

Langlands duality for the Hitchin system and 3-manifolds

金城 翼

概要

三次元多様体のラングランズ対応の近年の進展について解説する。また三次元多様体のラングランズ対応とヒッチン系の位相的ミラー対称性の関係についても議論する。

1 はじめに

「結び目と素数」に代表されるように、三次元多様体のトポロジーと整数論の間には不思議な類似関係がある。したがって、三次元多様体に対してもラングランズ現象が期待される。この期待は非常に自然であるが、三次元多様体のラングランズ対応の厳密な数学的定式化が与えられたのは近年になってからである^{*1}。このテーマは数学的にも非常に豊かで取り組むべき問題も数多くあるが、現在アクティブに研究を行っているのはほんの数名程度であり、もっと多くの研究者に参入して欲しいと思っている。この記事をつきかけに幅広い分野の数学者 (特に学部生や大学院生) にこのテーマに興味を持ってもらえると幸いである。

2 ドナルドソン・トーマス理論の歴史

三次元多様体のラングランズ対応の定式化には位相的ドナルドソン・トーマス理論を用いる。ここで簡単にドナルドソン・トーマス理論の歴史について解説しよう。数学的な内容のみに興味がある読者は §4 まで読み飛ばすのをお勧めする。

2.1 ドナルドソン・トーマス理論の誕生

ドナルドソン・トーマス (DT) 理論は 1997 年頃に Richard Thomas の博士論文 [Tho00] で導入された理論であり、三次元カラビ・ヤウ多様体上の接続層の数え上げ不変量を研究する。元々の Thomas の動機は実三次元多様体上の G -局所系を数えるキャッソン不変量 (ここで G はコンパクトリー群) の複素類似を導入することであり、そのため DT 理論は当初「正則キャッソン理論」と呼ばれていた。DT 理論は当初そこまで大きな注目を集めていなかったようであるが、2003 年の Maulik–Nekrasov–Okounkov–Pandharipande (MNOP) の論文 [Mau+06a; Mau+06b] によって一次元閉部分スキームのイデアル層を数える DT 不変量とグロモフ・ウィッテン (GW) 不変量との等価性が予想されたことをきっかけに、数え上げ幾何学における中心的な研究テーマの一つに成長した。MNOP 以降はキャッソン理論の複素類似という側面はあまり注目されなくなり、曲線の数え上げ理論としての側面の方が主要なテーマになった。

^{*1} 後に補足 6.2 で詳しく説明するように、generic な量子パラメータでは定式化が与えられているが、一般の量子パラメータでの定式化は未だ与えられていない。また generic な量子パラメータでの三次元多様体のラングランズ対応の定式化もスケイン加群を用いたものなどいくつか存在するが、ここでは位相的ドナルドソン・トーマス理論を用いたものを指している。

2.2 コホモロジー的ドナルドソン・トーマス理論

その後、2005 年に Behrend によって DT 不変量には超局所層理論的な解釈が存在するという驚きの結果が証明される [Beh09]。この結果は DT 不変量に層理論的な圏化が存在することを示唆するものであり、2008 年から 2013 年にかけて Kontsevich–Soibelman, Brav–Bussi–Joyce らによって実際にそのような圏化が存在することが証明された [KS10; Ben+15; Bra+15; BBJ19]。これは DT 理論と GW 理論の決定的な違いを明らかにするものであり、また DT 理論と表現論のコネクションを与えるものである。DT 不変量の圏化の存在はキャッソン不変量にインスタントフレアホモロジーと呼ばれる圏化が存在するという事実と整合する。DT 不変量の層理論的な圏化を研究する分野は現在**コホモロジー的 DT 理論** (CoDT 理論) と呼ばれている。

2.3 実三次元多様体の位相的ドナルドソン・トーマス理論

DT 理論は実三次元多様体のキャッソン理論に動機づけられていることを述べたが、逆に DT 理論を実三次元多様体の研究に応用しようというムーブメントが近年起きつつある。上で述べた Brav–Bussi–Joyce らによる DT 不変量の圏化の構成は Pantev–Toën–Vaquie–Vezzosi [Pan+13] により導入された導来シンプレクティック幾何学を用いるものであり、より一般に「 (-1) -シフトシンプレクティック構造」と呼ばれる構造を備えたスタックに対して定義される。三次元カラビ・ヤウ多様体の接続層のモジュライ空間はそのような幾何構造を持つが^{*2}、実三次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ -局所系のモジュライ空間 (ここで $G_{\mathbb{C}}$ は複素簡約代数群) も (-1) -シフトシンプレクティック構造を持つことが知られている。したがって実三次元多様体上の $G_{\mathbb{C}}$ -局所系を数える DT 不変量とその圏化を考えることができ、これはキャッソン不変量とインスタントフレアホモロジーの複素リー群版と見なすべきものである。この不変量の研究を**位相的 DT 理論**と呼ぶ^{*3}。

このような不変量が定義できることは Brav–Bussi–Joyce らの 2013 年の研究から明らかであり、また関連して 2017 年の微分幾何学者 Abouzaid–Manolescu の研究 [AM20] もあるが、当時はあまり注目されていなかったようである。その一つの理由は、この不変量を使ってどのような面白い研究が行えるかがあまり想像できなかったということがあったのだと思う。2021 年の研究集会 String-Math で Safronov [Saf21] がコホモロジー的 DT 不変量を用いた実三次元多様体のラングランズ対応予想の定式化を与えたことで位相的 DT 理論は進むべき方向性が見つかり、特に 2024 年に入ってから急速に進展している。位相的 DT 理論は現在発展途上の段階にあるが、今後量子トポロジーや数論と結びついて大きな分野に進化することが期待されている。

3 数え上げ幾何学について

DT 理論が数え上げ幾何学における理論の一つであることを述べたが、読者の多くは数え上げではない代数幾何学を専攻していると思われるので、ここで数え上げ幾何学がどういった分野であるか簡単に説明しよう。数え上げ幾何学と一口にいってもさまざまな研究の方向性があるため、偏った視点になっている可能性があることをご容赦いただきたい。

まず「数え上げ幾何学」という分野自体は、例えば 27 本の直線の話のように幾何学的対象を数え上げることを目的として始まった分野である。しかし、現代の数え上げ幾何学者の多くは実際に何かを数え上げるとい

^{*2} この結果は向井による $K3$ 曲面上の接続層のモジュライ空間がシンプレクティック構造を持つという結果の三次元カラビ・ヤウ多様体版である。

^{*3} この用語はまだ定着していないが、今後積極的に使って普及させる予定である。

うことをしていないのではないかと思う。私の研究でも何かを数え上げることはめったになく、それどころか具体的な数字を扱うことも稀である。では何をしているのかというと、モジュライ空間、すなわち数学的対象をパラメトライズする空間の不変量の研究を行なっている。代数多様体のオイラー数は数え上げ測度の一般化であり、そのためモジュライ空間のオイラー数を計算することは数え上げるという行為の一般化であると解釈できる。より一般に、オイラー数以外の不変量をモジュライ空間に対して考えることもでき、現代の「数え上げ幾何学」という言葉が指すものはモジュライ空間の (大域的な) 不変量の研究の総称であると考えて良いであろう。

数え上げ幾何学の研究は段階に応じて以下の三つに分類される:

1. 数え上げ不変量の構成
2. 数え上げ不変量の計算や性質の研究
3. 数え上げ不変量の応用

一つ目の「数え上げ不変量の構成」の研究にはさまざまなものがあるが、最も重要なものは 1990 年代の Kontsevich や Behrend–Fantechi による仮想基本類の研究 [Kon95; BF97] である。数え上げ幾何学の中心的なテーマである GW 不変量や DT 不変量はいずれも仮想基本類上の積分として定義される。近年は 2011 年に Pantev–Toën–Vaquié–Vezzosi [Pan+13] によって導入された導来シンプレクティック幾何学を用いた新しい不変量の研究が盛んに行われており、前述のコホモロジー的 DT 不変量や四次元カラビ・ヤウ多様体の DT 不変量 [BJ17; OT23] などが重要な例である。

二つ目の「数え上げ不変量の計算や性質の研究」は数え上げ幾何学における最重要課題であり、数え上げ幾何学の多くの研究はこれに関するものである。モジュライ空間には分類する対象の対称性や構造を反映するような豊かな幾何学的性質・構造があり、対応してモジュライ空間の不変量も非常に興味深い性質を持つことが多い。例えば三次元カラビ・ヤウ多様体の GW 不変量と DT 不変量の等価性を主張する GW/DT 予想 [Mau+06a; Mau+06b] (これは最近 Pardon [Par23] によって証明された)、三次元カラビ・ヤウ多様体の一次元部分スキームを数える DT 不変量がマクマホン関数と有理関数の積になることを主張する戸田–Bridgeland の有理性定理 [Tod10; Bri11] がある。

