

集合の二項関係に基づくスカラー化関数の 計算アルゴリズムと数値実験

新潟大学・大学院自然科学研究科 于 慧 田中 環

1. はじめに

本研究では集合の二項関係に基づいたスカラー化関数に対する数値計算法を提案する。近年、集合に対するスカラー化関数の理論的な結果が数多く発表されたが ([7] とその参考文献参照), [15] を除き, 具体的に計算機で数値を求めるアルゴリズムは提案されていない。本研究では, [15] で考えられているように有限次元での凸多面体に対するスカラー化関数の数値計算アルゴリズムを紹介する。

2. 集合の二項関係に基づくスカラー化関数

実線形位相空間 X において, C を X の空でない凸錐とすると, X に前順序 $\leq_C$ (反射律と推移律を満たす二項関係) が定まる ($x, y \in X$ に対して $y - x \in C$ が成立するとき, $x \leq_C y$ と定義する)。さらに, X の空でない二つの集合 A と B の二項関係を以下のように定める ([9])。

定義 2.1 $\emptyset \neq A, B \subset X$ とする。

- (i) $A \leq_C^{(1)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A, \forall b \in B, a \leq_C b \iff A \subset \bigcap_{b \in B} (b - C);$
- (ii) $A \leq_C^{(2)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists a \in A \text{ s.t. } \forall b \in B, a \leq_C b \iff A \cap (\bigcap_{b \in B} (b - C)) \neq \emptyset;$
- (iii) $A \leq_C^{(3)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall b \in B, \exists a \in A \text{ s.t. } a \leq_C b \iff B \subset A + C;$
- (iv) $A \leq_C^{(4)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists b \in B \text{ s.t. } \forall a \in A, a \leq_C b \iff (\bigcap_{a \in A} (a + C)) \cap B \neq \emptyset;$
- (v) $A \leq_C^{(5)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in A, \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \subset B - C;$
- (vi) $A \leq_C^{(6)} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists a \in A, \exists b \in B \text{ s.t. } a \leq_C b \iff A \cap (B - C) \neq \emptyset.$

命題 2.1 $\emptyset \neq A, B \subset X$ に対して, 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} A \leq_C^{(1)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(1)} A; & A \leq_C^{(2)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(4)} A; \\ A \leq_C^{(3)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(5)} A; & A \leq_C^{(4)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(2)} A; \\ A \leq_C^{(5)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(3)} A; & A \leq_C^{(6)} B &\text{ iff } B \leq_{-C}^{(6)} A. \end{aligned}$$

上の二項関係に基づいたスカラー化関数を次のように定める ([11])。

定義 2.2 $\emptyset \neq A, V \subset X$ とし, $C \neq X$ で $k \in \text{int } C$ とする。各 $j = 1, \dots, 6$ に対して,

$$I_{k,V}^{(j)}(A) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid A \leq_C^{(j)} (tk + V) \right\}.$$

このスカラー化関数は [8] で導入された (集合に対する) スカラー化関数の一般化になっているが, 元々 [4, 5] で導入された劣線形関数をヒントに作られている。

3. 集合の二項関係に基づくスカラー化関数の変形

この節では, 定義 2.2 のスカラー化関数をベクトル指向の表現に変形する。

命題 3.1 スカラー化関数を以下のように変形できる。

- (i) $I_{k,V}^{(1)}(A) = \sup_{a \in A} \sup_{v \in V} \inf \{ t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk \};$
- (ii) $I_{k,V}^{(2)}(A) = \inf_{a \in A} \sup_{v \in V} \inf \{ t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk \};$

- (iii) $I_{k,V}^{(3)}(A) = \sup_{v \in V} \inf_{a \in A} \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\};$
- (iv) $I_{k,V}^{(4)}(A) = \inf_{v \in V} \sup_{a \in A} \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\};$
- (v) $I_{k,V}^{(5)}(A) = \sup_{a \in A} \inf_{v \in V} \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\};$
- (vi) $I_{k,V}^{(6)}(A) = \inf_{a \in A} \inf_{v \in V} \{t \in \mathbb{R} \mid a \leq_C v + tk\}.$

