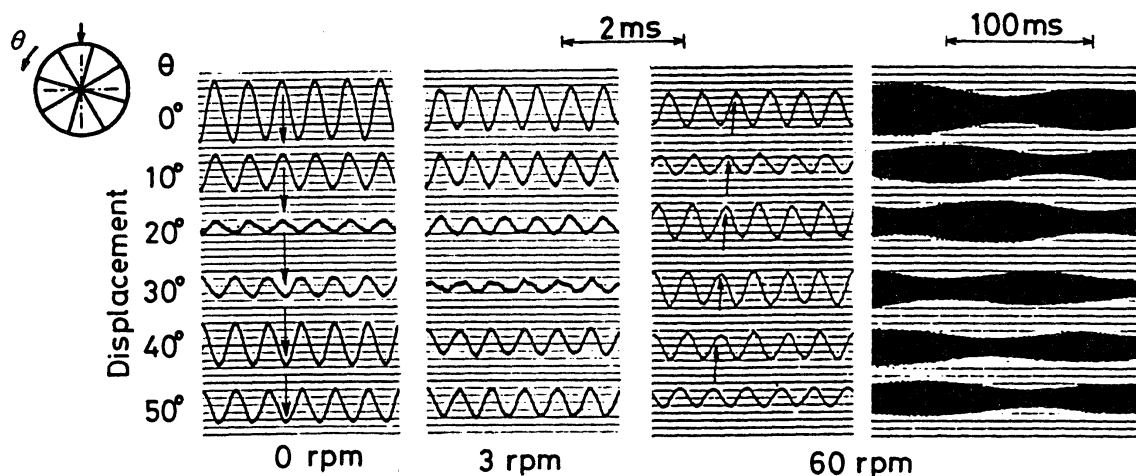


図9 回転円板におけるきしり音発生時の微小変位計による各位置の振動変位

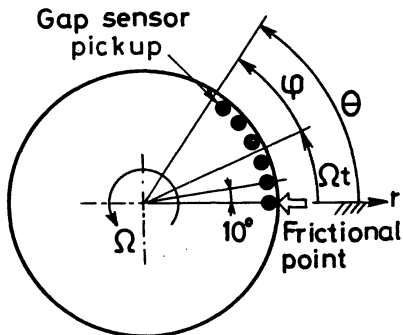


図10 座標系と微小変位計
による変位の測定位置

小変位計によって測定した。なお、測定された変位には円板の偏心などによる低周波成分が含まれるので、これらをハイパスフィルタによってカットした。また、60 rpm については、時間軸を短くした全体的な振動変位を図9に示している。低速の3 rpmでは円板が回転しているにもかかわらず、静止時と同様、振動モードが空間に固定した静止モードである。

しかし、節の位置は30°付近にあり、図の左上に示すように静止状態より回転方向に移動した静止モードである。これに対して、高速の60 rpmでは円板の回転方向と逆に進む後退波が発生している。この位相差は、ほぼ $n\theta/\bar{\omega}$ ($\bar{\omega}$: きしり音の角振動数) と等しい。

3.2 理論的考察: この場合の検討は空間に固定された静止座標系 (r, θ) によって行う。角速度 Ω で回転している円板の円周面の一点を摩擦した場合、円板の平衡位置からの軸方向変位 w を表す運動方程式は次のように表される。^{(4), (5), (6)} なお、コリオリの力、円板の回転にともなう応力変化、円板の回転慣性およびせん断変形を無視する。

$$D\nabla^4 w + c \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right) w + \rho h \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 w = [\mu(v_r) - \mu(V)] P_0 \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \dots \dots \dots (24)$$

ここで、 $v_r = V - (\partial w / \partial t + \Omega \partial w / \partial \theta)_{r_0, \theta_0}$

第2章の静止円板の場合と異なって、 w を次式のようにおく

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n,s} R_{ns}(r) [A_{ns}(t) \sin n\theta + B_{ns}(t) \cos n\theta] \dots \dots \dots (25)$$