三つ目の「数え上げ幾何学の応用」に関してはまだ例が少ないが、大別して代数幾何への応用と表現論への応用がある。代数幾何への応用には例えば最近話題になっている Katzarkov–Kontsevich–Pantev–Yu による GW 不変量の代数多様体の非有理性への応用 [Kat+25] がある。その他に Hotchkiss–Perry による DT 理論を用いた三次元アーベル多様体に対する周期-インデックス予想の解決 [HP24] や、Bae–Kool–Park による四次元の DT 理論を用いたホッジ予想へのアプローチ [BKP22] などがある。表現論への応用の多くはコホモロジー的 DT 理論に関係するものである。顕著な例として、Davison による量子クラスター代数の正值性予想の解決 [Dav18] がある。

4 導来シンプレクティック幾何学

この節ではコホモロジー的 DT 不変量を定義する上で重要な役割を果たす導来シンプレクティック幾何学について説明する。この節の内容はこの記事を読み進める上では重要ではないので、§4.7 にまとめられている例だけを読んで次の節に移るのをお勧めする。この節以降基礎体は複素数体とする。

4.1 導来スキーム

ここでは導来代数幾何学について簡単に解説する。導来代数幾何学は難解な理論であると思われる印象があるが、スキームと導来スキームの関係は被約スキームとスキームの関係と全く同様であり、(位相)空間レベルでは違いはないが考える関数に差があるだけである。導来代数幾何学の基礎をちゃんと勉強しようとする^{*}と無限圏論がそれなりに必要になるので大変であるが、雰囲気掴むだけならそこまで難しくないのではない^{*}かと思う。

従来のスキーム論は可換環論をベースにした幾何学であったが、導来代数幾何学は微分次数付き代数と呼ばれる可換環の一般化に基づく幾何学である。**微分次数付き代数**は以下のように次数付けと次数 1 の微分の構造が与えられた代数である：

$$A^\bullet = [\cdots \xrightarrow{d} A^{-2} \xrightarrow{d} A^{-1} \xrightarrow{d} A^0].$$

微分には条件 $d^2 = 0$ およびライプニッツ則 $d(a_i \cdot b_j) = (da_i) \cdot b_j + (-1)^i a_i \cdot (db_j)$ が課されている。一般の可換環は自明な次数付けと自明な微分を与えることで微分次数付き代数と見なすことができる。逆に、微分次数付き代数 $A^\bullet$ が与えられたとき、0 次のコホモロジー $H^0(A^\bullet)$ を取ることで可換環が得られる：

$$\{A : \text{可換環}\} \xrightleftharpoons[\text{H}^0(-)]{\text{埋め込み}} \{A^\bullet : \text{微分次数付き代数}\}.$$

可換環の場合と同様に、微分次数付き代数 $A^\bullet$ に対して位相空間とその上の微分次数付き代数の層^{*4}を定義することができる。位相空間は $H^0(A^\bullet)$ に付随するアフィンススキームの底空間であり、微分次数付き代数の層は大域切断が元の $A^\bullet$ になるように局所化を用いて定義される。この空間と微分次数付き代数の層の組を $\text{Spec } A^\bullet$ と書き、 $A^\bullet$ に付随する**導来アフィンススキーム**と呼ぶ。**導来スキーム**は微分次数付き代数の層であって、局所的に導来アフィンススキームと同型になっているものとして定義される。スキームは自然に導来スキームと見なすことができ、逆に導来スキームに対して微分次数付き代数の層の 0 次のコホモロジー層をとることで同じ底空間を持つスキームが構成される。

$$\{(X, \mathcal{O}_X) : \text{スキーム}\} \xrightleftharpoons[\text{H}^0(-)]{\text{埋め込み}} \{(X, \mathcal{O}_X^\bullet) : \text{導来スキーム}\}.$$

従って、導来スキームの構造は、スキームの構造に“高次の非被約性”の情報を付け加えたものと見なすことができる。

4.2 余接複体

スキーム論におけるほとんどの概念は導来代数幾何学における一般化がある。その中でも最も重要なものが余接層の一般化である余接複体である。導来スキーム X に対し、その**余接複体** $\mathbb{L}_X$ は準連接層の導来圏の対象として定義される：

$$\mathbb{L}_X \in \text{D}_{\text{qc}}(X).$$

ここでは余接複体の定義の詳細は述べないが、接ベクトルと $\text{Spec } k[t]/t^2$ からの射の同一視をより一般の(微分次数付き代数の)square-zero extension に対して拡張することで定義が与えられる。余接複体は X に付随す

^{*4} ここでは通常の意味の層ではなく、無限圏論的な層を考える必要がある。微分次数付き代数は同型ではなく擬同型をもって同一視する必要があるからである。この圏論的な困難こそが、導来代数幾何学が 2000 年代に入るまで発展しなかった主な理由である。

るスキーム X_{cl} の余接層の精密化を与えるものである:

$$H^0(\mathbb{L}_X) \cong \Omega_{X_{\text{cl}}}.$$

4.3 仮想基本類

導来代数幾何学の誕生のきっかけの一つになった仮想基本類について解説する。導来スキーム X が擬順滑であるとは、各点 $x \in X$ に対し、余接複体のコホモロジーの消滅

$$H^i(\mathbb{L}_X|_x) = 0, \quad (i \leq -2)$$

が成立することである。上の条件を $i \leq -1$ に強めると、 X は (非導来) スタックになり、さらに滑らかになることがわかる。(非導来) スタックが擬順滑であることは局所完全交叉であることと等価である。

例 4.1. $U = \text{Spec } A$ を滑らかなアフィンスキーム、 E を U 上のベクトル束、 $s \in \Gamma(U, E)$ を切断とする。 E に対応する射影的 A 加群も E と書き、Koszul 複体を考える:

$$A^\bullet(s) := [\cdots \xrightarrow{\cdot s} \wedge^2 E^\vee \xrightarrow{\cdot s} E^\vee \xrightarrow{\cdot s} A].$$

このとき $A^\bullet(s)$ は微分次数付き代数になっていることがわかる。 $A^\bullet(s)$ に対応する導来アフィンスキームを $Z(s)$ と書き、 s の導来零集合と呼ぶ。 $A^\bullet(s)$ の 0 次コホモロジーと s の (古典的な意味での) 零集合の関数環が一致することから、 $Z(s)$ に付随する古典的なスキームは s の古典的零集合になっていることがわかる。

簡単な計算で $Z(s)$ は擬順滑であることがわかる。逆に、一般の擬順滑導来スキームは局所的に $Z(s)$ の形で書けることが知られている [BBJ19, Theorem 4.1]。

いま X を擬順滑導来スキームとする。このとき、Behrend–Fantechi [BF97] は X の**仮想基本類**と呼ばれる不変量

$$[X]_{\text{vir}} \in \text{CH}_{\text{vdim } X}(X)$$

を導入した。ここで $\text{vdim } X := \text{rank } \mathbb{L}_X$ は仮想次元であり、導来スキームのチャウ群は付随する古典的スキームのチャウ群として定義される。導来零切断の仮想基本類は局所化されたオイラー類で与えられる:

$$[Z(s)]_{\text{vir}} = e_{Z(s)}(E).$$

言い換えると、仮想基本類は局所化されたオイラー類の貼り合わせと見なすことができる量である。

数え上げ幾何学で現れる多くの不変量は仮想基本類とコホモロジー類のペアリングとして定義され、例えば GW 不変量や DT 不変量の定義はそうである。また、他の数え上げ不変量もそのほとんどが仮想基本類と密接に関わる量を通して定義される。

4.4 スタック

スタックは導来スキームと別方向のスキームの一般化であり、可換環の圏からグルーポイドのなす 2-圏への 2-関手であって、ある種の層条件を満たすものとして定義される。このような空間概念を考える利点は、自己同型の情報も含めて空間として扱える点にある。モジュライ空間の不変量を考える際には自己同型の情報も加味して考えることが自然であり、そのため数え上げ幾何学ではスタックが重要な役割を果たす。

重要なスタックの例として商スタックがある。群スキーム G のスキーム X への作用に対して、商スタック $[X/G]$ を定義することができる。商スタック $[X/G]$ は X の各点での安定化群の情報を残しており、自然な同型

$$G \times X \cong X \times_{[X/G]} X$$

が成立する。これは商スタックが常に自由作用での商のように振る舞うことを意味している。

4.5 導来スタック

スタックにも導来代数幾何学版が存在する。**導来スタック**は微分次数付き代数のなす無限圏からホモトピー型のなす無限圏への関手であって、ある種の層条件を満たすものとして定義される。この記事で現れるスタックはいずれも「導来アルティンスタック」と呼ばれるものであり、このクラスの導来スタックは付随する (古典的な) スタックを持つ。従って、導来アルティンスタックはスタックに“高次の非被約性”の情報を付け加えたものであると見なすことができる。導来アルティンスタック $\mathcal{X}$ に対しても余接複体 $\mathbb{L}_{\mathcal{X}}$ が定義される。

