

Associative binary operators for quadratic rational maps

西沢 清子

NISHIZAWA, KIYOKO

城西大学理学部

JOSAI UNIV., DEPT.MATH. *

尾身 和馬

OMI, KAZUMA

城西大学大学院

JOSAI UNIV., DEPT.MATH. †

1 序

本論文は、S. Northshield の最近の論文 [1], [2] の紹介である。ここでは、 $\mathbb{C}$ 上に 2 項間作用素を導入し、この作用素についてみる。この制限でもリー群の例として意味があることに注意しておく。

2 2 次有理関数と作用素 $\oplus$

定義 1

微分可能な関数 $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ と 任意の $x, y \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して作用素 $\oplus$ を次のように定義する:

$$x \oplus y = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}$$

$x = y$ のときは、次のように定義する:

$$\lim_{y \rightarrow x} x \oplus y = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

2.1 作用素 $\oplus$ の結合律

$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ とし、 a, d が同時に 0 をとらないとする。

命題 2

2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、結合律を満たす。

注意 1

2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax + b}{cx^2 + dx + e}$ の形、2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ の形ならば、関数 $f(x)$ の付随する作用素 $\oplus$ は、結合律を満たさない。

*kiyoko@math.josai.ac.jp

†mm0202@math.josai.ac.jp

2.2 作用素 $\oplus$ の微分可能性

定理 3

$p(x) = ax^2 + bx + c$ とする。2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、微分可能であつて次式を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}$$

証明 $s(x, y) = \frac{f(x)}{x - x \oplus y} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ とする。2 次有理関数 $f(x)$ ならば $\iota = -\frac{e}{d}$, 2 次多項式 $f(x)$ ならば $\iota = \infty$ とする。どちらの場合においても $f(\iota) = \infty$ となり

$$\lim_{z \rightarrow \iota} x \oplus z = x.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{x \oplus y - x \oplus y \oplus z}{x - x \oplus z} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{x \oplus y - x \oplus y \oplus z}{f(x \oplus y)} f(x \oplus y) \frac{f(x)}{x - x \oplus z} \frac{1}{f(x)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \frac{x \oplus y - z}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} \frac{x \oplus y - z}{x - z}$$

• 関数 $f(x)$ が 2 次有理関数のとき $\iota = -\frac{e}{d}$, $f(-\frac{e}{d}) = \infty$ より

$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{\frac{f(x)}{f(z)} - 1}{\frac{f(x \oplus y)}{f(z)} - 1} = 1.$$

よつて
$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{x \oplus y - z}{x - z} = \frac{x \oplus y + \frac{e}{d}}{x + \frac{e}{d}}.$$

$$\frac{p(x)}{d} = f(x)(x + \frac{e}{d}) \text{ より } \frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} \frac{x \oplus y + \frac{e}{d}}{x + \frac{e}{d}} = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}.$$

• 関数 $f(x)$ が 2 次多項式のとき $\iota = \infty$, $f(\infty) = \infty$ より

$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{f(x) - f(z)}{f(x \oplus y) - f(z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{\frac{f(x)}{f(z)} - 1}{\frac{f(x \oplus y)}{f(z)} - 1} = 1.$$

よつて
$$\lim_{z \rightarrow \iota} \frac{s(x, z)}{s(x \oplus y, z)} = \lim_{z \rightarrow \iota} \frac{x \oplus y - z}{x - z} = 1.$$

$$\frac{p(x)}{d} = f(x) \text{ より } \frac{\partial}{\partial x}(x \oplus y) = \frac{f(x \oplus y)}{f(x)} = \frac{p(x \oplus y)}{p(x)}.$$

2.3 メビウス変換

定理 4

2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e} = \frac{p(x)}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ に対して、関数 $x \oplus k$ は、メビウス変換である。

