

劣モジュラ費用集合被覆問題

岩田 覚* 永野 清仁†

概要

本稿では組合せ的な被覆制約下における非負劣モジュラ関数最小化問題を扱う。この問題は古典的な問題である頂点被覆問題、枝被覆問題、集合被覆問題を含んでいる。本研究では劣モジュラ関数の離散凸性を利用することで、これらの問題に対する近似アルゴリズムを与える。まず、劣モジュラ頂点被覆問題に対しては、緩和問題の半整数性に基づいた 2-近似アルゴリズムを与え、さらにこのアルゴリズムが劣モジュラ関数最小化を 1 回適用することで実行できることを示した。劣モジュラ費用集合被覆問題に対しては、ラウンディングアルゴリズムと主双対アルゴリズムの両方が、最大重複度が定数であると仮定した場合、定数近似アルゴリズムとなることを示した。加えて、劣モジュラ枝被覆問題の近似可能性に関する本質的に最適な下界を与えた。

1 導入部

N を要素数 n の有限集合とする。 N 上の実数値集合関数 ρ は

$$\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y), \quad X, Y \subseteq N.$$

を満たすとき劣モジュラとよばれる。組合せ最適化、ゲーム理論や機械学習など様々な分野において、劣モジュラ関数は基本的な関数であると同時に興味深い研究対象であると認識されている。さらに、劣モジュラ性と凸性は次の意味で密接に関連していることが知られている：集合関数が劣モジュラであるための必要十分条件はその Lovász 拡張が凸関数となることである [19]。劣モジュラ関数最小化に対して、最初の多項式時間アルゴリズムは Grötschel, Lovász, Schrijver [10, 11] により与えられた。彼らの手法は楕円体法に基づいている。その後、Iwata, Fleischer, Fujishige [16] と Schrijver [25] によって組合せ的なアルゴリズムが与えられている。

制約を含む劣モジュラ関数最小化は様々な文脈で研究されている。実行可能領域が $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ 分配束のとき、つまり $\mathcal{F}$ が N の部分集合族で和集合と積集合に関して閉じているとき、最小化問題は多項式時間で解ける (例えば [25] を参照されたい)。最近、Svitkina & Fleischer [27] はサイズ制約下の劣モジュラ関数最小化を扱い、近似可能性に関する下界が $o(\sqrt{n/\ln n})$ であることを証明している。

本稿では組合せ的な被覆制約下における非負劣モジュラ関数の最小化問題を扱う。以下に記述する問題は古典的な被覆問題である集合被覆問題、頂点被覆問題、枝被覆問題を一般化している。

* 京都大学数理解析研究所, E-mail: iwata@kurims.kyoto-u.ac.jp.

† 東京工業大学 情報理工学研究所, E-mail: nagano@is.titech.ac.jp.

劣モジュラ費用集合被覆問題:

U を要素数 k の有限集合とし, $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ を $N = \{1, \dots, n\}$ で添字付けされた U の部分集合族とする. $X \subseteq N$ に対し, $S_X = \bigcup \{S_i \mid i \in X\}$ と表記する. 部分集合 $X \subseteq N$ が $S_X = U$ を満たすとき, X を集合被覆とよぶ. 非負費用関数 $c: N \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 集合被覆問題とは費用 $c(X) = \sum_{i \in X} c(i)$ を最小化する集合被覆 $X \subseteq N$ を見つける問題である. この問題に対しては, 近似率が $O(\ln k)$ または最大重複度 $\eta = \max_{u \in U} |\{i \mid u \in S_i\}|$ となる多項式時間近似アルゴリズムが知られている. 非負劣モジュラ関数 $\rho: 2^N \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 劣モジュラ費用集合被覆問題を, 費用 $\rho(X)$ を最小化する集合被覆 $X \subseteq N$ を見つける問題とする.