4.6 導来シンプレクティック構造

導来代数幾何学におけるシンプレクティック構造の理論は整数 n ごとに存在し、 $n = 0$ の場合が古典的なシンプレクティック構造に対応する。 n の取り方によって全く異なる理論になっており、本記事で最も重要なのは $n = -1$ の場合である。

古典的なシンプレクティック構造は、多様体 M 上の閉二形式 $\omega \in \Gamma(M, \wedge^2 M)$ であって非退化なもの、すなわち縮退

$$\cdot\omega_M: T_M \rightarrow \Omega_M$$

が同型なものとして定義されるのであった。導来アルティンスタック X 上の n -シフトシンプレクティック構造は n -シフト閉二形式 ω_X であって縮退

$$\cdot\omega_X: \mathbb{L}_X^\vee \rightarrow \mathbb{L}_X[n]$$

が擬同値なものとして定義される。ここでは n -シフト閉二形式の定義は述べないが、 n -シフト二形式は単に $\Gamma(X, \wedge^2 \mathbb{L}_X[n])$ の切断として定義される。古典的な文脈では閉性は性質であったが、導来代数幾何学においては閉構造と呼ばれる構造になることを注意しておく。詳しくは [Pan+13] を見よ。

4.7 導来シンプレクティックスタックの例

ここではいくつかの重要な導来シンプレクティックスタックの例について、 $n = -1$ の場合を中心に述べる。

例 4.2. Y を三次元カラビ・ヤウ多様体とし、 $\mathcal{M}_Y$ を Y 上のコンパクト台を持つ接続層のなす導来モジュライスタックとする。このとき、 $\mathcal{M}_Y$ は (-1) -シフトシンプレクティックである。シンプレクティック構造は各点 $[E] \in \mathcal{M}_Y$ ではセール双対により与えられる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_{\mathcal{M}_Y}^\vee|_{[E]} & \xrightarrow{\cdot\omega_{\mathcal{M}_Y}} & \mathbb{L}_{\mathcal{M}_Y}[-1]|_{[E]} \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \mathrm{RHom}(E, E)[1] & \xrightarrow{\text{セール双対}} & \mathrm{RHom}(E, E)^\vee[-2]. \end{array}$$

例 4.3. M を向きづけられた閉実三次元多様体とし、 G を簡約代数群とする (例えば $G = \mathrm{GL}_n, \mathrm{Sp}_{2n}, \mathrm{SO}_n$ など)。このとき、 M 上の G 局所系 (すなわち $\pi_1(M)$ の G -表現) のなす導来モジュライスタック $\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)$ は (-1) -シフトシンプレクティックである。このシンプレクティック構造は各点 $[E] \in \mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)$ ではポアンカレ双対により与えられる:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}_{\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)}^\vee|_{[E]} & \xrightarrow{\cdot \omega_{\mathcal{M}_Y}} & \mathbb{L}_{\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)}[-1]|_{[E]} \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ H^*(M, \mathrm{Ad}(E))[1] & \xrightarrow{\text{ポアンカレ双対}} & H^*(M, \mathrm{Ad}(E))^\vee[-2]. \end{array}$$

例 4.4. C を滑らかで射影的な代数曲線とし、 G を簡約代数群とする。 C 上の G -ヒッグス束とは、主 G 束 E とヒッグス場 $\phi \in \Gamma(C, \mathrm{Ad}(E) \otimes \omega_C)$ の組 (E, ϕ) のことである。 C と G に付随するヒッチンモジュライを G -ヒッグス束のなすモジュライスタック

$$\mathcal{H}_G := \{(E, \phi) : \text{ヒッグス束}\}$$

として定義する。このとき $\mathcal{H}_G$ は 0 -シフトシンプレクティックスタックである。このシンプレクティック構造は、セール双対 $\mathrm{R}\Gamma(C, \mathrm{Ad}(E))[1]^\vee \simeq \mathrm{R}\Gamma(C, \mathrm{Ad}(E) \otimes \omega_C)$ を通して、主 G 束の変形とヒッグス場の変形を交換する。

例 4.5. $\mathcal{Y}$ を導来アルティンスタックとする。 $\mathcal{Y}$ のループスタック (inertia スタックとも呼ばれる) を

$$\mathcal{L}\mathcal{Y} := \mathcal{Y} \times_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}} \mathcal{Y} (\cong \mathrm{Map}(\mathrm{B}\mathbb{Z}, \mathcal{Y}))$$

により定義する。 $\mathcal{L}\mathcal{Y}$ は $\mathcal{Y}$ の点とその自己同型の組をパラメトライズするスタックである。 $\mathcal{Y}$ が n -シフトシンプレクティック構造を持つとき、 $\mathcal{L}\mathcal{Y}$ は $(n-1)$ -シフトシンプレクティックスタックになる。特に $\mathcal{L}\mathcal{H}_G$ は (-1) -シフトシンプレクティックスタックであることがわかる。 $\mathcal{L}\mathcal{H}_G$ は具体的には

$$\mathcal{L}\mathcal{H}_G = \left\{ (E, \phi, \psi) \left| \begin{array}{l} E : \text{主 } G\text{-束} \\ \phi \in \Gamma(C, \mathrm{Ad}(E) \otimes \omega_C), \\ \psi \in \mathrm{Aut}(E) \\ \mathrm{ad}_\psi(\phi) = 0 \end{array} \right. \right\}$$

と書ける。

例 4.6. U を滑らかなスキーム、 f を U 上の関数とし、 $\mathrm{Crit}(f)$ を $df \in \Gamma(U, \Omega_U)$ の導来零集合、すなわち導来臨界点集合とする。このとき $\mathrm{Crit}(f)$ は (-1) -シフトシンプレクティックである。 $\mathrm{Crit}(f)$ の余接複体はヘシアン $[T_U \xrightarrow{\mathrm{Hess}_f} \Omega_U]$ で与えられ、その自然な対称性が (-1) -シフトシンプレクティック構造に対応する。

5 ドナルドソン・トーマス偏屈層と BPS 偏屈層

ここでは (-1) -シフトシンプレクティックスタックの重要な不変量であるドナルドソン・トーマス (DT) 偏屈層の理論について解説する。DT 偏屈層は仮想基本類の圏化であり、三次元カラビ・ヤウ多様体の DT 理論の圏化を動機として導入された。最近では実三次元多様体上の G -局所系のモジュライ空間上の DT 偏屈層の研究 [Kau24; Bu+25a] や、DT 偏屈層と変形量子化の関係 [GS23] などが注目を集めている。

§5.1 で DT 偏屈層を導入し、§5.2 で次元還元定理について説明する。この定理は DT 偏屈層を理解する上で重要であるが、本記事ではそこまで重要ではないので読み飛ばしていただいても構わない。

5.1 ドナルドソン・トーマス偏屈層

いま $\mathcal{X}$ を (-1) -シフトシンプレクティック導来アルティンスタックとする。さらに $\mathcal{X}$ が向き付けられている、すなわち $K_{\mathcal{X}} := \det(\mathbb{L}_{\mathcal{X}})$ の平方根が与えられているとする^{*5}。このとき Brav–Bussi–Joyce ら [Bra+15; Ben+15] は $\mathcal{X}$ 上に **DT 偏屈層**と呼ばれる対象

$$\varphi_{\mathcal{X}} \in \text{Perv}(\mathcal{X})$$

を定義した。ここでは偏屈層の定義は述べないが、(古典的な意味での) 層ではなく層の導来圏の対象のうち特別なものである。また導来アルティンスタック上の偏屈層は付随する古典的アルティンスタック上の偏屈層として定義される。DT 偏屈層のコホモロジーを**臨界コホモロジー**と呼び、

$$H_{\text{crit}}^*(\mathcal{X}) := H^*(\mathcal{X}, \varphi_{\mathcal{X}})$$

と書く。

DT 偏屈層の最も重要な性質として、仮想基本類との関係がある：

定理 5.1 (Behrend [Beh09]). X を射影的で向き付けられた (-1) -シフトシンプレクティックスキームとする。このとき次の等式が成立する：

$$\int_{[X]_{\text{vir}}} 1 = \chi(X, \varphi_X).$$

特に三次元カラビ・ヤウ多様体上の安定接続層のモジュライ空間上の DT 偏屈層は DT 不変量の圏化を与えることがわかる。

例 4.6 で導入した導来臨界点に対しては、DT 偏屈層は消滅サイクル複体として表される：

$$\varphi_{\text{Crit}(f)} \cong \varphi_f(\mathbb{Q}_U[\dim U]).$$

一般に (-1) -シフトシンプレクティックスタックは局所的に $\text{Crit}(f)$ の形で表されることが知られており [Ben+15, Corollary 2.11]、DT 偏屈層は消滅サイクル複体の貼り合わせで定義される。