証明 $m(x) = x \oplus k$ のシュワルツ微分 $S(m(x)) = \left(\frac{m''(x)}{m'(x)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{m''(x)}{m'(x)} \right)^2 = 0$ を計算する。

$$m'(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x \oplus k) = \frac{p(x \oplus k)}{p(x)} = \frac{p \circ m(x)}{p(x)}$$

$$\begin{aligned} m''(x) &= \frac{m'(x)p' \circ m(x)p(x) - p'(x)p \circ m(x)}{\{p(x)\}^2} = \frac{p \circ m(x)p' \circ m(x) - p \circ m(x)p'(x)}{(p(x))^2} \\ &= \frac{p \circ m(x)}{p(x)} \left(\frac{p' \circ m(x) - p'(x)}{p(x)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{m''(x)}{m'(x)} &= \frac{p \circ m(x)}{p(x)} \left(\frac{p' \circ m(x) - p'(x)}{p(x)} \right) \left(\frac{p(x)}{p \circ m(x)} \right) = \frac{p' \circ m(x) - p'(x)}{p(x)} \\ \left(\frac{m''(x)}{m'(x)} \right)' &= \frac{p(x)(p'' \circ m(x)m'(x) - p''(x)) - p'(x)(p' \circ m(x) - p'(x))}{(p(x))^2} \\ \left(\frac{m''(x)}{m'(x)} \right)^2 &= \frac{(p' \circ m(x))^2 - 2p'(x)p' \circ m(x) + (p'(x))^2}{(p(x))^2} \end{aligned}$$

これらをシュワルツ微分 $S(m(x))$ に代入すると

$$\begin{aligned} S(m(x)) &= \frac{p(x)(p'' \circ m(x)m'(x) - p''(x)) - p'(x)(p' \circ m(x) - p'(x))}{(p(x))^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{(p' \circ m(x))^2 - 2p'(x)p' \circ m(x) + (p'(x))^2}{(p(x))^2} \right\} \\ &= \frac{p \circ m(x)p'' \circ m(x) - \frac{1}{2}(p' \circ m(x))^2 - \{p''(x)p(x) - \frac{1}{2}(p'(x))^2\}}{(p(x))^2}. \end{aligned}$$

ここで $q(x) = p(x)p''(x) - \frac{1}{2}(p'(x))^2$ とすると

$$S(m(x)) = \frac{q \circ m(x) - q(x)}{(p(x))^2}.$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \text{ より } p'(x) = 2ax + b, p''(x) = 2a.$$

$$q(x) = 2a(ax^2 + bx + c) - \frac{1}{2}(2ax + b)^2 = 2ac - \frac{1}{2}b^2$$

$$q \circ m(x) - q(x) = (2ac - \frac{1}{2}b^2) - (2ac - \frac{1}{2}b^2) = 0.$$

よって

$$S(m(x)) = \frac{q \circ m(x) - q(x)}{(p(x))^2} = 0$$

より $m(x) = x \oplus k$ は、メビウス変換である。 ■

2.4 群

$Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$ とし、 $G = \overline{\mathbb{C}} - Z(f)$ とする。そのとき G は、2 次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ のもとで閉である。

命題 5

2次有理関数 $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ によって G は、アーベル群である。

証明

- 結合律については、命題 2 より成り立つ。
- 単位元の存在については、以下の通りである。

$\iota = -\frac{e}{d}$ とし、 $d = 0$ のとき $\iota = \infty$ とする。このとき $f(\iota) = \infty$ である。従って

$$x \oplus \iota = \frac{xf(\iota) - \iota f(x)}{f(\iota) - f(x)} = \frac{x - \iota \frac{f(x)}{f(\iota)}}{1 - \frac{f(x)}{f(\iota)}} = x.$$

- 任意の $k \in \overline{\mathbb{C}}$ に対しての逆元の存在は、 $x \oplus k$ がメビウス変換であることによって保証されている。 k を与え $m(x) = x \oplus k$ とし k の逆元 $k^{-1} = m^{-1}(\iota)$ とする。
- 可換であることは 2 次有理関数 $f(x)$ に付随する作用素 $\oplus$ の定義より明らかである。 ■