ここで、 $A_{ns}(t), B_{ns}(t)$: 時間 t の関数。

式(25)を式(24)に代入し、ガラーキン法を適用すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A}_{ns} + C \dot{A}_{ns} + (\omega_{ns}^2 - n^2 \Omega^2) A_{ns} - 2n\Omega \dot{B}_{ns} - Cn\Omega B_{ns} &= \frac{R_{ns}(r_0) \sin n\theta_0}{\rho h N_{ns1}} P_0 [\mu(v_r) - \mu(V)] \\ \ddot{B}_{ns} + C \dot{B}_{ns} + (\omega_{ns}^2 - n^2 \Omega^2) B_{ns} + 2n\Omega \dot{A}_{ns} + Cn\Omega A_{ns} &= \frac{R_{ns}(r_0) \cos n\theta_0}{\rho h N_{ns2}} P_0 [\mu(v_r) - \mu(V)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここで, $C = c/\rho h$, $N_{nsi} = \epsilon_{ni} \pi \int_{r_i}^{r_0} R_{ns}^2(r) r dr$,

$$n=0 \text{ のとき } \epsilon_{ni} = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ 2 & (i=2) \end{cases}, \quad n \neq 0 \text{ のとき } \epsilon_{ni} = 1$$

静止円板で内部共振がない場合, きしり音は単一モードで発生する. そこで, 単一モード ($n-s$) についてのみ考える. ただし $n \neq 0$ とする.

いま,

$$R = R_{ns}(r_0), \quad \epsilon = \frac{P_0 R^2}{\rho h N_{ns2}} (\mu_1 + 3\mu_2 V^2), \quad E = 3\mu_2 V R / (\mu_1 + 3\mu_2 V^2), \quad F = ER/3V, \\ A = A_{ns}, \quad B = B_{ns}, \quad \nu = n\Omega, \quad \omega_0 = \omega_{ns} \quad \dots\dots\dots (27)$$

とおき, さらに, 円板とはりの接触点 (r_0, θ_0) を $\theta_0 = 0$ とすると, 式(26)は次のようになる.

$$\begin{aligned} \ddot{A} + \omega_0^2 A &= -C \dot{A} + C\nu B + 2\nu \dot{B} + \nu^2 A = f_A \\ \ddot{B} + \omega_0^2 B &= \epsilon [-\dot{B} - \nu A + E(\dot{B}^2 + \nu^2 A^2 + 2\dot{B} A \nu) - F(\dot{B}^3 + 3\nu^2 A^2 \dot{B} + 3\nu A \dot{B}^2 + \nu^3 A^3)] \\ &\quad - C \dot{B} - C\nu A - 2\nu \dot{A} + \nu^2 A = f_B \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

式(28)の右辺の非線形項は $A, B, \dot{A}, \dot{B}$ の関数である. したがって, 角振動数は ω_0 と異なり変化する. この角振動数を ω として式(28)を次のように書き換える.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A} + \omega^2 A &= (\omega^2 - \omega_0^2) A + f_A \\ \ddot{B} + \omega^2 B &= (\omega^2 - \omega_0^2) B + f_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

式(29)の解を

$$\left. \begin{aligned} A &= a \sin(\omega t + \psi) \\ B &= b \sin(\omega t + \bar{\psi}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

とおき, 平均法を適用すると次のような式が得られる.

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} (Ca\omega - C\nu b \sin \Theta - 2\nu b\omega \cos \Theta) \\
 a \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{1}{2\omega} [(\nu^2 + \omega^2 - \omega_0^2) a + C\nu b \cos \Theta - 2\nu b\omega \sin \Theta] \\
 \frac{db}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{8\omega} [4(b\omega - \nu a \sin \Theta) + 3F(b^3\omega^3 + 2\nu^2 a^2 b\omega - \nu^2 a^2 b\omega \cos 2\Theta \\
 &\quad - 3\nu a b^2 \omega^2 \sin \Theta - \nu^3 a^3 \sin \Theta) \\
 &\quad + \frac{4}{\varepsilon} (Cb\omega - C\nu a \sin \Theta + 2\nu a\omega \cos \Theta)] \\
 b \frac{d\bar{\psi}}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{8\omega} \{-4\nu a \cos \Theta + 3F\nu a \cos \Theta (2\nu a b\omega \sin \Theta - b^2 \omega^2 - \nu^2 a^2) \\
 &\quad + \frac{4}{\varepsilon} [(\nu^2 + \omega^2 - \omega_0^2) b - C\nu a \cos \Theta - 2\nu a\omega \sin \Theta]\}
 \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

ここで, $\Theta = \bar{\psi} - \psi$.