この命題を使って、与えられた集合 A に対する $I_{k,V}^{(j)}(A)$ ($j = 1, \dots, 6$) の値を計算機で計算する方法を提案する。

4. スカラー化関数の計算アルゴリズムと数値実験

計算機で取扱いのできるように、対象となる空間 X をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ として、その部分集合である凸多面体 $A = \text{co} \{a_1, \dots, a_\alpha\}$ に対する、参照集合 $V = \text{co} \{v_1, \dots, v_\beta\}$ によるスカラー化関数の計算アルゴリズムを考える。ここで、 $\text{co} \{a_1, \dots, a_\alpha\}$ はベクトル $a_1, \dots, a_\alpha$ の凸包を表している。また、順序錐 C を（非負象限 $\mathbb{R}_+^n$ より）一般化して、 $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta^n\} (m \geq n)$ を用いて、

$$C := \bigcap_{i=1}^m \{x \in X \mid \langle p_i, x \rangle \geq 0\}$$

とすると、 C は閉凸錐となり、 $k \in \text{int } C$ を仮定することで、 $\langle p_i, k \rangle > 0$ ($i = 1, \dots, m$) となる。

命題 4.1 ([1] の Proposition 1.44 と Corollary 1.45 参照) $k \in \text{int } C$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ。

$$\inf \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq_C tk\} = \max_{i=1, \dots, m} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, x \right\rangle.$$

$a \in A$ と $v \in V$ に対して、命題 4.1 の x を $a - v$ に置き換えることにより、命題 3.1 の 6 つのスカラー化関数計算手法を与えることができる。

定理 4.1 $k \in \text{int } C$ とし、任意の $q \in \mathbb{N}$ に対して、 $I(q) := \{1, \dots, q\}$,

$$M^q := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{r=1}^q \lambda_r = 1, \lambda_r \geq 0 \text{ for } r \in I(q) \right\}$$

とおくと、次が成り立つ。

- (i) $I_{k,V}^{(1)}(A) = \max_{s \in I(\alpha)} \max_{j \in I(\beta)} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, a_s - v_j \right\rangle;$
- (ii) $I_{k,V}^{(2)}(A) = \min_{\lambda \in M^\alpha} \max_{j \in I(\beta)} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_j \right\rangle;$
- (iii) $I_{k,V}^{(3)}(A) = \max_{j \in I(\beta)} \min_{\lambda \in M^\alpha} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_j \right\rangle;$
- (iv) $I_{k,V}^{(4)}(A) = \min_{\mu \in M^\beta} \max_{s \in I(\alpha)} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, a_s - \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j v_j \right\rangle;$
- (v) $I_{k,V}^{(5)}(A) = \max_{s \in I(\alpha)} \min_{\mu \in M^\beta} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, a_s - \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j v_j \right\rangle;$
- (vi) $I_{k,V}^{(6)}(A) = \min_{\lambda \in M^\alpha} \min_{\mu \in M^\beta} \max_{i \in I(m)} \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j v_j \right\rangle.$

この定理より高々 $\alpha \times \beta \times m$ 個の実数の最大値を求めることで、 $I_{k,V}^{(1)}(A)$ を計算できる。その一方、 $I_{k,V}^{(2)}(A), \dots, I_{k,V}^{(6)}(A)$ は凸結合の形を含んでいるために、線形計画問題を解く必要がある。

$I_{k,V}^{(2)}(A)$ の値の計算については、次の $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha)$ に関する線形計画問題を解くことで、値が求められる。

$$(LP(2)):$$

Minimize $t \in \mathbb{R}$ subject to $t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_j \right\rangle$, for all $i \in I(m)$, $j \in I(\beta)$, $\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1$, $\lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha)$.

さらに、上記の問題は次のように変形できる。

Min $t \in \mathbb{R}$ s.t. $\min_{j \in I(\beta)} \langle p_1, v_j \rangle \geq \langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle$, $\vdots$ $\min_{j \in I(\beta)} \langle p_m, v_j \rangle \geq \langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle$, $\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1$, $\lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha)$.

