

# An equivalence between the duration problem and the best choice problem for the continuous arrival time model

愛知大学・経営学部 玉置 光司 (Mitsushi Tamaki)  
Faculty of Business Administration, Aichi University

## 1 Introduction

良さに関して順位をつけることができる対象が  $n$  個出現する。 $T_i$  を順位  $i$  の対象の出現時刻とし、 $T_1, T_2, \dots, T_n$  が各々独立に時間区間  $(0, 1)$  上に一様に分布する確率変数であると仮定する。各対象は出現時にその相対順位（既に出てきた対象の中での順位）が観測される。相対順位 1 の対象の duration を、この対象の出現時刻から次の相対順位 1 の対象が出現するまでの経過時間として定義する（次の相対順位 1 が出現しない場合は、最終時刻 1 までの経過時間として定義する）。Continuous (arrival) time duration problem は、上述のフレームワークの下で duration の期待値をできる限り大きくする相対順位 1 の選択を議論する問題である。Duration problem を最初に考えたのは Ferguson et al.(1992) であるが、そこでは  $n$  個の対象が毎時 1 つずつランダムな順序で出現すると仮定した discrete (arrival) time duration problem であり、上述の continuous time duration problem は調べられていない。

2 節では t-rule の下での continuous time duration problem のパフォーマンスを調べる。t-rule とは、時刻  $t$  まで待って、それ以降に出現する最初の相対順位 1 を選ぶというルールである。この問題は既に Hu et al.(1998) によって解かれているが、ここでは別の導出を与える。3 節では random truncation time  $V$  を考慮した continuous time duration problem を扱う。 $V$  は  $T_1, T_2, \dots, T_n$  とは独立な確率変数で、プロセスが時刻  $V$  に打ち切られることを意味している。したがって、duration も時刻  $V$  までの経過時間として定義される。特に興味深いのは  $V$  の密度が

$$f(v) = m(1-v)^{m-1}, \quad 0 < v < 1 \quad (1)$$

で与えられる場合である。 $m$  は正整数を取るパラメーターで  $m = 1$  の場合は一様分布、 $m = 2$  の場合は三角分布である。4 節では対応する continuous time best choice problem のパフォーマンスを調べる。Gnedin(2005) は discrete time duration problem with random truncation と discrete time best choice problem with random truncation の等価性を議論したが、それをもたらす具体的な random truncation の分布を与えていない。本稿では continuous time model において、(1) で与えられる分布（密度）が Gnedin の等価性を与えることを示す。Duration problem 一般に関しては Samuels(2004), Gnedin(2004), Mazalov and Tamaki(2006), Pearce et al.(2012), Tamaki(2013) を参照されたい。

## 2 Continuous time duration problem

最初に次の Lemma を与える。

**Lemma 1.** 順位をつけることができる対象が  $n$  個あり、それらは各々独立に時間区間  $(0, a)$  上に一様に出現する。すなわち、 $T_i(a)$  を順位  $i$  の出現時刻とすると、 $T_1(a), T_2(a), \dots, T_n(a)$  は  $(0, a)$  上の独立一様確率変数列である。このとき、最初の対象（比較の対象がないので、これは相対順位 1 と見なされる）を選んだとき、この対象の duration の期待値  $E_n(a)$  は  $h_n = \sum_{i=1}^n 1/i$  と定義すると次式で与えられる。

$$E_n(a) = \frac{ah_n}{n+1} \quad (2)$$

**証明** 直感的に求めることもできるが、念のために証明を与える。最初の対象（これを A と呼ぶ）の出現時刻を  $X$  とすると、 $X = \min \{T_1(a), T_2(a), \dots, T_n(a)\}$  であるから、順序統計量の性質から  $X$  の密度関数  $f(x)$  は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{n}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{n-1}, \quad 0 < x < a \quad (3)$$