注意 2

群 $(G, \oplus)$ は、リー群で 1 つか 2 つ穴の空いたリーマン球面への準同型写像を持つ。

2.5 作用素 $\oplus$ に関する反復列と Root finding algorithms

定義 6

列 $\{x_n\}$ を次のように定義する： $x_1 = k, x_{n+1} = x_n \oplus k$
これを特に $k^{\oplus n}$ と表す： $k^{\oplus 1} = x, k^{\oplus n+1} = k \oplus k^{\oplus n}$

定義 7

関数 f に対し Newton 法を適用した数列 $\{T_n\}$ を次のように定義する：

$$T_1 = k, T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)}$$

定義 8

関数 f に対し Secant 法を適用した数列 $\{S_n\}$ を次のように定義する：

$$S_0 = k, S_1 = m(k), S_{n+1} = S_n - f(S_n) \frac{S_n - S_{n-1}}{f(S_n) - f(S_{n-1})}$$

定義 9

シード $(2, 3)$ で決まるフィボナッチ数列を $\{F_n\}$ とする。

定理 10

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ に付随する作用素 $\oplus$ は、次の関係式が成り立つ：

$$T_n = k^{\oplus 2^n} = x_{2^n}, S_n = k^{\oplus F_n} = x_{F_n}$$

2.6 例

例 1

$f(x) = \frac{1}{x}$ に付随する作用素 $\oplus$ の反復列は、 $k^{\oplus n} = nk$.

$$x \oplus y = \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{y} - \frac{1}{x}} = \frac{x^2 - y^2}{xy} \left(\frac{xy}{x - y} \right) = x + y.$$

例 2

$f(x) = \frac{x}{1-x}$ に付随する作用素 $\oplus$ の反復列は、 $k^{\oplus n} = k^n$.

$$x \oplus y = \frac{x \left(\frac{y}{y-1} \right) - y \left(\frac{x}{1-x} \right)}{\frac{y}{1-y} - \frac{x}{1-x}} = \frac{xy - x^2y - xy + xy^2}{y - xy - x + xy} = xy.$$

上の 2 つの例は、次のように一般化される。

定理 11

メビウス変換 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad-bc \neq 0$ に対して $x \oplus y$ は、次の形となる:

$$Axy + B(x+y) + C$$

証明

$$\begin{aligned} x \oplus y &= \frac{x \left(\frac{ay+b}{cy+d} \right) - y \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)}{\frac{ay+b}{cy+d} - \frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{x(cx+d)(ay+b) - y(ax+b)(cy+d)}{(cx+d)(ay+b) - (ax+b)(cy+d)} \\ &= \frac{acxy(x-y) + bc(x^2 - y^2) + bd(x-y)}{bc(x-y) - ad(x-y)} = \frac{1}{bc-ad} \{acxy + bc(x+y) + bd\} \end{aligned}$$

であるから

$$Axy + B(x+y) + C.$$

■

定理 12

作用素 $\oplus$ に対して $x \oplus y = xy$, $x \oplus y = x + y$ を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ は、定数倍を除き次の関数に限る:

$$f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

証明 作用素 $\oplus$ の定義より

$$\lim_{y \rightarrow x} x \oplus y = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

$x \oplus y = xy$ より

$$x \oplus x = x^2$$

であるから次の微分方程式を満たす:

$$x^2 = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

この微分方程式を解くと

$$f(x) = C \frac{x}{1-x}.$$

よって $x \oplus y = xy$ を満たす関数 $f(x)$ は、定数倍を除き $\frac{x}{1-x}$ に限る。

$g(x)$ も同様に証明される。

■

3 作用素 $\oplus$ と関数方程式

定理 13

任意の $e \in \mathbb{C}$ に対し 2 次有理関数 $f(x) = \frac{p(x)}{x-e} = \frac{ax^2+bx+c}{x-e}$ とし、群 $(G, \oplus)$ の単位元を ι とする。
 x の関数 $F(x)$ が

$$F'(x) = \frac{1}{p(x)}, \quad F(\iota) = 0$$

を満たすとき、2 次有理関数 $f(x)$ に付随する作用素 $\oplus$ と $F(x)$ は、次の関係式を満たす：

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y)$$

証明

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F(x \oplus y) &= F'(x \oplus y) \frac{\partial}{\partial x} (x \oplus y) = F'(x \oplus y) \frac{p(x \oplus y)}{p(x)} \\ &= F'(x \oplus y) \frac{F'(x)}{F'(x \oplus y)} = F'(x) \end{aligned}$$