次の $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_\alpha)$ に関する線形計画問題 LP(3-1), LP(3-2), $\dots$, LP(3- β) を解いて、 β 個の値の最大値として、 $I_{k,V}^{(3)}(A)$ の値が求められる。

$$(LP(3-1)):$$

Min $t \in \mathbb{R}$ s.t. $t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_1 \right\rangle$, for all $i \in I(m)$, $\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1$, $\lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha)$.

$\vdots$

$$(LP(3-\beta)):$$

Min $t \in \mathbb{R}$ s.t. $t \geq \left\langle \frac{p_i}{\langle p_i, k \rangle}, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - v_\beta \right\rangle$, for all $i \in I(m)$, $\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1$, $\lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha)$.

さらに、上記の問題は次のように変形できる。

$$\begin{array}{l}
 \text{Min} \quad t \in \mathbb{R} \\
 \text{s.t.} \quad \langle p_1, v_1 \rangle \geq \langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \text{(LP(3-1))} \quad \langle p_m, v_1 \rangle \geq \langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
 \quad \quad \quad \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
 \quad \quad \quad \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha).
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 \text{Min} \quad t \in \mathbb{R} \\
 \text{s.t.} \quad \langle p_1, v_{\beta} \rangle \geq \langle p_1, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \text{(LP(3-}\beta\text{))} \quad \langle p_m, v_{\beta} \rangle \geq \langle p_m, \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s a_s - tk \rangle, \\
 \quad \quad \quad \sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s = 1, \\
 \quad \quad \quad \lambda_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, \alpha).
 \end{array}$$

同様にして、 $I_{k,V}^{(4)}(A), \dots, I_{k,V}^{(6)}(A)$ の値も求められる。

新潟大学の Cloud Education System(仮想 Linux OS コンピューター, 4GB~218GB Memory, 10GB Harddisk) を用いて、上記のアルゴリズムに対する数値実験を行った。

例 4.1 以下の 3 次元と 5 次元計算例に対して、C 言語を用いて、数値実験をした。

3 次元の計算例：

$$\begin{array}{l}
 A = \text{co} \{a_1, \dots, a_6\}, \\
 a_1 = (0.2, 0, 1.6), a_2 = (1, 0, 0), a_3 = (0, 1, 1), a_4 = (0, 2, 0), a_5 = (0, 0, 1.666667), a_6 = (0, 0, 0); \\
 V = \text{co} \{v_1, \dots, v_6\}, \\
 v_1 = (2.5, 1.5, 0), v_2 = (1, 0, 1.5), v_3 = (2.5, 0, 0), v_4 = (0, 4, 0), v_5 = (0, 0, 2), v_6 = (0, 0, 0); \\
 C = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x \rangle \geq 0\}, \\
 p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0), p_3 = (0, 0, 1); \\
 k = (1, 2, 3).
 \end{array}$$

計算結果は以下の通りである。

$$\begin{array}{l}
 I_{k,V}^{(1)}(A) \text{ の値 : } 1.000000, \\
 I_{k,V}^{(2)}(A) \text{ の値 : } -0.000000, \\
 I_{k,V}^{(3)}(A) \text{ の値 : } 0.000000, \\
 I_{k,V}^{(4)}(A) \text{ の値 : } 0.259259, \\
 I_{k,V}^{(5)}(A) \text{ の値 : } -0.06667, \\
 I_{k,V}^{(6)}(A) \text{ の値 : } -0.444444,
 \end{array}$$

計算にかかった時間：0.000111s.