また

$$E[X] = \int_0^a xf(x)dx = \frac{a}{n+1} \quad (4)$$

であることにも注意されたい。最初に  $X = x$  という条件の下での A の duration の期待値  $E_n(a | x)$  を求めよう。これを求めるためにさらに A の絶対順序  $R$  で条件付けする。 $R = r$  の場合のこの値を  $E_n(a | x, r)$  と書くと、

$$E_n(a | x, r) = \frac{a-x}{r}$$

となる。なぜならば、 $R = r$  という条件の下では、残り時間区間  $a-x$  の間に A よりベターな対象がちょうど  $r-1$  個出現し、A の duration は最初のベターな対象の出現により終了するから、これは (4) より直ちに得られる。また、明らかに  $P\{R=r\} = 1/n$ ,  $1 \leq r \leq n$  であるから

$$\begin{aligned} E_n(a | x) &= \sum_{r=1}^n E_n(a | x, r) P\{R=r\} \\ &= \frac{(a-x)h_n}{n} \end{aligned} \quad (5)$$

したがって、(3)、(5) より

$$\begin{aligned} E_n(a) &= \int_0^a E_n(a | x) f(x) dx \\ &= \frac{ah_n}{n+1} \end{aligned}$$

となり、(2) を得る。

1 節で述べた continuous time duration problem に戻る。対象が  $n$  個のとき、t-rule の下での duration の期待値を  $Q_n(t)$  とすると、次のように与えられる。

**Theorem 1.**  $n \geq 2$  に対して以下が成立する。

$$\begin{aligned} (i) \quad Q_n(t) &= t \sum_{k=2}^n \frac{h_{k-1}}{k} (1-t)^k + \frac{h_n}{n+1} (1-t)^{n+1} \\ (ii) \quad Q_n(t) &\geq Q_{n+1}(t) \\ (iii) \quad Q_n(t) &\rightarrow Q(t) = \frac{1}{2} t \log^2 t \end{aligned}$$

**証明**  $t$ -rule の下での duration を  $D(t)$  で表す。また、 $R(t)$  を時刻  $t$  までに出現する対象の中で最良のものの絶対順位とする ( $t$  までに出現しない場合は便宜的に  $R(t) = n+1$  と約束する)。このとき、 $Q_n(t)$  は  $R(t)$  で条件付けることにより次のように表わされる。

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n E[D(t) \mid R(t) = k+1] P\{R(t) = k+1\} \quad (6)$$

$R(t) = k+1$  ということは、上位  $(k+1)$  個の対象の出現時刻  $T_1, T_2, \dots, T_{k+1}$  が  $T_{k+1} < t < \min\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$  を満たすことと同値であるから、 $k = 0, 1, \dots, n-1$  のとき

$$P\{R(t) = k+1\} = t(1-t)^k \quad (7)$$

である。ただし、 $R(t) = n+1$  は、全ての対象が時刻  $t$  以降に出現するので

$$P\{R(t) = n+1\} = (1-t)^n \quad (8)$$

である。他方、Lemma 1 より

$$E[D(t) \mid R(t) = k+1] = \frac{(1-t)h_k}{k+1} \quad (9)$$

である。何故ならば、 $R(t) = k+1$  という条件の下では、 $t$ -rule は上位  $k$  個の対象のうち最初に出現するものを選ぶ。また、これらの  $k$  個は互いに独立に区間  $(t, 1)$  で一様に出現する。したがって、Lemma 1 が適用できる。(7) - (9) を (6) に代入して (i) を得る。

また、(i) より直ちに次を得る。

$$\begin{aligned} Q_n(t) - Q_{n+1}(t) &= \frac{(h_n - 1)(1-t)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

これは (ii) の成立を示している。(iii) は良く知られた次の恒等式より明らか。

$$\log^2(t) = 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h_{k-1}}{k} (1-t)^k$$

Theorem 1 の結果は強力である。 $Q(t)$  は  $t = e^{-2}$  で最大となり、 $Q(e^{-2}) = 2e^{-2}$  である。したがって、出現対象数  $n (\geq 1)$  が未知であっても、 $e^{-2}$ -ルールを用いれば duration を  $2e^{-2}$  以上でできることを示している。

### 3 Duration problem with random truncation

2 節のモデルに random truncation time  $V$  を導入する。 $V$  の密度関数が (1) で与えられる場合、t-rule の下での期待 duration を求めよう。この値を、(1) のパラメーター  $m$  を反映させて  $Q_n^{(m)}(t)$  と表す。確率変数  $D(t), R(t)$  は Theorem 1 の証明で定義したものである。更に  $V$  の値で条件付けると (6) と同様に次の表現を得る。

$$Q_n^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ \int_t^1 E[D(t) | R(t) = k+1, V=v] f(v) dv \right\} P\{R(t) = k+1\} \quad (10)$$