式(31)から a, b, ω, Θ の定常解を求めることができる。図11は(4-0)モ-

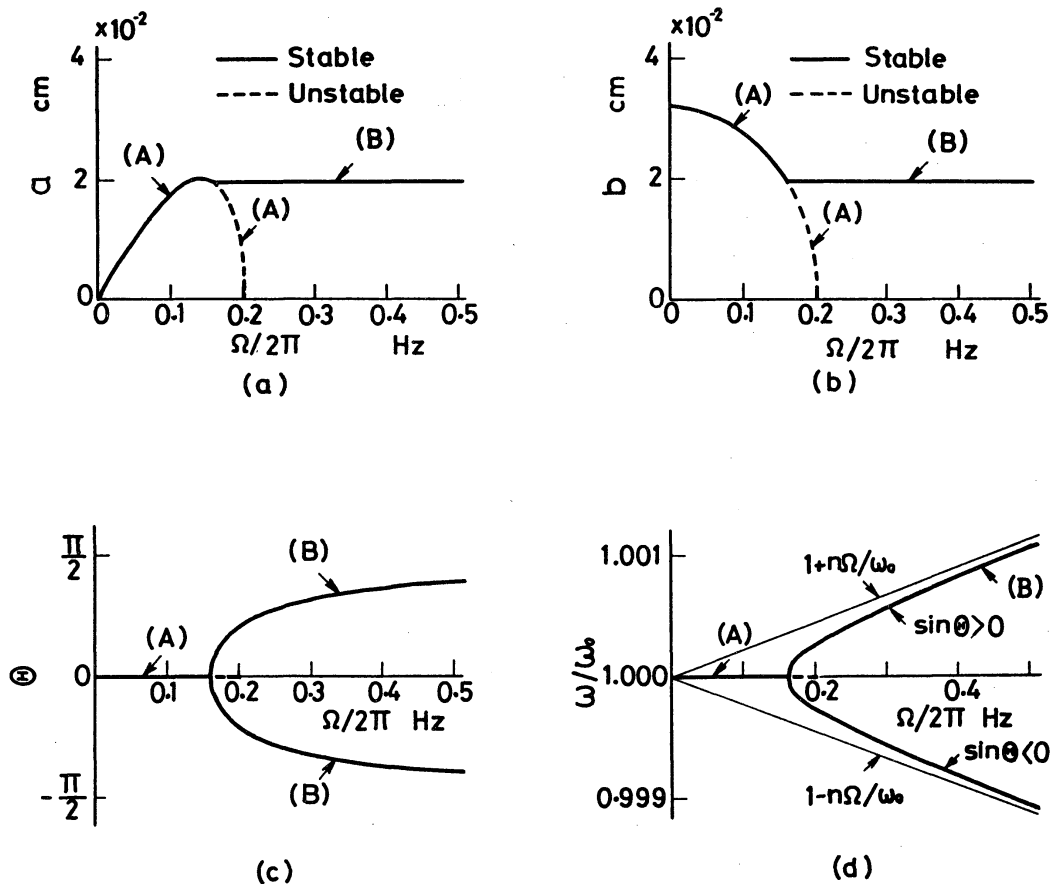


図11 Ω に対する a, b, ω および Θ の定常解の計算結果

ドについて Ω に対する a, b, ω, Θ の定常解を計算した結果である。なお、 Θ については $-\pi/2 < \Theta < \pi/2$ の範囲のみ示している。図11に示すように次の二種類の解が得られた。

$$\left. \begin{array}{l} \text{(A)} \quad \omega \approx \omega_0, \sin \Theta \approx 0 \\ \text{(B)} \quad a = b, \sin \Theta \rightarrow \pm 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