5.2 次元還元定理

DT 偏屈層および臨界コホモロジーの計算は一般にとっても難しい。消滅サイクル関手自体が複雑であることと、さらにその貼り合わせで定義されているためである。一方で (-1) -シフト余接スタックと呼ばれる (-1) -シフトシンプレクティックスタックに対しては簡潔な記述が存在し、DT 偏屈層の計算の多くはこの場合に帰着することにより行われる。

例 5.2. $\mathcal{Y}$ を擬順滑導来アルティンスタックとする。 $\mathcal{Y}$ の (-1) -シフト余接スタックを

$$T^*[-1]\mathcal{Y} := \text{Tot}(\mathbb{L}_{\mathcal{Y}}[-1]) = \text{Spec}_{\mathcal{Y}}(\text{Sym}(\mathbb{L}_{\mathcal{Y}}^{\vee}[1]))$$

により定義する。このとき $T^*[-1]\mathcal{Y}$ は (-1) -シフトシンプレクティック構造を持つ。この主張は余接束がシンプレクティック構造を持つというよく知られている事実の (-1) -シフト版である。

^{*5} 本記事で現れる (-1) -シフトシンプレクティックスタックは全て自然な向きづけを持つことが知られている。そのため本記事では今後向き付けに関して言及しないことにする。

定理 5.3 (次元還元定理 [Kin22]). $\mathcal{Y}$ を擬順滑導来アルティンスタックとし、 $\pi: T^*[-1]\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ を射影とする。このとき、同型

$$\pi_* \varphi_{T^*[-1]\mathcal{Y}} \cong \mathbb{D}\mathbb{Q}_{\mathcal{Y}}[-\mathrm{vdim} \mathcal{Y}]$$

が成立する。ここで $\mathbb{D}\mathbb{Q}_{\mathcal{Y}}$ は $\mathcal{Y}$ 上の双対化複体である。従って同型

$$H^*(T^*[-1]\mathcal{Y}, \varphi_{T^*[-1]\mathcal{Y}}) \cong H_{-*+\mathrm{vdim} \mathcal{Y}}^{\mathrm{BM}}(\mathcal{Y})$$

が成立する。ここで $H_*^{\mathrm{BM}}(\mathcal{Y}) = H_c^{-*}(\mathcal{Y})^\vee$ は $\mathcal{Y}$ の Borel–Moore ホモロジーを表す。

この定理の証明のアイデアは非常に簡単である。まず擬順滑導来アルティンスタックの局所模型に対しては Davison によりすでに示されており [Dav13]^{*6}、この場合は消滅サイクル複体の簡単な計算でわかる。一般の場合は Davison の与えた同型を貼り合わせるにより証明される。アイデア自体は単純であるが、貼り合わせの際のコサイクル条件を符号込みでちゃんとチェックするのはそれなりに面倒である。

余談 5.4. 最近の論文 [Kha+25] で次元還元定理は擬順滑でない場合にも一般化された。この証明のアイデアは主に共著者の Park によるもので、DT 偏屈層の相対板である **偏屈引き戻し関手** に関する性質の特殊ケースとして得られる。法錐への変形などを用いて少しずつ簡単なケースに帰着していき、最終的にフーリエ・佐藤変換に関するよく知られた主張に帰着することで示される。次元還元定理の証明のためには面倒な貼り合わせの議論が必須だと思い込んでいたので、最初にこの証明のアイデアを聞いたときは大きな衝撃を受けた。定理を極限まで一般化すると簡単な証明が与えられるという一般論の好例である。

補足 5.5. 次元還元定理という名前の由来について説明しよう。いま S を滑らかな代数曲面とし、 $\mathcal{M}_S$ を S 上のコンパクト台を持つ接続層のモジュライスタックとする。 $X = \mathrm{Tot}_S(\omega_S)$ とおく。このとき自然な同型

$$\mathcal{M}_X \cong T^*[-1]\mathcal{M}_S$$

が存在することがわかる。従って定理 5.3 は同型

$$H^*(\mathcal{M}_X, \varphi_{\mathcal{M}_X}) \cong H_{-*+\mathrm{vdim} \mathcal{M}_S}^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_S)$$

を導く。左辺の臨界コホモロジーは三次元的な不変量であり、右辺は二次元的な不変量である。これが次元還元定理と呼ばれる理由である。

余談 5.6. 次元還元定理の実際の使われ方はその名前に反して、二次元の不変量を三次元的に扱うために使われることが多い気がする。DT 理論の文脈では一次元 $\rightarrow$ 三次元 $\rightarrow$ 二次元の順に難しくなっていく、三次元から一次元への帰着は消滅サイクル関手を当てることで、二次元から三次元への帰着は次元還元定理を用いることで行われる。そのため「次元昇降定理」や「超局所化定理」などの方が良いネーミングかもしれない。

6 位相的 DT 理論とラングランズ双対

記事の冒頭で述べたように三次元多様体と数体の間には不思議な類似性が存在し、特に三次元多様体に対してもラングランズ双対現象が観察されることが知られている。この節では位相的 DT 理論、すなわち実三次元多様体上の G -局所系のモジュライスタックの臨界コホモロジーの理論を用いたラングランズ双対性の定式化およびその最近の進展について解説する。

^{*6} 元の Davison の証明はあまり簡単ではないが、最近の論文 [Kha+25] でシンプルな証明を与えた。この新しい証明はエタール層に対しても適用できる。

6.1 三次元多様体のラングランズ双対性予想

一般に連結な簡約代数群 G に対して、その双対群 $G^\vee$ が定義される。ここでは定義は述べないが、これは指標と余指標を入れ替える双対性であり、以下がラングランズ双対群の例である：

G	$G^\vee$
SL_n	PGL_n
GL_n	GL_n
Sp_{2n}	SO_{2n+1}

三次元多様体のラングランズ双対性予想の定式化は以下である：

予想 6.1 (Safronov [Saf21]). 向き付けられた閉実三次元多様体に対して同型

$$H_{\mathrm{crit}}^*(\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)) \cong H_{\mathrm{crit}}^*(\mathcal{L}\mathrm{oc}_{G^\vee}(M))$$

が成立する。

補足 6.2. 数論におけるラングランズ双対性は G に対しては保型表現を、 $G^\vee$ に対してはガロア表現を考えるため、上の定式化で G と $G^\vee$ に対して同じものを考えているのが一見奇妙に思われるかもしれない。実はより一般に $q \in \mathbb{P}^1$ の取り方ごとにラングランズ双対性があることが期待されており、

$$\mathrm{KW}_{G,q}(M) \cong \mathrm{KW}_{G,-1/q}(M)$$

という形で定式化される。ここで $\mathrm{KW}_{G,q}(M)$ は量子パラメータ q についての Kapustin–Witten コホモロジーである。Kapustin–Witten コホモロジーの数学的な定義はまだ知られていないが、 q が十分一般的な場合は $H_{\mathrm{crit}}^*(\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M))$ と一致することが期待されている。 $q = \infty$ のときは $H^*(\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M), \mathcal{O}_{\mathcal{L}\mathrm{oc}_G(M)})$ になると考えられており^{*7}、これが数論におけるラングランズ対応のガロア側の類似物である。一方で保型形式のなす空間の対応物、すなわち $q = 0$ における Kapustin–Witten コホモロジーの数学的な定式化はまだ完全には理解されていないようである。詳しくは [Saf21] を見よ。

補足 6.3. 三次元多様体のラングランズ双対予想にはスケイン加群を用いたもの [Jor22] もある。この定式化は予想 6.1 と等価になることが期待されている [GS23, Conjecture C]。より具体的には十分一般的な q に対して、スケイン加群 $\mathrm{Sk}_{G,q}(M)$ がフレーム付き指標多様体 $\mathcal{L}\mathrm{oc}_G^{\mathrm{fr}}(M)$ の臨界コホモロジーと同型になることが予想されている。

6.2 放物誘導

位相的 DT 理論において最も重要な構造である放物誘導を導入する。放物誘導は三次元多様体と数体の類似において、アイゼンシュタイン級数に対応するものである。

いま G を簡約代数群とし、 $P \subset G$ を放物型部分群、 L を P のレヴィ部分群とする^{*8}。向きづけられた閉実

^{*7} 厳密には特異台が冪零錐に含まれるような双対化複体の切断のなす空間を考える必要がある。

^{*8} 放物型部分群およびレヴィ部分群とはある 1-パラメータ部分群 $\lambda: \mathbb{G}_m \rightarrow G$ に対し、

$$P = \{g \in G \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ が存在 } \}, \quad L = \{g \in G \mid \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ } (\forall t \in \mathbb{G}_m)\}$$

三次元多様体に対して、次の図式を考える：

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L}oc_P(M) & \\ \text{gr} \swarrow & & \searrow \text{tot} \\ \mathcal{L}oc_L(M) & & \mathcal{L}oc_G(M). \end{array}$$