$v > t$  のとき、

$$E[D(t) | R(t) = k+1, V=v] = \sum_{j=1}^k \frac{(v-t)h_j}{j+1} \binom{k}{j} \left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j} \quad (11)$$

である。何故ならば、 $R(t) = k+1, V=v$  という条件の下では、 $t$  以降に出現する上位  $k$  個の対象の中で、時刻  $v$  までに出現するものがちょうど  $j$  個である確率は  $\binom{k}{j} \left(\frac{v-t}{1-t}\right)^j \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k-j}$  で、この  $j$  個の中で最初に出現するものを選んだときの期待 duration が Lemma 1 より  $\frac{(v-t)h_j}{j+1}$  であることから (11) を得る。次の恒等式

$$\sum_{i=2}^{k+1} h_{i-1} \binom{k+1}{i} (x^{-1} - 1)^i = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} (x^{-i} - 1) (x^{-(k+1-i)} - 1), \quad 0 < x < 1$$

を利用すると (11) は以下のように変形される (この恒等式は  $k$  に関する帰納法で示すことができる)。

$$\begin{aligned} E[D(t) | R(t) = k+1, V=v] &= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \sum_{j=1}^k h_j \binom{k+1}{j+1} \left(\frac{v-t}{1-v}\right)^{j+1} \\ &= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \sum_{i=2}^{k+1} h_{i-1} \binom{k+1}{i} \left(\frac{1-t}{1-v} - 1\right)^i \\ &= \left(\frac{1-t}{k+1}\right) \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+1} \\ &\quad \times \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-i} - 1 \right] \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-(k+1-i)} - 1 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\int_t^1 E[D(t) | R(t) = k+1, V=v] f(v) dv \\ &= \frac{m(1-t)^m}{k+1} \int_t^1 \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+m} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-i} - 1 \right] \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-(k+1-i)} - 1 \right] dv \\ &= \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \int_0^1 x^{k+m} (x^{-i} - 1) (x^{-(k+1-i)} - 1) dx \end{aligned} \quad (13)$$

(13) の積分は次のようになる。

$$\int_0^1 x^{k+m} (x^{-i} - 1) (x^{-(k+1-i)} - 1) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \{ (x^{m-1} - x^{m-1+i}) - (x^{m+k-i} - x^{m+k}) \} dx \\
&= \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m+i} \right) - \left( \frac{1}{m+k+1-i} - \frac{1}{m+k+1} \right) \\
&= i \left[ \frac{1}{m(m+i)} - \frac{1}{(m+k+1)(m+k+1-i)} \right]
\end{aligned} \tag{14}$$

(14) を (13) に戻して

$$\begin{aligned}
&\int_t^1 E[D(t) | R(t) = k+1, V = v] f(v) dv \\
&= \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \sum_{i=1}^k \left[ \frac{1}{m(m+i)} - \frac{1}{(m+k+1)(m+k+1-i)} \right] \\
&= \frac{m(1-t)^{m+1}}{k+1} \left[ \frac{1}{m} \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j} - \frac{1}{m+k+1} \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j} \right] \\
&= \frac{(1-t)^{m+1}(h_{m+k} - h_m)}{m+k+1}
\end{aligned} \tag{15}$$

(7)、(8)、(15) を (10) に代入すると次の結果を得る。

**Theorem 3.**  $m \geq 1$  に対して次が成り立つ。

$$Q_n^{(m)}(t) = (1-t)^{m+1} \left[ t \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{h_{m+k} - h_m}{m+k+1} \right) (1-t)^k + \left( \frac{h_{m+n} - h_m}{m+n+1} \right) (1-t)^n \right] \tag{16}$$

## 4 Best choice problem with random truncation

3節と同じ設定の下で best choice problem を考えよう。これは random truncation time  $V$  までに出現した対象の中のベストを選べば勝ち、そうでなければ負けという問題である。 $V$  の密度関数が (1) で与えられる場合、t-rule の下での勝つ確率を  $P_n^{(m)}(t)$  と表す。インデケーター  $W(t)$  を

$$W(t) = \begin{cases} 1, & \text{t-rule の下で勝つ場合,} \\ 0, & \text{t-rule の下で負ける場合} \end{cases}$$