Ω が小さいとき解 (A) は安定で、式 (28) の右辺の A, B を含む項を無視すると得られる次式の解に、ほぼ等しい値である。

$$a = \frac{2\nu b}{C}, \quad b = \sqrt{-\frac{4}{3F\omega^2} \left(1 + \frac{C}{\varepsilon} + \frac{4\nu^2}{\varepsilon C} \right)} \dots\dots\dots (33)$$

この解は $\nu = n\Omega > C/2$ になると不安定になる。解 (A) が不安定になると同時に解 (B) が得られる。 Ω が大きくなるにつれて Θ は $\pi/2$ あるいは $-\pi/2$ に、 ω は $\omega_0 + n\Omega$ あるいは $\omega_0 - n\Omega$ に近づく。

つぎに、円板の振動モードについて考える。解 (A) の場合、式 (25), (30) から $r = r_0$ における w は

$$w = R\sqrt{a^2 + b^2} \sin(n\theta \pm \bar{\theta}) \sin(\omega_0 t + \psi) \dots\dots\dots (34)$$

ここで、 $\bar{\theta} = \tan^{-1}(b/a)$,

$+$: $\Theta \approx 0$, $-$: $\Theta \approx \pi$

となって、空間に固定された静止モードとなる。

一方、解 (B) の場合、 Ω が大きくなると、 $\Theta = \pm\pi/2$ に近づき、 w は近似的に、

$$\begin{aligned} w &= Ra \cos(\omega t - n\theta + \psi) : \Theta = \pi/2 \\ &= -Ra \cos(\omega t + n\theta + \psi) : \Theta = -\pi/2 \\ &\dots\dots (35) \end{aligned}$$

と表され、進行波あるいは後退波となる。

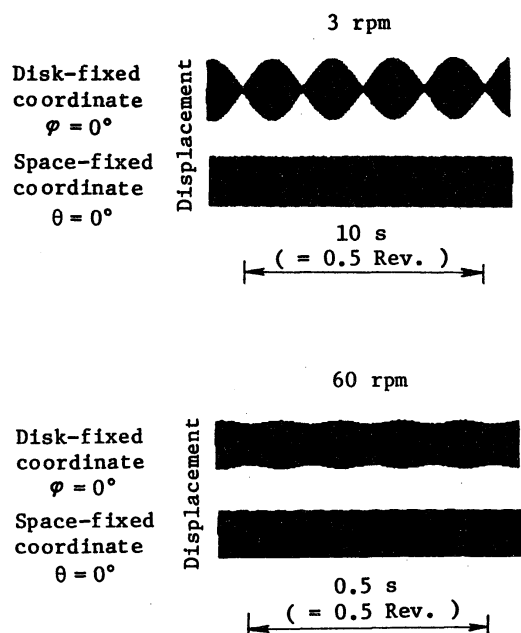


図12 回転および静止座標系における円板の振動変位波形の計算結果

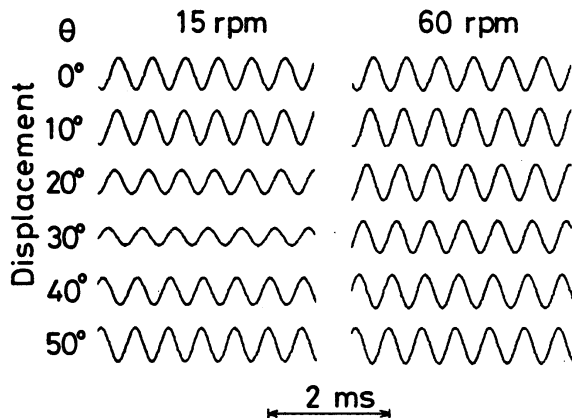


図13 計算による各位置における円板の振動変位

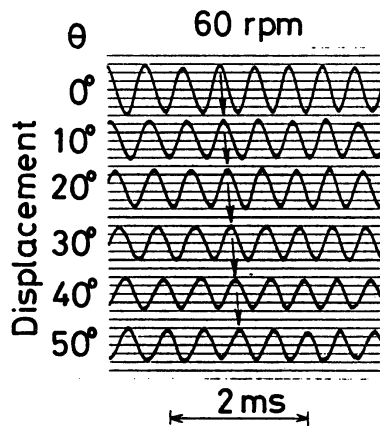


図14 各位置における円板の振動変位
(進行波が生じる実験結果、
はりの長さ 57.5 cm)