このとき G/P が射影的であることを用いることで、 tot が射影的であることがわかる。次の定理は放物誘導を定義する上で非常に重要である。

定理 6.4 ([KPS24]). 自然な同型

$$\text{gr}_* \text{tot}^! \varphi_{\mathcal{L}oc_G(M)} \cong \varphi_{\mathcal{L}oc_L(M)} \quad (1)$$

が存在する。

同型 (1) の随伴をとって tot の固有性を用いることで、自然な射

$$\text{tot}_* \text{gr}^* \varphi_{\mathcal{L}oc_L(M)} \rightarrow \varphi_{\mathcal{L}oc_G(M)} \quad (2)$$

を得る。大域切断を取ることで自然な射

$$\Phi_P: H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_L(M)) \rightarrow H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_G(M))$$

が得られる。この射を**放物誘導**と呼ぶ。

補足 6.5 (コホモロジー的ホール代数). レヴィ部分群として $\text{GL}_{n_1} \times \text{GL}_{n_2} \subset \text{GL}_{n_1+n_2}$ を取ると、放物誘導は射

$$H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_{\text{GL}_{n_1}}(M)) \otimes H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_{\text{GL}_{n_2}}(M)) \rightarrow H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_{\text{GL}_{n_1+n_2}}(M))$$

を与える。これを全ての GL_n について足しあげると、 $\mathcal{A}_M := \bigoplus_n H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}oc_{\text{GL}_n}(M))$ に非可換環の構造

$$\mathcal{A}_M \otimes \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{A}_M$$

が定まることがわかる。これを三次元多様体の**コホモロジー的ホール代数**という。コホモロジー的ホール代数は元々三次元カラビ・ヤウ多様体の DT 理論の文脈で考えられ、三次元カラビ・ヤウ多様体 X に対して積

$$H_{\text{crit}}^*(\mathcal{M}_X) \otimes H_{\text{crit}}^*(\mathcal{M}_X) \rightarrow H_{\text{crit}}^*(\mathcal{M}_X)$$

が定義できるという形で Kontsevich–Soibelman と Joyce によって予想されていた。この予想は [KPS24] で、定理 6.4 の三次元カラビ・ヤウ多様体版を示すことにより解決された。

と書けるようなものである。例えば $G = \text{GL}_2$ で $\lambda(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$ のときは

$$P = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

である。より一般に $\prod_i^k \text{GL}_{n_i} \subset \text{GL}_{n_1+\dots+n_k}$ はレヴィ部分群であり、対応する階段型行列全体は放物型部分群になる。

6.3 BPS 層と BPS 分解定理

スタック $\mathcal{L}oc_G(M)$ の臨界コホモロジーは同変パラメータを含むため、一般には無限次元である。この節では臨界コホモロジーの有限次元モデルである BPS コホモロジーを導入する。後に示すように、臨界コホモロジーは放物誘導を通して BPS コホモロジーに分解するため、臨界コホモロジーを調べるためには BPS コホモロジーを調べれば十分である。

いま、 $\mathcal{L}oc_G(M)$ の良モジュライ^{*9}を $\text{Loc}_G(M)$ と書き、

$$p_G: \mathcal{L}oc_G(M) \rightarrow \text{Loc}_G(M) \quad (3)$$

を自然な射とする。 G の中心の次元を c_G と書き、 $\text{Loc}_G(M)$ 上の **BPS 偏屈層**を

$$\mathcal{BPS}_{\text{Loc}_G(M)} := {}^p\mathcal{H}^{c_G}(p_{G,*}\varphi_{\mathcal{L}oc_G(M)}) \in \text{Perv}(\text{Loc}_G(M)) \quad (4)$$

により定める。ここで ${}^p\mathcal{H}^n(-)$ は n 次の偏屈コホモロジー層を表す。この定義は一見奇妙に見えるかもしれない: 実際この定義は後で述べる BPS 分解定理からの天下りで導入されたもので、その定義には深い意味がないと考えて良いであろう。一つ意味を与えるとすれば、次の定理が示すように BPS 層は DT 偏屈層を用いて良モジュライ上で定義される最も自然な偏屈層になっている:

定理 6.6 ([Bu+25a, Proposition 7.2.9]). $i < c_G$ に対し、消滅 ${}^p\mathcal{H}^i(p_{G,*}\varphi_{\mathcal{L}oc_G(M)}) = 0$ が成立する。

BPS 分解定理について述べるために記号をいくつか導入しよう。いま G を簡約代数群、 $P \subset G$ を放物型部分群、 $L \subset P$ をそのレヴィ部分群とする。次の図式を考える:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L}oc_P(M) & \\ \text{gr} \swarrow & & \searrow \text{tot} \\ \mathcal{L}oc_L(M) & & \mathcal{L}oc_G(M) \\ p_L \downarrow & & \downarrow p_G \\ \text{Loc}_L(M) & \xrightarrow{g_L} & \text{Loc}_G(M). \end{array}$$

ここで g_L は埋め込み $L \subset G$ から誘導される射であり、有限射であることがわかる。また、この図式は可換図式であることが容易に証明できる。いま $W_G(L) := N_G(L)/L$ を相対ワイル群とすると、 $W_G(L)$ は $\text{Loc}_L(M)$ に作用し、BPS 層 $\mathcal{BPS}_{\text{Loc}_G(M)}$ は $W_G(L)$ -同変層であることがわかる。次の定理が位相的 DT 理論における最重要定理である **BPS 分解定理**である:

定理 6.7 ([HK25, Theorem 5.2]). 以下の同型が存在する:

$$\bigoplus_{\substack{L \subset G \\ L: \text{レヴィ部分群}}} (g_{L,*}\mathcal{BPS}_{\text{Loc}_L(M)} \otimes H^*(\text{BZ}(L))[-c_L])^{W_G(L)} \cong p_{G,*}\varphi_{\mathcal{L}oc_G(M)}.$$

ここで左辺は G のレヴィ部分群の共役類全体を走る。

この定理は一見わかりづらいかもしれないが、右辺の非常に計算しづらい (非有界な) 複体を、左辺のより扱いやすいピースに分解しているという点が重要である。 $g_{L,*}\mathcal{BPS}_{\text{Loc}_L(M)}$ は定義から有界 (より強く、偏屈層)

^{*9} 以前は粗モジュライと呼ばれていたが、Alper による内在的な定式化 [Alp13] 以降良モジュライと呼ばれるようになった。良モジュライはこの場合、GIT 商 $\text{Hom}_{\text{grp}}(\pi_1(M), G) // G$ により与えられる。

であり、また $H^*(BZ(L))$ は変数が $\dim Z(L)$ 個だけあるような多項式環と同型である。さらに BPS 層は多くの場合に小さい台を持ち、また具体的に計算できる場合も多い。この定理の両辺の c_G -次の偏屈コホモロジー層を取ると^{*10}、定理 6.6 より BPS 層の定義 (4) が復元される。

いま **BPS コホモロジー** を

$$H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_G(M)) := H^*(\text{Loc}_G(M), \mathcal{BPS}_{\text{Loc}_G(M)})$$

により定めると、定理 6.7 の大域切断は次の同型を与える：

$$\bigoplus_{\substack{L \subset G \\ L: \text{レヴィ部分群}}} H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_G(M))[t_1, \dots, t_{c_L}]^{W_G(L)} \cong H_{\text{crit}}^*(\mathcal{L}\text{oc}_G(M)). \quad (5)$$

この定理には様々な解釈があり、 $G = \text{GL}_n$ の場合には補足 6.5 で導入したコホモロジー的ホール代数 $\mathcal{A}_M$ の PBW 型定理と見なすことができる。実際この場合には

$$\mathfrak{g}_M^{\text{BPS}} := \bigoplus_n H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_{\text{GL}_n}(M))$$

にリー代数の構造が入り、同型 (5) は普遍包絡環からの自然な射の延長として実現される。一般に同型 (5) はコホモロジー的ホール誘導を用いて以下のように構成される。まず BPS 層と定理 6.6 により、自然な射

$$\mathcal{BPS}_{\text{Loc}_L(M)}[-c_L] \rightarrow p_{L,*} \varphi_{\text{Loc}_L(M)} \quad (6)$$

が存在する。射 $\text{Loc}_L(M) \rightarrow BG \rightarrow BG_{\text{ab}}$ を用いると $H^*(BG_{\text{ab}}) \cong H^*(BZ(G))$ が $\varphi_{\text{Loc}_L(M)}$ に作用することがわかり、特に射

$$p_{L,*} \varphi_{\text{Loc}_L(M)} \otimes H^*(BZ(L)) \rightarrow p_{L,*} \varphi_{\text{Loc}_L(M)} \quad (7)$$

が得られる。最後に、相対的な放物誘導 (2) は良モジュライ上の射

$$g_{L,*} p_{L,*} \varphi_{\text{Loc}_L(M)} \rightarrow p_{G,*} \varphi_{\text{Loc}_G(M)} \quad (8)$$