劣モジュラ頂点被覆問題:

$G = (V, E)$ を頂点集合 V , 枝集合 E のグラフとする. 頂点部分集合 $X \subseteq V$ は, すべての枝 $e \in E$ が X の頂点のどれかに接続しているときに頂点被覆とよばれる. 非負費用関数 $c: V \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 頂点被覆問題とは費用 $c(X) = \sum_{v \in X} c(v)$ を最小化する頂点被覆 $X \subseteq V$ を見つける問題である. この問題は NP-困難であり, 効率的な 2-近似アルゴリズムが知られている [1]. 非負劣モジュラ関数 $\rho: 2^V \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 劣モジュラ頂点被覆問題を, 費用 $\rho(X)$ を最小化する頂点被覆 $X \subseteq V$ を見つける問題とする. この問題は劣モジュラ費用集合被覆問題の特殊ケースである.

劣モジュラ枝被覆問題:

$H = (W, F)$ を頂点集合 W , 枝集合 F のグラフとする. 枝部分集合 $X \subseteq F$ はすべての頂点 $v \in W$ について X の枝のどれかが接続するときに枝被覆とよばれる. 非負費用関数 $c: F \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 枝被覆問題とは費用 $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ を最小化するような枝被覆 $X \subseteq F$ を見つける問題である. この問題はグラフマッチングアルゴリズムを用いて多項式時間で解けることが知られている (例えば, [26, §19.3] を参照されたい). 非負劣モジュラ関数 $\rho: 2^F \rightarrow \mathbf{R}_+$ が与えられたとき, 劣モジュラ枝被覆問題を, 費用 $\rho(X)$ を最小化する枝被覆 $X \subseteq F$ を見つける問題とする. この問題もまた劣モジュラ費用集合被覆問題の特殊ケースである.

集合被覆問題の異なる種類の一般化で, 劣モジュラ関数をペナルティとして課せられる問題については Hayrapetyan, Swamy, Tardos [13] によって考察されている. Chudak & Nagano [3] はこの問題に対し, Lovász 拡張と Nesterov [23, 24] の非平滑凸最小化手法を用いた近似アルゴリズムを与えている. 本稿では, 劣モジュラ費用の被覆問題に対する近似アルゴリズム設計において, Lovász 拡張のさらなる効果的な利用方法を提案する.

本稿では, 劣モジュラ頂点被覆問題に対し, Lovász 拡張を用いた自然な凸計画緩和問題を導入し, その緩和問題が半整数的な最適解を持つことを証明する. これは Nemhauser & Trotter [22] の頂点被覆問題に関する結果の拡張である. この結果に従い, 劣モジュラ頂点被覆問題に対するラウンディングアルゴリズムが近似率 2 を達成することが証明できる. さらにこのアルゴリズムが分配束上の劣モジュラ関数最小化を 1 回適用することで実行できることを示す.

劣モジュラ費用集合被覆問題に対しても近似アルゴリズムを設計する. Hochbaum [14] のアルゴリズムと拡張することで, 凸計画緩和問題に関するラウンディングアルゴリズムを与えられる. さらに, Bar-Yehuda & Even [1] のアルゴリズムを拡張することで主双対アルゴリズムを与える. これらのアルゴリズムはともに同じ近似率 η を達成する.

一意ゲーム予想の仮定の下では、これらの近似率は頂点被覆問題や集合被覆問題に対しても最適である (Khot & Regev [17]).

劣モジュラ費用集合被覆問題に対しては、単純な k -近似アルゴリズムを与えることができる。興味深いことに、この k は劣モジュラ集合被覆問題に関する近似可能性の本質的にタイトな近似率となるとわかる。この結果は、劣モジュラ枝被覆問題の難しさを調べることで示される。本解析では Goemans et al. [9] や Svitkina & Fleischer [27] で用いられているテクニックと同様の手法を用い、さらに Erdős & Rényi [5] によるランダムグラフに関する結果を利用する。また、劣モジュラ枝被覆問題が NP-困難であることを示す。これは線形費用の枝被覆問題がマッチングアルゴリズムを用いて多項式時間で解けることと対照的である。

最近、Koufogiannakis & Young [18] は単調な劣モジュラ費用関数を目的関数とする集合被覆問題に対する近似アルゴリズムを与えている。彼らのアルゴリズムは本研究と同じ近似率 η を達成する。本研究では必ずしも単調でない非負劣モジュラ関数を扱っている点に注意する。