となる。このことより関数 G に対し $F(x \oplus y) = F(x) + G(y)$ 。

作用素 $\oplus$ の定義より可換であることは明らかであるから

$$F(x \oplus y) = F(y \oplus x) = F(y) + G(x)$$

$$F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$$

となる。この等式が成り立つのは、 $F(x) - G(x) = F(y) - G(y)$ が定数のときのみである。

$$F(x) - G(x) = F(y) - G(y) = -c, \quad c: \text{定数}$$

とすると $G(y) = F(y) + c$ であるから

$$F(x \oplus y) = F(x) + G(y) = F(x) + F(y) + c.$$

$F(\iota) = 0$ より

$$x \oplus \iota = \frac{\iota F(y) - y F(\iota)}{F(y) - F(\iota)} = \frac{\iota F(y)}{F(y)} = \iota$$

となり y の値に関係なく

$$\iota \oplus y = \iota.$$

$y = \iota$ としても

$$\iota \oplus \iota = \iota$$

であるから $F(x \oplus y) = F(x) + F(y) + c$ に対し $x = \iota, y = \iota$ とすると

$$F(\iota \oplus \iota) = F(\iota) = 0$$

$$F(\iota) + F(\iota) + c = c$$

より

$$c = 0.$$

よって

$$F(x \oplus y) = F(x) + F(y).$$

関数 $m(x)$ に対して関数 $F(x)$ と $p(x) = ax^2 + bx + c$ は、よく知られている関数方程式の解である。

● 関数 $F(x)$ は、アーベル関数方程式の解である：

$$F \circ m(x) = F(x) + 1$$

● 2 次多項式 $p(x)$ は、ジュリア方程式の解である：

$$p \circ m(x) = p(x)m'(x)$$

命題 14

$\tanh^{-1} x$ は、 $f(x) = \frac{-x^2+1}{-x}$ とする群 $(G, \oplus)$ 上の $(G, +)$ への準同型写像である:

$$\tanh^{-1}(x \oplus y) = \tanh^{-1} x + \tanh^{-1} y$$

証明 $p(x) = -x^2 + 1$ より $F(x) = \int \frac{1}{-x^2+1} dx = \tanh^{-1} x + C$.

$\iota = 0$, $F(\iota) = 0$ より $C = 0$.

よって

$$F(x) = \tanh^{-1} x.$$

命題 15

$\tan^{-1} x$ は、 $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ とする群 $(G, \oplus)$ 上の $(G, +)$ への準同型写像である:

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}(x \oplus y)$$

証明 定理 13 を用いて証明できるが、正接の加法定理を用いて証明することもできる。

正接の加法定理より

$$\tan(X + Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}.$$

両辺に $\tan^{-1}$ をとると

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(\tan(X + Y)) &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}\right) \\ X + Y &= \tan^{-1}\left(\frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X \tan Y}\right) \end{aligned}$$

$\tan X = x \Leftrightarrow \tan^{-1} x = X$, $\tan Y = y \Leftrightarrow \tan^{-1} y = Y$ より

$$\begin{aligned} \tan^{-1} x + \tan^{-1} y &= \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ &= \tan^{-1}(x \oplus y). \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] S. Northshield, On Iterates of Möbius Transformations on Fields. Math. Comp. Vol. 70, 2000, pp.1305–1310.
- [2] S. Northshield, Associativity of the Secant Method. Amer. Math. Monthly Vol. 109, 2002, pp.246–257.
- [3] 西沢 清子, 尾身 和馬, Associative binary relation and rootfinding methods. 京都大学数理解析研究所講究録 1335, 2003, pp.76–83