を誘導する。以上の三つの射を組み合わせることで、(3) における左辺から右辺への射が構成される。この射が同型であることの証明はとても難しいのでここでは詳細は省略する。定理 6.7 の定式化を一般の「対称的 (-1) -シフトシンプレクティックスタック」に拡張することで (-1) -シフトシンプレクティックスタックの局所模型^{*11}に関する主張に帰着するのが主なアイデアであり、このステップでは内在的 DT 理論と呼ばれるスタックの構造論が用いられる [Bu+25b]。

6.4 BPS 分解定理とラングランズ双対性

§6.1 では臨界コホモロジーを用いた三次元多様体のラングランズ双対性予想を述べたが、BPS コホモロジーを用いて定式化することもできる：

予想 6.8. 向き付けられた閉実三次元多様体に対して同型

$$H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_G(M)) \cong H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_{G^\vee}(M))$$

が成立する。

^{*10} $c_L \geq c_G$ であり、等号成立条件は $L = G$ である。

^{*11} 良モジュライを持つような (-1) -シフトシンプレクティックスタックは、局所的に簡約代数群 G , G の作用する滑らかなアフィンスキーム U , U 上の G -不変関数 f を用いて、 f/G の導来臨界点として表されることが知られている。

BPS 分解定理 (= 定理 6.7) により、予想 6.1 と予想 6.8 は $(\text{Out}(G) \cong \text{Out}(G^\vee))$ に関する同変性を含めると) 等価な定式化になることがわかる。BPS コホモロジーは有限次元であるため計算しやすく、いくつかの場合に具体的にラングランズ双対性をチェックすることができる。

定理 6.9 (Hennecart–Kinjo, in progress). G を半単純代数群とする。

(1) $i \neq 0$ に対して $H_{\text{BPS}}^i(\text{Loc}_G(T^3)) = 0$ である。

いま $a_G = \dim H_{\text{BPS}}^0(\text{Loc}_G(T^3))$ とおく。

(2) 次の等式が成立する:

$$\begin{aligned} a_{\text{SL}_n} &= n^3, & a_{\text{PGL}_n} &= n^3 \\ a_{\text{Sp}_{2n}} &= [t^n] \left((1+t)(1+t^2)(1+t^3) \cdots \right)^8 \\ a_{\text{SO}_{2n+1}} &= 1/8 \cdot [t^{2n+1}] \left((1+t)(1+t^3)(1+t^5) \cdots \right)^8 \end{aligned}$$

ここで $[t^n]f(t)$ は $f(t)$ の t^n の係数を表す。

この等式は $M = T^3$ の場合の SL_n/PGL_n に関するラングランズ双対性を導く。 $\text{Sp}_{2n}/\text{SO}_{2n+1}$ に関するラングランズ双対性はこの公式からは明らかではないが、実は等式

$$[t^n] \left((1+t)(1+t^2)(1+t^3) \cdots \right)^8 = 1/8 \cdot [t^{2n+1}] \left((1+t)(1+t^3)(1+t^5) \cdots \right)^8$$

が成立することがわかる。この等式は非自明であり、テータ関数のヤコビ恒等式を用いると証明することができる^{*12}。

余談 6.10. この結果を証明するまでは正直なところ予想 6.1 の定式化に関して半信半疑であった。予想の正しさを示す非自明な例がなく、また局所系のモジュライ空間が非コンパクトであるために「無限遠からの寄与」を無視しているように感じられたからである。定理 6.9 によって予想 6.1 の正当性はほぼ確実なものになったと言えよう。

7 ヒッチン系の位相的ミラー対称性

7.1 ヒッチン系の位相的ミラー対称性

最後に位相的 DT 理論の応用としてヒッチンモジュライの位相的ミラー対称性の定式化を述べる。例 4.4 においてヒッチンモジュライ $\mathcal{H}_G$ を導入した。ヒッチンモジュライは以下のようにファイバー積を用いて記述することができる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_G & \xrightarrow{\quad} & \{K_C\} \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ \text{Map}(C, [\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m]) & \xrightarrow{\quad} & \text{Map}(C, B\mathbb{G}_m). \end{array}$$

^{*12} もし組み合わせ論的な証明を思いついた人がいたら教えてください。

ここで G の $\mathfrak{g}$ への作用は随伴作用であり、 $\mathbb{G}_m$ の作用はスケーリングにより与えられる。いまヒッチン底 B_G を次のファイバー図式で定義する:

$$\begin{array}{ccc} B_G & \xrightarrow{\quad} & \{K_C\} \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ \mathrm{Map}(C, [(\mathfrak{g} // G)/\mathbb{G}_m]) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Map}(C, B\mathbb{G}_m). \end{array}$$

$\mathfrak{g} // G$ はアフィン空間と同型で $\mathbb{G}_m$ -作用は線形になっているため、 B_G はアフィン空間であることがわかる^{*13}。自然な射 $[\mathfrak{g}/G \times \mathbb{G}_m] \rightarrow [(\mathfrak{g} // G)/\mathbb{G}_m]$ は射

$$h_G: \mathcal{H}_G \rightarrow B_G$$

を誘導し、これは **Hitchin 系** と呼ばれる^{*14}。

$G^\vee$ を G のラングランズ双対とすると、同型 $B_G \cong B_{G^\vee}$ が存在することがわかり、十分一般的な点 $p \in B_G \cong B_{G^\vee}$ に対して、 $h_G^{-1}(p)$ と $h_{G^\vee}^{-1}(p)$ は双対アーベル多様体になる^{*15}。そのため $\mathcal{H}_G$ と $\mathcal{H}_{G^\vee}$ は SYZ の描像においてミラー対称の関係にある。したがって位相的ミラー対称性予想をこの状況に当てはめると、 $\mathcal{H}_G$ と $\mathcal{H}_{G^\vee}$ のホッジ数には関係がつくことが期待される^{*16}。しかし、 $\mathcal{H}_G$ が特異点を持つことや準コンパクトでないため、通常のホッジ数は良い振る舞いをしないことが観察されており、ヒッチン系の位相的ミラー対称性予想の厳密な定式化は最近まで見つかっていなかった。 $G = \mathrm{SL}_n$, $G^\vee = \mathrm{PGL}_n$ の場合は 2002 年の Hausel–Thaddeus の論文 [HT03] により、特異点がなくなるようにツイストしたモジュライに対して位相的ミラー対称性予想が定式化され、この予想は [MS21] と [GWZ20] により独立に解決したが、type A の群の場合でもツイストされていない場合の定式化は近年まで待つことになる。ここでは BPS コホモロジーを用いた位相的ミラー対称性予想の定式化を述べる。以降簡単のため G は半単純であるとする。

いま $\mathcal{H}_G^{\mathrm{ss}} \subset \mathcal{H}_G$ を半安定な G -ヒッグス束のなす開部分スタックとする。 $\mathcal{H}_G^{\mathrm{ss}}$ は良モジュライ

$$\bar{p}_G: \mathcal{H}_G^{\mathrm{ss}} \rightarrow H_G^{\mathrm{ss}}$$

を持つことがわかる。また $\mathcal{H}_G^{\mathrm{ss}}$ のループスタック $\mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}}$ も良モジュライ

$$p_G: \mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}} \rightarrow LH_G^{\mathrm{ss}}$$

を持つ。例 4.5 により $\mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}}$ は (-1) -シフトシンプレクティックであり、特に DT 偏屈層

$$\varphi_{\mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}}} \in \mathrm{Perv}(\mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}})$$

が定義される。BPS 層を

$$\mathrm{BPS}_{LH_G^{\mathrm{ss}}} := \mathcal{H}^0(p_{G,*} \varphi_{\mathcal{LH}_G^{\mathrm{ss}}}) \in \mathrm{Perv}(LH_G^{\mathrm{ss}})$$

^{*13} より具体的には、 $\mathbb{G}_m$ の $\mathfrak{g} // G$ への作用のウェイトを $w_1, \dots, w_l$ とすると、

$$B_G \cong \prod_i H^0(C, \omega_C^{w_i})$$

である。

^{*14} この射は可積分系を定める: 言い換えると、 $B_G \cong \mathbb{A}^n$ を固定して $h_G = (h_1, \dots, h_n)$ とおくと、 $\mathcal{H}_G$ のシンプレクティック構造から誘導されるポアソン構造に関して $\{h_i, h_j\} = 0$ が成立する。ヒッチン系という名前の由来はこの事実によるものである。

^{*15} 厳密には一般ファイバーはアーベル多様体上の gerbe の disjoint union である。 $Z(G)^\vee \cong \pi_1(G^\vee)$ という関係を通して gerbe 性と非連結性が双対の関係にあたると考えられている。