また Goel, Karande, Tripathi, Wang [8] は、本研究とは独立に、様々な組合せ的な制約下で単調な劣モジュラ関数を最小化する問題を扱っている。特に、彼らは劣モジュラ頂点被覆問題に対する楕円体法に基づく 2-近似アルゴリズムを与え、さらに 2 が最適な近似率あることを証明している。

本稿の構成は次の通りである。第 2 節では劣モジュラ関数と多面体に関する準備について記述する。第 3 節では劣モジュラ頂点被覆問題に対する効率的な 2-近似を達成するラウンディングアルゴリズムを与える。第 4 節では劣モジュラ費用集合被覆問題に対する近似アルゴリズムを記述する。最後に、第 5 節で劣モジュラ枝被覆問題に関する難しさについて議論する。

2 劣モジュラ関数と凸性

本節では劣モジュラ関数やそれに関連した多面体に関する定義を与え、さらに劣モジュラ性と凸性を結びつける Lovász 拡張について説明する。

$N = \{1, \dots, n\}$ と表記する。 $f: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ を、 $f(\emptyset) = 0$ を満たす集合関数とする。関数 f は各 $X \subseteq N$ で $f(X) \geq 0$ となるときの非負とよばれる。関数 f は $X \subseteq Y \subseteq N$ なら $f(X) \leq f(Y)$ が常に成立するときに単調とよばれる。明らかに、単調かつ $f(\emptyset) = 0$ を満たす関数 f は非負である。本稿を通じ、 $\rho: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ を $\rho(\emptyset) = 0$ を満たす非負劣モジュラ関数と仮定する。さらに、 ρ の値は関数値オラクルにより与えられると仮定する。 ρ の非負劣モジュラ性は劣加法性を導く。つまり、任意の $X, Y \subseteq N$ に対し $\rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y)$ が成立する。ベクトル $z \in \mathbf{R}^N$ と部分集合 $X \subseteq N$ に対して $z(X) = \sum_{i \in X} z(i)$ と表記する。

劣モジュラ関数 ρ について、劣モジュラ多面体 $P(\rho)$ を

$$P(\rho) = \{z \mid z \in \mathbf{R}^N, z(Y) \leq \rho(Y), \forall Y \subseteq N\}$$

と定義する。ベクトル $z \in P(\rho)$ と部分集合 $X \subseteq N$ について、 $z(X) = \rho(X)$ が成り立つとき X を z -タイトという。関数 ρ の劣モジュラ性より、任意の $z \in P(\rho)$ について z -タイトな部分集合から成る族は和集合と積集合に関して閉じることが確認できる。

劣モジュラ多面体上の線形最適化問題は Edmonds [4] の貪欲アルゴリズムによって効率的に解ける。非負ベクトル $p \in \mathbf{R}_+^N$ が与えられたとき、線形順序 $L = (i_1, \dots, i_n)$ で

$p(i_1) \geq p(i_2) \geq \dots \geq p(i_n)$ を満たすものを考える. 各 $i_j \in N$ について, $L(i_j) = \{i_1, \dots, i_j\}$ と表記する. L に関する貪欲アルゴリズムは

$$z_L(i) := \rho(L(i)) - \rho(L(i) \setminus \{i\}) \quad (1)$$

で定まるベクトル $z_L \in \mathbf{R}^N$ を出力する. ここで z_L は $P(\rho)$ の端点であり, 内積 $\langle p, z \rangle = \sum_{i \in N} p(i)z(i)$ を $z \in P(\rho)$ の範囲で最大化する. ベクトル p の異なる値を $p_1 > p_2 > \dots > p_m$ とし, 各 $j = 1, \dots, m$ について $N_j = \{i \mid p(i) \geq p_j\}$ と表記する. 便宜上 $p_{m+1} = 0$ とし, $\hat{\rho}(p)$ を

$$\hat{\rho}(p) = \sum_{j=1}^m (p_j - p_{j+1}) \rho(N_j)$$

と定義する. 関数 $\hat{\rho}: \mathbf{R}_+^N \rightarrow \mathbf{R}$ は Lovász 拡張として知られている.