いる。しかし、理論解析では、進行波、後退波ともに安定解となるが、図9の実験では後退波のみ発生する。いずれの波が発生するかははりの振動によって決定される。⁽⁷⁾ 進行波が発生する例として、はりの長さが 57.5 cm の場合の円板の振動変位を図14に示しておく。

さらに、図9の 60 rpm における全体的な変位波形をみると、うなりを生じ円板の回転とともに振動モードが移動するところがある。これはわずかな不つりあい質量によるものと考えられる。

そこで、円板の一点 (r_1, φ_1) に不つりあい質量 m があるときを考える。

図12は 3 rpm, 60 rpm について、静止座標系 (r_0, θ) および回転座標系 (r_0, φ) における (4-0) モードの円板の振動変位を計算した結果を示す。なお、 θ と φ の間には $\theta = \varphi + \Omega t$ の関係がある。

3 rpm では回転座標系の w は 1/2 回転に 4 つの山をもち、静止座標系ではほぼ一定の振幅で、

円板は (4-0) モードの静止モードで振動している。高回転の 60 rpm では両座標系の振幅がほぼ一定の進行波あるいは後退波となる。図13は時間軸を拡大して、15 rpm, 60 rpm について、 $\Theta = -\pi/2$ のときの各位置における円板の振動変位を計算した結果を示す。15 rpm では静止モードと後退波が混在し、60 rpm では後退波となる。このように、

図9の実験結果と計算結果は一致して

式(24)と異なって、円板に固定された回転座標系 (r, φ) を用いる方が解析しやすい。円板の運動方程式は次のように表される。

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = [\mu(v_r) - \mu(V)] P_o \frac{1}{r} \delta(r - r_o) \delta(\varphi - \varphi_o) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{r} \delta(r - r_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \quad \dots\dots\dots (36)$$

円板上の任意の位置 (r, φ) の変位 w を次式のようにおく。

$$w(r, \varphi, t) = \sum_{n,s}^{\infty} R_{ns}(r) [A_{ns}(t) \sin n\varphi + B_{ns}(t) \cos n\varphi] \quad \dots\dots\dots (37)$$

円板とはりの接触点の φ の座標 φ_0 を $\varphi_0 = -\Omega t$ と表し、不つりあい質量の円板の φ の座標 φ_1 は、 $\varphi_1 = 0$ とする。すなわち、 $t=0$ のとき、不つりあい質量は接触点の位置にあることになる。式(37)を式(36)に代入し、ガラーキン法を用いると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{A}_{ns} + C \dot{A}_{ns} + \omega_{ns}^2 A_{ns} &= -\frac{R_{ns}(r_o)}{\rho h N_{ns1}} \sin n\Omega t P_o [\mu(v_r) - \mu(V)] \\ \ddot{B}_{ns} + \xi^2 C \dot{B}_{ns} + \xi^2 \omega_{ns}^2 B_{ns} &= \frac{\xi^2 R_{ns}(r_o)}{\rho h N_{ns2}} \cos n\Omega t P_o [\mu(v_r) - \mu(V)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\text{ここで, } \xi^2 = 1 \left/ \left(1 + \frac{m R_{ns}^2(r_1)}{\rho h N_{ns2}} \right) \right.$$

この場合も一つの $(n-s)$ モードのみ考え、漸近法によって解を求めることができる。 Ω が大きくなるとき、解は、式(27)のように変数をおきかえると、近似的に次式のように求められる。

$$w = R[a \sin n\varphi \sin \omega_0 t + b \cos n\varphi \sin \xi \omega_0 t] \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで、 $\Delta\omega = \omega_0 - \xi \omega_0$ とおき、 $\Delta\omega$ が大きくなければ $a \approx b$ となる。このとき、円板の静止座標系における w は、 $\varphi = \theta - \Omega t$ を用いて、次のように変形できる。

$$w = -R a \left\{ \sin \left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} + n\Omega \right) t - n\theta + \frac{\pi}{4} \right] \sin \left(\frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - n\Omega \right) t + n\theta + \frac{\pi}{4} \right] \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (40)$$