^{*16} 通常のミラー対称性の文脈では $h^{p,q}$ と $h^{p,n-q}$ が対応するが、ヒッチン系の位相的ミラー対称性では $h^{p,q}$ 同士が対応することが期待されている。この理由は正直なところよくわかっていないが、コンパクト超ケーラー多様体に対しては $h^{p,q}$ と $h^{p,n-q}$ が一致すること、およびヒッチンモジュライが非コンパクトであることが関係しているようである。

により定め^{*17}、BPS コホモロジーを

$$H_{\text{BPS}}^*(LH_G^{\text{ss}}) := H^*(LH_G^{\text{ss}}, \mathcal{BPS}_{LH_G^{\text{ss}}})$$

で定義する。このときヒッチン系の位相的ミラー対称性予想は以下で定式化される:

予想 7.1 ([Bu+25a]). 自然な同型

$$H_{\text{BPS}}^*(LH_G^{\text{ss}}) \cong H_{\text{BPS}}^*(LH_{G^\vee}^{\text{ss}})$$

が存在する。

この予想の定式化はループスタックに移行する点などが一見不自然に思われるかもしれないが、次の節で述べるように非可換ホッジ理論によって実三次元多様体のラングランズ対応と自然に結びつくことから、正しい定式化であると考えられる。標語的には、ヒッチン系の位相的ミラー対称性は「三次元的な双対性」とみなすべき主張であると言えよう。

7.2 非可換ホッジ理論との関係

最後に非可換ホッジ理論について簡単に説明し、予想 7.1 の根拠を述べる。 C を滑らかな射影曲線とし、 G を簡約代数群とする。

$$H_{G,0}^{\text{ss}} \subset H_G^{\text{ss}}$$

を有理チャーン類が 0 であるような半安定 G -ヒッグス束のなす開かつ閉部分スキームとする。Simpson の非可換ホッジ定理の主張は以下である:

定理 7.2 ([Sim92, Theorem 7.18]). 自然な同相

$$H_{G,0}^{\text{ss}} \cong_{\text{Homeo}} \text{Loc}_G(C)$$

が存在する。

例 7.3. $G = \mathbb{G}_m$ とする。このとき半安定性は常に成立し、 $H_{\mathbb{G}_m,0}^{\text{ss}} \cong \text{Pic}^0(C) \times H^0(C, \omega_C)$ である。一方で $\text{Loc}_{\mathbb{G}_m}(C) = (\mathbb{C}^*)^{2g}$ である。したがって $H_{\mathbb{G}_m,0}^{\text{ss}}$ と $\text{Loc}_{\mathbb{G}_m}(C)$ は同相ではあるが同型ではないことがわかる。

自明なヒッグス束に対応する点での $H_{\mathbb{G}_m,0}^{\text{ss}}$ の接空間は、直線束の変形とヒッグス場の変形に分解することで $H^1(C, \mathcal{O}_C) \oplus H^0(C, \omega_C)$ と自然に同型であることがわかる。一方で $\text{Loc}_{\mathbb{G}_m}(C)$ の自明な表現での接空間は $H^1(C, \mathbb{C})$ と自然に同型であるため、このときの非可換ホッジ同型はホッジ分解定理 $H^1(C, \mathcal{O}_C) \oplus H^0(C, \omega_C) \cong H^1(C, \mathbb{C})$ を導く。これが非可換ホッジ定理の名前の由来である。

非可換ホッジ定理において対応する G -ヒッグス束と G -局所系は同型な自己同型群を持つ。したがって、 $\mathcal{LH}_{G,0}^{\text{ss}}$ の良モジュライ空間 $LH_{G,0}^{\text{ss}}$ の閉点と $\mathcal{L}\text{Loc}_G(C)$ の良モジュライ空間 $L\text{Loc}_G(C)$ の閉点は自然に対応する。さらに定義により、自然な同型

$$\mathcal{L}\text{Loc}_G(C) \cong \mathcal{L}\text{Loc}_G(C \times S^1)$$

が存在する。以上の議論をまとめると、自然な全単射

$$LH_{G,0}^{\text{ss}} \cong_{\text{bij}} L\text{Loc}_G(C \times S^1)$$

^{*17} 0 次の偏屈コホモロジー層を考えているのは G が半単純であるため $c_G := \dim Z(G) = 0$ であるからである。

が存在することがわかる。この全単射が同相であることを期待しており、さらに BPS 層がこの同相で移り合うことを期待している。したがって三次元多様体のラングランズ対応とヒッチン系の位相的ミラー対称性は非可換ホッジ定理の下、等価になることが期待される:

予想 7.4. 次の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\text{BPS}}^*(LH_G) & \xrightarrow{\text{非可換ホッジ同型}} & H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_G(C \times S^1)) \\
 \downarrow \text{位相的ミラー対称性} & & \downarrow \text{三次元ラングランズ} \\
 H_{\text{BPS}}^*(LH_{G^\vee}) & \xrightarrow{\text{非可換ホッジ同型}} & H_{\text{BPS}}^*(\text{Loc}_{G^\vee}(C \times S^1)).
 \end{array}$$

これがヒッチン系の位相的ミラー対称性の定式化においてループスタックの良モジュライ空間の BPS コホモロジーを用いる理由である。

余談 7.5. ヒッチン系の位相的ミラー対称性の定式化の背景に三次元多様体のラングランズ対応があるというのは実は後付けであり、私が最初にこの定式化を思いついたのはもっといい加減な考察によるものである。まずヒッチン系の位相的ミラー対称性は H_G と $H_{G^\vee}$ のある種のコホモロジーの同型として定式化されるという期待があった。 H_G の連結成分は $\pi_1(G)$ と同一視されるため、 H_G のしかるべきコホモロジーは $\pi_1(G)$ により分解されるはずである。 $\pi_1(G) \cong Z(G^\vee)^\vee$ が成立するため、 $H_{G^\vee}$ のしかるべきコホモロジーは $Z(G^\vee)$ の作用を持つことが期待される。しかし $Z(G^\vee)$ は $H_{G^\vee}$ に作用しない。そこで $Z(G^\vee)$ が作用する空間であって最も単純な $LH_{G^\vee}$ を使うべきであると考えたのがこの予想の定式化の背景である。

最初このことを共著者に説明してこの定式化を論文に載せようとしたところ、「その説明では不十分だ、予想というのはちゃんとした根拠があるべきだ。」と真っ当なお叱りを受けて、一度論文の原稿から削除することになった。その後三次元多様体のラングランズ対応を用いた解釈が見つかり、また数値的な根拠も見つかったことで共著者も納得して無事論文に載せることができた。

おまけ: 文献案内

位相的 DT 理論に興味を持った読者はまず Safronov による以下の二つのスライドを読むことをお勧めする:

- Pavel Safronov, Geometric Langlands program for 3-manifolds. (2021) https://impa.br/wp-content/uploads/2021/06/StringMath2021_Slides-Pavel-Safronov.pdf
- Pavel Safronov, Holomorphic Morse theory and moduli spaces of flat connections on 3-manifolds. (2023) <https://web.math.ucsb.edu/~drm/WHCGP/04-24%20Holomorphic%20Morse%20homology.pdf>

位相的 DT 理論やコホモロジー的 DT 理論をきちんと勉強したい読者は次の論文を読むのが良いと思う。

- Chenjing Bu, Ben Davison, Andrés Ibáñez Núñez, Tasuki Kinjo and Tudor Pădurariu, Cohomology of symmetric stacks (2025). arXiv:2502.04253.

この論文は BPS 分解定理を直交性 (orthogonality) と呼ばれる技術的な仮定を満たすスタックに対して証明している。この仮定は後に論文 [HK25] で外されるので、上の論文における直交性の議論は全てスキップして良い。この論文は (スタック論を含む) 導来代数幾何学および導来シンプレクティック幾何学と構成可能層の導来圏に関する知識があれば読み進めることができると思う。導来代数幾何学と導来シンプレクティック幾何学についてはそれぞれ以下のレクチャーノートがわかりやすい。

- Adeel Khan. A modern introduction to algebraic stacks. <https://www.preschema.com/lecture-notes/2022-stacks/>
- Hyeonjun Park. An introduction to shifted symplectic structures. <https://drive.google.com/file/d/1pHUn00qyMIP0wq47ShzwgYM7Zr-SwjH6/view>

構成可能層の導来圏と偏屈層については Achar の本がお勧めである。

- Pramod N. Achar, *Perverse Sheaves and Applications to Representation Theory* (2022). American Mathematical Society.