上記の関数 $\hat{\rho}$ 決め方は ρ の劣モジュラ性とは関係が無いことに注意する. 一般の集合関数 $f: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ について, $\hat{f}: \mathbf{R}_+^N \rightarrow \mathbf{R}$ を同様に定義する. このとき, 任意の $X \subseteq N$ について $\hat{f}(\chi_X) = f(X)$ が成り立つ. ここで $\chi_X \in \mathbf{R}^N$ は特性ベクトル, つまり $i \in X$ について $\chi_X(i) = 1$, $i \in N \setminus X$ について $\chi_X(i) = 0$ を満たすベクトルとする. よって, $\hat{f}$ は f の自然な拡張であると解釈できる. さらに定義より, $\hat{f}$ は正斉次である, つまり任意の $\alpha > 0$ と $p \in \mathbf{R}_+^N$ について $\hat{f}(\alpha p) = \alpha \hat{f}(p)$ が成り立つ.

劣モジュラ関数の場合, 貪欲アルゴリズム [4] の正しさから

$$\hat{\rho}(p) = \max\{\langle p, z \rangle \mid z \in P(\rho)\} \quad (2)$$

が得られ, この式は $\hat{\rho}$ の凸性をただちに導く.

$\hat{f}$ を超立方体 $[0, 1]^N$ 上に制限することは次のように解釈できる. 線形順序 L は各 $i \in N$ に関する $L(i)$ と空集合の特性ベクトル, 計 $n+1$ 個のベクトルを頂点とする単体と対応する. N の線形順序は $n!$ 個あり, 超立方体 $[0, 1]^N$ は $n!$ 個の合同な単体に分割される. 各単体領域における $\hat{f}$ の関数値を頂点における値の線形補間と定める. 結果として得られる関数 $\hat{f}$ は超立方体上で連続な関数であり, またこの $\hat{f}$ は上記の定義で得られたものと一致する.

次の定理は劣モジュラ性と凸性のある種の同値関係を与える.

定理 1 (Lovász [19]) 集合関数 $f: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ について, f が劣モジュラ関数であるための必要十分条件は f の Lovász 拡張 $\hat{f}: \mathbf{R}_+^N \rightarrow \mathbf{R}$ が凸関数となることである.

3 劣モジュラ頂点被覆問題

本節では, 劣モジュラ頂点被覆問題の Lovász 拡張を用いた自然な連続緩和問題を導入する. この緩和問題がその連続最適化問題が半整数的な最適解を持つことを証明し, さらにこの半整数性に基いたラウンディングアルゴリズムが近似率 2 を達成することを示す. 加えて, 半整数的な最適解が, 分配束上の劣モジュラ関数最小化を 1 回実行することで得られることを示す.

3.1 半整数性

線形費用の頂点被覆問題に関する議論から始める。この問題は整数計画問題として記述され、さらにその LP 緩和は

$$\begin{aligned}
 (\text{LPR}) \quad & \text{Minimize} \quad \sum_{v \in V} c(v)x(v) \\
 & \text{subject to} \quad x(u) + x(v) \geq 1 \quad ((u, v) \in E) \\
 & \quad \quad \quad x(v) \geq 0 \quad (v \in V)
 \end{aligned}$$

となる。Nemhauser & Trotter [22] は緩和問題 (LPR) の端点解が半整数的であること、つまり端点解では各成分が 0, 1 または $1/2$ となることを示している。この半整数性に関する結果は次の行列に関する性質を用いてすぐに導かれる。

補題 2 ([15, Lemma 6.1]) 正則な $\{0, \pm 1\}$ -行列 A について、各行が高々 2 つの非ゼロ要素しか持たないとき、逆行列 A^{-1} は半整数的である。

緩和問題 (LPR) に関する半整数性は、頂点被覆問題に対して自然に LP ラウンディングに基づいた 2-近似アルゴリズムを導く。Bar-Yehuda & Even [22] は主双対法による線形時間の近似アルゴリズムを与えている。