式(40)の第1項の振幅 $|\sin(\Delta\omega t/2 - \pi/4)|$ が大きいときには θ に対して進

行波が支配的になり、第2項の振幅 $|\cos(\Delta\omega t/2 - \pi/4)|$ が大きくなると後退波となる。第1項と第2項の振幅が等しいとき、空間に固定された静止モード定在波となる。

さらに、式(39)は次のようにも変形できる。

$$w = -Ra \left\{ \sin \left[\left(n\Omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - n\theta - \frac{\pi}{4} \right] \sin \left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t + \frac{\pi}{4} \right] + \cos \left[\left(n\Omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - n\theta + \frac{\pi}{4} \right] \cos \left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t + \frac{\pi}{4} \right] \right\} \dots\dots\dots (41)$$

式(41)の第1, 2項はそれぞれ、円板の1回転につき $2n + \Delta\omega/\Omega$ および $2n - \Delta\omega/\Omega$ ($n\Omega - \Delta\omega/2 > 0$) 個のうなりをもち、 θ につれてうなりの山や谷が進行することを示している。したがって、 $\Delta\omega$ が小さいと1回転に $2n$ 個のうなりをもつ回転モードで円板は振動する。

図15は、円板の円周面から1cm内側に重さ2gの不すりあい質量を取り付けて、60 rpmで(4-0)モードのきしり音を発生させたときの各位置における円板の振動変位(静止座標系)の測定結果を示している。円板とともに回転する不すりあい質量が接触点にきたとき、パルスが入るようになっている。パルスの位置を $t=0$ とする。図9の実験と異なって、一回だけきしり音を発生させているため、摩擦を停止したときから円板の変位は減衰している。振幅は変動してうなりを示し、このうなりの谷は図に矢印で示すように θ が 30° の間に約 $1/12$ s 進み、回転とともに振動モードが移動しているのがわかる。さらに、図15の時間軸を拡大した変位波形を示したのが図16である。なお、変位が減衰して小さいところでは振幅を拡大して示してある。この図から、摩擦初期の㊦点で、後退波であったものが㊤点から㊦点まで時間が経過するにつれ、静止モード定在波→進行波→静止モード定在波→後退波→静止モード定在波→進行波と繰り返されるようなきしり音が発生しているのがわかる。

図17は各位置における静止座標系 (r_0, θ) の円板の振動変位を計算した結果を示す。図18は時間軸を拡大した各位置における円板の振動変位を

示している。さらに、波形の合成の過程がわかるように、静止座標系の変位の各成分を表す式(40), (41)の第1項, 第2項をそれぞれ $\theta=0^\circ$ につ

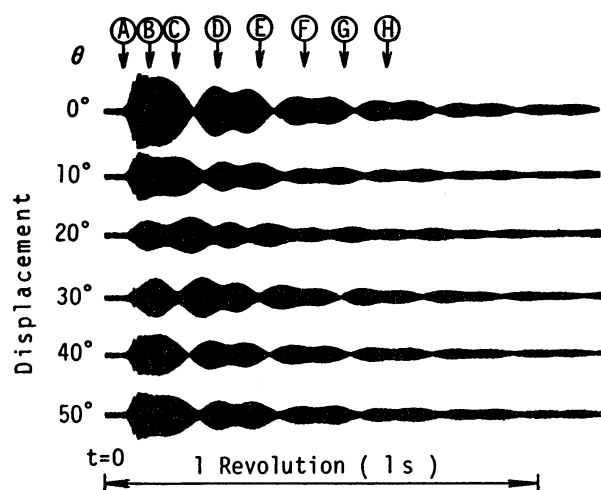


図15 各位置における円板の振動変位
(実験結果)