5次元の計算例：

$$\begin{aligned}
 A &= \text{co} \{a_1, \dots, a_6\} \\
 a_1 &= (0.2, 0, 1.6, 1, 0); \quad a_2 = (1, 0, 0, 1, 3); \quad a_3 = (0, 1, 1, 2, 2); \\
 a_4 &= (0, 2, 0, 0, 1); \quad a_5 = (0, 0, 1.666667, 1.3, 0); \quad a_6 = (0, 0, 0, 1, 2); \\
 V &= \text{co} \{v_1, \dots, v_6\} \\
 v_1 &= (2.5, 1.5, 0, 1, 0); \quad v_2 = (1, 0, 1.5, 1, 0); \quad v_3 = (2.5, 0, 0, 0.1, 2); \\
 v_4 &= (0, 4, 0, 1, 0.5); \quad v_5 = (0, 0, 2, 0.3, 0.4); \quad v_6 = (0, 0, 0, 0.1, 0.5); \\
 C &= \bigcap_{i=1}^5 \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle p_i, x \rangle \geq 0\} \\
 p_1 &= (1, 0, 0, 0, 0); \quad p_2 = (0, 1, 0, 0, 0); \quad p_3 = (0, 0, 1, 0, 0); \\
 p_4 &= (0, 0, 0, 1, 0); \quad p_5 = (0, 0, 0, 0, 1); \\
 k &= (1, 2, 3, 4, 5).
 \end{aligned}$$

計算結果は以下の通りである。

$I_{k,V}^{(1)}(A)$ の値：1.000000,

$I_{k,V}^{(2)}(A)$ の値：0.205128,

$I_{k,V}^{(3)}(A)$ の値：0.180000,

$I_{k,V}^{(4)}(A)$ の値：0.383262,

$I_{k,V}^{(5)}(A)$ の値：0.276316,

$I_{k,V}^{(6)}(A)$ の値：-0.048252,

計算にかかった時間：0.000138s.

5. おわりに

これらは、[15]で提案された、4つのスカラー化関数の数値計算法の一般化であり、本研究で紹介した6種類のinf型スカラー化関数に加えてsup型も考慮し、 $V = \{\theta\}$, $C = \mathbb{R}_+^n$ ($p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ を基本ベクトル) とすることで、[15]で取り扱った4つのスカラー化関数が導き出せる。

参考文献

- [1] G.-y. Chen, X. Huang, and X. Yang, *Vector optimization: Set-valued and variational analysis*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 541, Springer, Berlin, 2005.
- [2] P. Gr. Georgiev and T. Tanaka, *Vector-valued set-valued variants of Ky Fan's inequality*, J. Nonlinear Convex Anal., **1**(3), 245–254, 2000.
- [3] P. Gr. Georgiev and T. Tanaka, *Fan's inequality for set-valued maps*, Nonlinear Anal., **47**(1), 607–618, 2001.
- [4] C. Gerstewitz (C. Tammer), *Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung*, Wiss. Z. Tech. Hochsch. Leuna-Merseburg **25**(3), 357–364, 1983.
- [5] C. Gerstewitz (C. Tammer) and E. Iwanow, *Duality for nonconvex vector optimization problems*, Workshop on vector optimization (Plaue, 1984). Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau **31**(2), 61–81, 1985.

- [6] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, and C. Zălinescu, *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [7] A. H. Hamel, F. Heyde, A. Löhne, B. Rudloff, and C. Schrage, *Set Optimization and Applications – The State of the Art*, Springer Proc. Math. Stat., 151, Springer, Heidelberg, 2015.
- [8] A. H. Hamel and A. Löhne, *Minimal element theorems and Ekeland’s principle with set relations*, J. Nonlinear Convex Anal., **7**(1), 19–37, 2006.
- [9] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal., **30**(3), 1487–1496, 1997.
- [10] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing functions for set-valued maps*, in Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, S. Akashi, W. Takahashi, and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 193–204, 2009.
- [11] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, J. Nonlinear Convex Anal., **11**(3), 513–525, 2010.
- [12] D. T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [13] S. Nishizawa and T. Tanaka, *On inherited properties for set-valued maps and existence theorems for generalized vector equilibrium problems*, J. Nonlinear Convex Anal., **5**(2), 187–197, 2004.
- [14] Y. Ogata, Y. Saito, T. Tanaka, and S. Yamada, *Sublinear scalarization methods for sets with respect to set-relations*, Linear and Nonlinear Analysis, **3**(1), 121–132, 2017.
- [15] Y. Sonda, T. Tanaka, and S. Yamada, *Computational methods on scalarizing functions for sets in a vector space*, Session ID: B3–5 in “Proceedings of the Japan Joint Automatic Control Conference,” The Japan Joint Automatic Control Conference, Kyoto (Japan), 2010. DOI: 10.11511/jacc.52.0.137.0.