コホモロジー的 DT 理論に関しては以前次のサーベイを書いた:

- Tasuki Kinjo, An introduction to cohomological Donaldson-Thomas theory (2023). <https://drive.google.com/file/d/1fsbwvee0IXWsumqaF6NmDCInizH3rEhs/view>

このサーベイの予備知識パートは今も使えると思うが、後半部分のほとんどの内容がすでに古くなってしまっている。三次元カラビ・ヤウ多様体のコホモロジー的ホール代数はすでに構成されているし、コホモロジー的整数性予想もすでに定理になっている。また Joyce 予想も現在準備中の論文で証明する予定である。またこのサーベイでも本記事でもコホモロジー的 DT 理論と表現論の関係について説明することができなかった。この側面に興味がある読者はとりあえず Ben Davison の論文を片っ端から読むのがいいと思うが、次の論文が特にお勧めである:

- Ben Davison, Lucien Hennecart and Sebastian Schlegel Mejia, BPS algebras and generalised Kac-Moody algebras from 2-Calabi-Yau categories, arXiv:2303.12592

この論文は二次元カラビ・ヤウ圏の対象のモジュライ空間の BPS 層の構造を完全に決定している。この結果の一般の 0-シフトシンプレクティックスタックへの拡張が位相的 DT 理論における最重要問題の一つである。

References

- [Alp13] Jarod Alper. *Good moduli spaces for Artin stacks*. In: Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 63.6 (2013), pp. 2349–2402. ISSN: 0373-0956. URL: http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2013__63_6_2349_0.
- [AM20] Mohammed Abouzaid and Ciprian Manolescu. *A sheaf-theoretic model for $SL(2, \mathbb{C})$ Floer homology*. In: J. Eur. Math. Soc.(JEMS) 22.11 (2020), pp. 3641–3695.
- [BBJ19] Christopher Brav, Vittoria Bussi, and Dominic Joyce. *A Darboux theorem for derived schemes with shifted symplectic structure*. In: J. Amer. Math. Soc. 32.2 (2019), pp. 399–443. ISSN: 0894-0347. DOI: 10.1090/jams/910. URL: <https://doi.org/10.1090/jams/910>.
- [Beh09] Kai Behrend. *Donaldson–Thomas type invariants via microlocal geometry*. In: Annals of Mathematics (2009), pp. 1307–1338.
- [Ben+15] Oren Ben-Bassat, Christopher Brav, Vittoria Bussi, and Dominic Joyce. *A ‘Darboux theorem’ for shifted symplectic structures on derived Artin stacks, with applications*. In: Geom. Topol. 19.3 (2015), pp. 1287–1359. ISSN: 1465-3060. DOI: 10.2140/gt.2015.19.1287. URL: <https://doi.org/10.2140/gt.2015.19.1287>.

- [BF97] Kai Behrend and Barbara Fantechi. *The intrinsic normal cone*. In: *Inventiones mathematicae* 128.1 (1997), pp. 45–88.
- [BJ17] Dennis Borisov and Dominic Joyce. *Virtual fundamental classes for moduli spaces of sheaves on Calabi–Yau four-folds*. In: *Geometry & Topology* 21.6 (2017), pp. 3231–3311.
- [BKP22] Younghun Bae, Martijn Kool, and Hyeonjun Park. *Counting surfaces on Calabi–Yau 4-folds I: Foundations*. In: arXiv preprint arXiv:2208.09474 (2022).
- [Bra+15] C. Brav, V. Bussi, D. Dupont, D. Joyce, and B. Szendrői. *Symmetries and stabilization for sheaves of vanishing cycles*. In: *J. Singul.* 11 (2015). With an appendix by Jörg Schürmann, pp. 85–151. doi: 10.5427/jsing.2015.11e. URL: <https://doi.org/10.5427/jsing.2015.11e>.
- [Bri11] Tom Bridgeland. *Hall algebras and curve-counting invariants*. In: *Journal of the American Mathematical Society* 24.4 (2011), pp. 969–998.
- [Bu+25a] Chenjing Bu, Ben Davison, Andrés Ibáñez Núñez, Tasuki Kinjo, and Tudor Pădurariu. *Cohomology of symmetric stacks*. In: arXiv preprint arXiv:2502.04253 (2025).
- [Bu+25b] Chenjing Bu, Daniel Halpern-Leistner, Andrés Ibáñez Núñez, and Tasuki Kinjo. *Intrinsic Donaldson-Thomas theory. I. Component lattices of stacks*. In: arXiv preprint arXiv:2502.13892 (2025).
- [Dav13] B Davison. *The critical CoHA of a self dual quiver with potential*. In: arXiv preprint arXiv:1311.7172 (2013).
- [Dav18] Ben Davison. *Positivity for quantum cluster algebras*. In: *Annals of Mathematics* 187.1 (2018), pp. 157–219.
- [GS23] Sam Gunningham and Pavel Safronov. *Deformation quantization and perverse sheaves*. In: arXiv preprint arXiv:2312.07595 (2023).
- [GWZ20] Michael Groechenig, Dimitri Wyss, and Paul Ziegler. *Mirror symmetry for moduli spaces of Higgs bundles via p -adic integration*. In: *Inventiones mathematicae* 221.2 (2020), pp. 505–596.
- [HK25] Lucien Hennecart and Tasuki Kinjo. *The BPS decomposition theorem*. In: arXiv preprint arXiv:2509.21298 (2025).
- [HP24] James Hotchkiss and Alexander Perry. *The period–index conjecture for abelian threefolds and Donaldson-Thomas theory*. In: arXiv preprint arXiv:2405.03315 (2024).
- [HT03] Tamás Hausel and Michael Thaddeus. *Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system*. In: *Inventiones mathematicae* 153 (2003), pp. 197–229.
- [Jor22] David Jordan. *Langlands duality for skein modules of 3-manifolds*. In: *String-Math* 107.2024 (2022), p. 127.
- [Kat+25] Ludmil Katzarkov, Maxim Kontsevich, Tony Pantev, and Tony Yue Yu. *Birational invariants from Hodge structures and quantum multiplication*. In: arXiv preprint arXiv:2508.05105 (2025).
- [Kau24] Sarunas Kaubrys. *Cohomological Donaldson-Thomas theory for local systems on the 3-torus*. In: arXiv preprint arXiv:2409.16013 (2024).
- [Kha+25] Adeel A Khan, Tasuki Kinjo, Hyeonjun Park, and Pavel Safronov. *Period sheaves via perverse pullbacks*. In: arXiv preprint arXiv:2510.18610 (2025).
- [Kin22] Tasuki Kinjo. *Dimensional reduction in cohomological Donaldson–Thomas theory*. In: *Compositio Mathematica* 158.1 (2022), pp. 123–167.

- [Kon95] Maxim Kontsevich. “Enumeration of rational curves via torus actions”. In: The moduli space of curves. Springer, 1995, pp. 335–368.
- [KPS24] Tasuki Kinjo, Hyeonjun Park, and Pavel Safronov. *Cohomological Hall algebras for 3-Calabi-Yau categories*. In: arXiv preprint arXiv:2406.12838 (2024).
- [KS10] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman. *Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants*. In: arXiv preprint arXiv:1006.2706 (2010).
- [Mau+06a] Daves Maulik, Nikita Nekrasov, Andrei Okounkov, and Rahul Pandharipande. *Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, I*. In: Compositio Mathematica 142.5 (2006), pp. 1263–1285.
- [Mau+06b] Daves Maulik, Nikita Nekrasov, Andrei Okounkov, and Rahul Pandharipande. *Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory, II*. In: Compositio Mathematica 142.5 (2006), pp. 1286–1304.
- [MS21] Daves Maulik and Junliang Shen. “Endoscopic decompositions and the Hausel–Thaddeus conjecture”. In: Forum of Mathematics, Pi. Vol. 9. Cambridge University Press. 2021, e8.
- [OT23] Jeongseok Oh and Richard P Thomas. *Counting sheaves on Calabi–Yau 4-folds, I*. In: Duke Mathematical Journal 172.7 (2023), pp. 1333–1409.
- [Pan+13] Tony Pantev, Bertrand Toën, Michel Vaquié, and Gabriele Vezzosi. *Shifted symplectic structures*. In: Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117 (2013), pp. 271–328. ISSN: 0073-8301. DOI: 10.1007/s10240-013-0054-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s10240-013-0054-1>.
- [Par23] John Pardon. *Universally counting curves in Calabi–Yau threefolds*. In: arXiv preprint arXiv:2308.02948 (2023).
- [Saf21] Pavel Safronov. *Geometric Langlands program for 3-manifolds*. In: (June 2021). https://impa.br/wp-content/uploads/2021/06/StringMath2021_Slides-Pavel-Safronov.pdf. URL: https://impa.br/wp-content/uploads/2021/06/StringMath2021_Slides-Pavel-Safronov.pdf.
- [Sim92] Carlos T Simpson. *Higgs bundles and local systems*. In: Publications Mathématiques de l’IHÉS 75 (1992), pp. 5–95.
- [Tho00] Richard P Thomas. *A holomorphic Casson invariant for Calabi–Yau 3-folds, and bundles on K3 fibrations*. In: Journal of Differential Geometry 54.2 (2000), pp. 367–438.
- [Tod10] Yukinobu Toda. *Curve counting theories via stable objects I. DT/PT correspondence*. In: Journal of the American Mathematical Society 23.4 (2010), pp. 1119–1157.