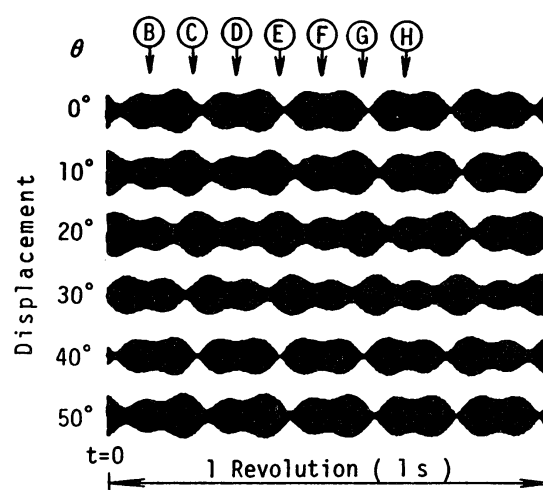


図17 静止座標系の円板の振動変位
(計算結果)

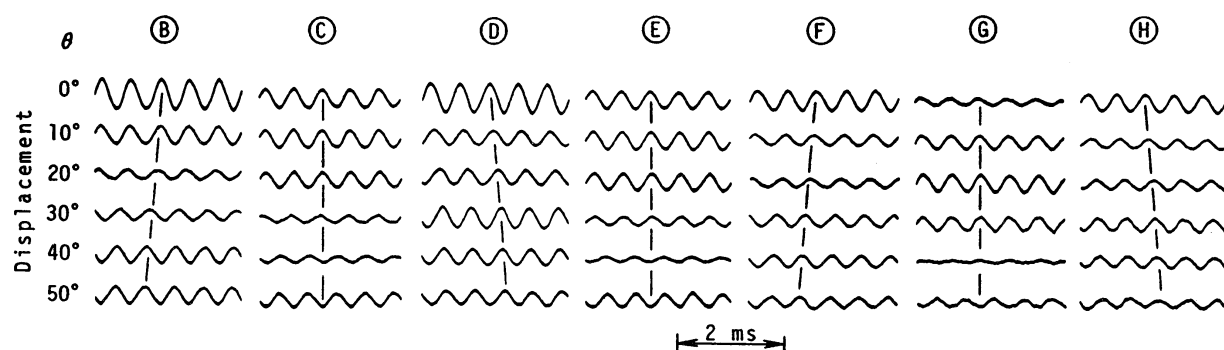


図16 各時間における微小変位計による円板の振動変位

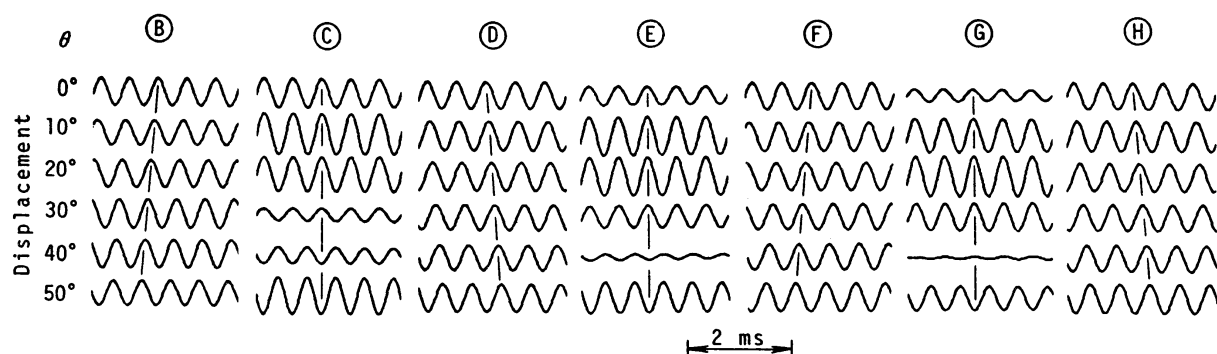


図18 各時間における静止座標系の円板の振動変位の計算結果

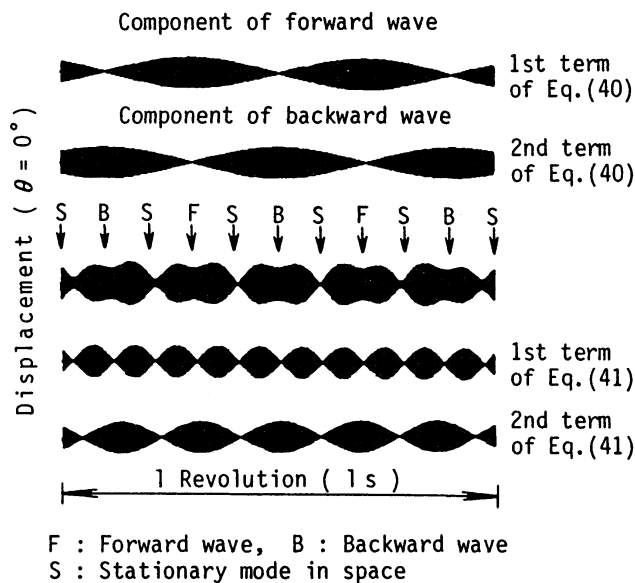


図19 静止座標系の変位波形の合成

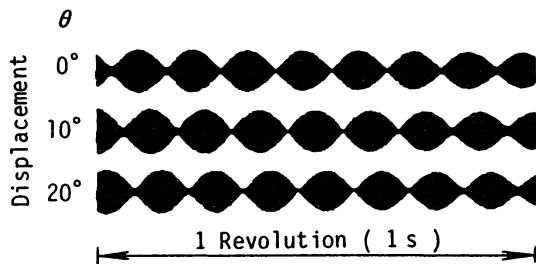


図20 計算による $\Delta\omega/2\pi=0.1$ Hzのときの静止座標系の振動変位

いて図19に示している。

図17,18と図19を比較すると式(40)の第1項が大きいところは進行波, 第2項が大きいところは後退波, 二つの項が等しいところでは静止モード定在波になっていることがよくわかる。また, $\theta=0^\circ$ における図17の変位波形のうなりは式(41)の第1, 2項のうなりに対応している。

これらの計算結果を図15, 16の実験結果と比較すると, 摩擦の初期を除いて, 変位の包絡線, および進行波・後退波・静止モード定在波が発生する時間が, それぞれ非常によく一致しているのがわかる。

最後に, 回転モードの計算例

を示す。図20は二つの振動数 ω_0 と $\xi\omega_0$ が発生する範囲で, $\Delta\omega$ が小さい場合, $\Delta\omega/2\pi=0.1$ Hzのときの静止座標系の変位を計算した結果を示す。