頂点被覆問題と同様に変数 $x(v)$ ($v \in V$) を用いて、さらに目的関数として Lovász 拡張 $\hat{\rho}: \mathbf{R}_+^V \rightarrow \mathbf{R}_+$ を利用することで、劣モジュラ頂点被覆問題の連続緩和問題は

$$\begin{aligned}
 (\text{CPR}) \quad & \text{Minimize} \quad \hat{\rho}(x) \\
 & \text{subject to} \quad x(u) + x(v) \geq 1 \quad ((u, v) \in E) \\
 & \quad \quad \quad x(v) \geq 0 \quad (v \in V)
 \end{aligned}$$

と記述できる。頂点被覆問題の緩和問題 (LPR) と比較して、(CPR) では目的関数が線形関数から多面体的な凸関数になり複雑化しているが、興味深いことに、最適解の半整数性は依然として保たれる。

補題 3 劣モジュラ頂点被覆問題の緩和問題 (CPR) は最適解で半整数的なものを持つ。

証明: $x^\circ \in \mathbf{R}_+^V$ を緩和問題 (CPR) の最適解とし、 V の線形順序 $L = (v_1, \dots, v_n)$ で $x^\circ(v_1) \geq x^\circ(v_2) \geq \dots \geq x^\circ(v_n)$ を満たすものを選ぶ。定義より、 x° は (CPR) の許容領域を狭めることで得られる最小化問題、

$$\begin{aligned}
 (\text{SLP}) \quad & \text{Minimize} \quad \hat{\rho}(x) \\
 & \text{subject to} \quad x(u) + x(v) \geq 1 \quad ((u, v) \in E) \\
 & \quad \quad \quad x(v_j) - x(v_{j+1}) \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n-1) \\
 & \quad \quad \quad x(v_n) \geq 0
 \end{aligned}$$

の許容解かつ最適解になっている。さらに Lovász 拡張の定義より、目的関数 $\hat{\rho}$ は (SLP) の許容領域に限れば線形関数なので、問題 (SLP) は線形計画問題である。問題 (SLP) の係数行列は $\{0, \pm 1\}$ -行列で各行は高々 2 つの非ゼロ要素を持つため、補題 2 より任意の正則部分行列は半整数的な逆行列を持つ。よって、線形計画問題 (SLP) の端点最適解 x^* をとればそれは半整数的であり、同時に x^* は緩和問題 (CPR) の半整数的な最適解である。□

3.2 ラウンディングアルゴリズム

ベクトル x^* を緩和問題 (CPR) の半整数的な最適解とする. このとき $X^* := \{v \mid x^*(v) \geq \frac{1}{2}\}$ で定まる頂点部分集合は頂点被覆でとなる. 次の定理は X^* が劣モジュラ頂点被覆問題に対する 2-近似解であることを保証する.

定理 4 グラフ G における任意の頂点被覆 X について $\rho(X^*) \leq 2\rho(X)$ が成立する.

証明: $X' := \{v \mid x^*(v) = 1\}$ とすれば, 半整数的な最適解 x^* は $x^* = \frac{1}{2}\chi_{X'} + \frac{1}{2}\chi_{X^*}$ と表される. ここで, $\hat{\rho}(x^*) = \frac{1}{2}\rho(X') + \frac{1}{2}\rho(X^*) \geq \frac{1}{2}\rho(X^*)$ が成り立つ. 緩和問題 (CPR) の最適値が $\hat{\rho}(x^*)$ なので, G の任意の頂点被覆 X について, $\hat{\rho}(x^*) \leq \hat{\rho}(\chi_X) = \rho(X)$ が成り立つ. よって $\rho(X^*) \leq 2\hat{\rho}(x^*) \leq 2\rho(X)$ が得られる. $\square$