と定義すると、(10) と同様に次の表現を得る。

$$P_n^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ \int_t^1 E[W(t) | R(t) = k+1, V = v] f(v) dv \right\} P\{R(t) = k+1\} \tag{17}$$

$v > t$  のとき、

$$E[W(t) | R(t) = k+1, V = v] = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \binom{k}{j} \left( \frac{v-t}{1-t} \right)^j \left( \frac{1-v}{1-t} \right)^{k-j} \tag{18}$$

で与えられる。(11) の導出で説明したように、 $t$  以降に出現する上位  $k$  個の対象の中で、時刻  $v$  までに出現するものがちょうど  $j$  個である確率は  $\binom{k}{j} \left( \frac{v-t}{1-t} \right)^j \left( \frac{1-v}{1-t} \right)^{k-j}$  で、この  $j$  個の中で最初

に出現するものが  $j$  個の中の最良 (ベスト) である確率が  $1/j$  であることから (18) を得る。次の恒等式を利用する (これも  $k$  に関する帰納法で容易に示される)。

$$\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \binom{k}{j} (x^{-1} - 1)^j = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} (x^{-j} - 1), \quad 0 < x < 1$$

これを用いると (18) は次のように変形される。

$$\begin{aligned} E[W(t) | R(t) = k+1, V = v] &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{v-t}{1-v}\right)^j \\ &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \binom{k}{j} \left(\frac{1-t}{1-v} - 1\right)^j \\ &= \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-j} - 1 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\int_t^1 E[W(t) | R(t) = k+1, V = v] f(v) dv \\ &= m(1-t)^{m-1} \int_t^1 \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{k+m-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left[ \left(\frac{1-v}{1-t}\right)^{-j} - 1 \right] dv \\ &= m(1-t)^m \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \int_0^1 (x^{k+m-1-j} - x^{k+m-1}) dx \\ &= m(1-t)^m \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \left( \frac{1}{k+m-j} - \frac{1}{k+m} \right) \\ &= m(1-t)^m \sum_{j=1}^k \frac{1}{(k+m-j)(k+m)} \\ &= \frac{m(1-t)^m (h_{m-1+k} - h_{m-1})}{m+k} \end{aligned} \quad (20)$$

(7)、(8)、(20) を (17) に代入すると次の結果を得る。

**Theorem 4.**  $m \geq 1$  に対して次が成り立つ。

$$P_n^{(m)}(t) = m(1-t)^m \left[ t \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{h_{m-1+k} - h_{m-1}}{m+k} \right) (1-t)^k + \left( \frac{h_{m-1+n} - h_{m-1}}{m+n} \right) (1-t)^n \right]$$

Theorem 3 と 4 から次の興味深い関係が成立していることが分かる。

**Theorem 5.**  $m \geq 1$  に対して次が成り立つ。

$$P_n^{(m+1)}(t) = (m+1) Q_n^{(m)}(t)$$

## 参考文献

- [1] Ferguson, T. S., Hardwick, J. P. and Tamaki, M. (1992). Maximizing the duration of owning a relatively best object. In *Strategies for Sequential Search and Selection in Real Time*(Contemp. Math. 125), American Mathematical Society, Providence, RI, pp.37-57.
- [2] Gnedin, A.V. (2004). Best choice from the planar Poisson process, *Stoch. Process. Appl.* **111**, 317-354.
- [3] Gnedin, A.V. (2005). Objectives in the best-choice problems, *Sequential Analysis* **24**, 177-188.
- [4] Hu, M., Tamaki, M, and Ohno, K. (1998). A continuous time duration problem with an unknown number of options, *Math. Japon.* **48**,233-237.
- [5] Mazalov, V. V. and Tamaki, M. (2006). An explicit formula for the optimal gain in the full-information problem of owning a relatively best object, *J. Appl. Prob.* **43**, 87-101.
- [6] Pearce, C. E., Szajowski, K. and Tamaki, M. (2012). Duration problem with multiple exchanges *NACO* **2**, 333-355.
- [7] Samuels, S. M. (2004). Why do these quite different best-choice problems have the same solutions ? *Adv. Appl. Prob.* **36**,398-416.
- [8] Tamaki, M. (2013). Optimal stopping rule for the no-information duration problem with random horizon, to appear in *Adv. Appl. Prob.* **45**.