1回転に8つの山をもつ回転モードに近づく。しかし, $\Delta\omega$ が非常に小さくなると, すなわち ω_0 と $\xi\omega_0$ が接近すると, 二つの振動数間で相互引込み現象が現れ単一の振動数となり, 前述の後退波か進行波のきしり音が発生する。

4. 結 言

列車のきしり音の基礎的研究として車輪とレールを内径固定、外径自由の円板とはりにおきかえて、摩擦実験を行った。そのとき発生するきしり音を実験的・理論的に検討した結果、次のような結論が得られた。

(1) 円板の固有振動数間に内部共振関係がない場合には単一モードのきしり音が発生する。内部共振関係がある場合には、多重モードのきしり音が発生する。しかし、完全な内部共振関係がない限り、単一モードのきしり音が支配的である。

(2) 回転円板においては、低回転では空間に固定した静止モードの、高回転では後退波あるいは進行波のきしり音が、それぞれ発生する。不つりあい質量があると、円板の回転とともに振動モードが移動する、すなわち、円板に振動モードが固定した回転モードのきしり音が発生する場合がある。

さらに、レールに相当するはりの振動を考慮したり、相対速度が負になるときのステック・スリップ振動も考慮した非線形振動の解析が必要と思われる。

参考文献

- (1) 中井ほか, 機械学会論文集, 47-423 C(1981), 1466.
- (2) 中井ほか, 機械学会論文集, 50-455 C(1984), 1214.
- (3) 倉光ほか, 電子通信学会技術研究報告, NLP 76-8 (1976), 1.
- (4) 中井ほか, 機械学会論文集, 54-508 C(1988), 2875.
- (5) 末岡ほか, 機械学会論文集, 53-485 C(1987), 21
- (6) Nigh, G.H. and Olson, M.D., J. Sound Vib., 77-1(1981), 61
- (7) 中井ほか, 機械学会論文集, 56-532 C(1990), 3240