緩和問題 (CPR) の半整数的な最適解を与える組合せ的なアルゴリズムについて議論する. V^+ と V^- をそれぞれ V のコピーとする. 頂点 $v \in V$ の V^+ , V^- におけるコピーをそれぞれ $v^+ \in V^+$, $v^- \in V^-$ と表す. $X \subseteq V$ のコピーもまた $X^+ \subseteq V^+$, $X^- \subseteq V^-$ と表す. 頂点集合を V^+ と V^- のペアとする 2 部グラフ $G^\pm = (V^+, V^-; E^\pm)$ を考える. ここで枝集合は $E^\pm = \{(u^+, v^-), (v^+, u^-) \mid (u, v) \in E\}$ と定める. $G^\pm$ の頂点被覆 (X^+, Y^-) について, そのランクを $\rho(X) + \rho(Y)$ と定める. もし (X^+, Y^-) が頂点被覆なら, $(X^+ \cap Y^+, X^- \cup Y^-)$, $(X^+ \cup Y^+, X^- \cap Y^-)$ はともに頂点被覆となる.

補題 5 (X^+, Y^-) を $G^\pm$ の最小ランクの頂点被覆とする. このとき, $x = \frac{1}{2}(\chi_X + \chi_Y)$ は (CPR) の半整数的な最適解となる.

証明: 緩和問題 (CPR) の任意の半整数的な実行可能解 x に対し, 頂点部分集合のペア $X = \{v \mid x(v) = 1\}$, $Y = \{v \mid x(v) \geq \frac{1}{2}\}$ を対応させる. ここで, (X^+, Y^-) は $G^\pm$ における頂点被覆となり, $\hat{\rho}(x) = \frac{1}{2}[\rho(X) + \rho(Y)]$ が成立する. その一方で, $G^\pm$ の任意の頂点被覆 (X^+, Y^-) について, $x = \frac{1}{2}(\chi_X + \chi_Y)$ は緩和問題 (CPR) の実行可能解となり, $\hat{\rho}(x) = \frac{1}{2}[\rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y)] \leq \frac{1}{2}[\rho(X) + \rho(Y)]$ が成り立つ. 従って, $G^\pm$ における最小ランクの頂点被覆 (X^+, Y^-) を用いて $x^* = \frac{1}{2}(\chi_X + \chi_Y)$ とすれば x^* は緩和問題 (CPR) の半整数的な最適解となる. $\square$

頂点部分集合 $Z \subseteq V$ について, G において Z が隣接する頂点部分集合を $\Gamma(Z)$ とする. つまり, $\Gamma(Z) = \{v \mid \exists u \in Z \text{ s.t. } (u, v) \in E\}$ である. 任意の部分集合 $X, Y, Z \subseteq V$ で, $Z = V \setminus X$ を満たすものについて, ペア (X^+, Y^-) が $G^\pm$ における頂点被覆であるための必要十分条件は $\Gamma(Z) \subseteq Y$ となることである. $V^+ \cup V^-$ の部分集合族 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} = \{D \mid D = Z^+ \cup Y^-, \Gamma(Z) \subseteq Y\}$ と定義する. ここで, $\mathcal{D}$ は分配束である, つまり $\mathcal{D}$ は和集合と積集合に関して閉じている. (X^+, Y^-) が $G^\pm$ の頂点被覆であるための必要十分条件はある $D \in \mathcal{D}$ について $X^+ = V^+ \setminus D$ かつ $Y^- = D \cap V^-$ となることであることに注意する. 各 $D = Z^+ \cup Y^- \in \mathcal{D}$ について, 値 $f(D) := \rho(V \setminus Z) + \rho(Y)$ を割り当てる. ここで f は $\mathcal{D}$ 上の劣モジュラ関数となる. よって, 最小ランクの頂点被覆を見つける問題は, 分配束 $\mathcal{D}$ 上における劣モジュラ関数 f の最小化問題に帰着される. したがって, 補題 5 より, 緩和問題 (CPR) の半整数的な最適解は分配束上の劣モジュラ関数最小化を 1 回実行することで得られる.

4 劣モジュラ費用集合被覆問題

本節では、劣モジュラ費用集合被覆問題に対する近似アルゴリズムを与える。各 $u \in U$ について $N_u = \{i \mid u \in S_i\}$ とする。最大重複度 η は $\eta = \max\{|N_u| \mid u \in U\}$ で与えられる。もし $\eta = 2$ ならば、問題は本質的に劣モジュラ頂点被覆問題となることに注意する。

通常の集合被覆問題 (つまり $\rho = c$ の場合) は貪欲アルゴリズムが近似率 H_k を達成する (例えば [28] を参照されたい)。ここで $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} = O(\ln k)$ である。劣モジュラ費用になると、貪欲アルゴリズムの性能は、§4.1 で記述する単純な k -近似アルゴリズムよりも悪くなり得ることが容易に確認できる。

その一方で、 η を最大重複度とし、劣モジュラ費用集合被覆問題に対しては、集合被覆問題に対する LP ラウンディングアルゴリズム (Hochbaum [14]) が同じ近似率 η を達成するように拡張できる。§4.2 で与えるこの近似アルゴリズムにおいては、凸最適化問題を楕円体法を用いて解く必要がある。これを避けるべく、§4.3 では Bar-Yehuda & Even [1] の主双対近似アルゴリズムを拡張することで別の組合せ的な η -近似アルゴリズムを与える。

4.1 単純なアルゴリズム

まず単純なアルゴリズムから始める。各 $u \in U$ について、 $X_u \subseteq N$ で u を覆う部分集合 $X \subseteq N$ の中で $\rho(X)$ を最小化するものを表すこととする。ここで $X^\bullet = \bigcup_{u \in U} X_u$ で定まる部分集合 $X^\bullet$ は集合被覆となり、次の性質を満たす。

命題 6 任意の集合被覆 X について、 $\rho(X^\bullet) \leq k\rho(X)$ が成立する。

証明: X を任意の集合被覆とする。 X_u の定義から、各 $u \in U$ について $\rho(X_u) \leq \rho(X)$ となる。劣加法性から $\rho(X^\bullet) \leq \sum_{u \in U} \rho(X_u) \leq k\rho(X)$ が得られる。□

各 $u \in U$ について、 X_u は劣モジュラ関数最小化を $|N_u|$ 回実行することで求まる。従って、命題 6 より劣モジュラ費用集合被覆問題に対する強多項式時間の k -近似解法が得られた。

4.2 ラウンディングアルゴリズム

劣モジュラ費用集合被覆問題の凸計画緩和問題

$$\begin{aligned} (\text{SCP}) \quad & \text{Minimize} \quad \hat{\rho}(x) \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i \in N_u} x(i) \geq 1 \quad (u \in U) \\ & \quad \quad \quad x(i) \geq 0 \quad (i \in N) \end{aligned}$$

を考える。この問題は楕円体法を用いることで多項式時間で解ける。関数 $\rho^\circ : 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$\rho^\circ(X) = \min\{\rho(Z) \mid X \subseteq Z \subseteq N\} \quad (X \subseteq N)$$

で定義する。明らかに ρ° は単調であり、 ρ° が劣モジュラであることが知られている (例えば [7, Section 3.1(b)] を参照されたい)。定義より、任意の $X \subseteq N$ に対して $\rho(X) \geq \rho^\circ(X)$ が成り立つ。よって、任意の $x \in \mathbf{R}_+^N$ に対して $\hat{\rho}(x) \geq \hat{\rho}^\circ(x)$ となる。各 $X \subseteq N$ に対し、

$X \subseteq Z \subseteq N$ かつ $\rho(Z) = \rho^\circ(X)$ となる部分集合の唯一の (極小な) 部分集合 Z を X° で表す. このとき, 任意の $X \subseteq N$ に対して $\rho^\circ(X) = \rho(X^\circ)$ が成り立つ.

緩和問題 (SCP) の最適解を $x^* \in \mathbf{R}^N$ とする. このとき $T = \{i \mid x^*(i) \geq 1/\eta\}$ は集合被覆であり, さらに T° もまた集合被覆となる. T° は劣モジュラ関数最小化によって計算可能であることを注意する. 次の定理は T° が劣モジュラ費用集合被覆問題に対する η -近似解となることを保証する.

定理 7 任意の集合被覆 X に対し, $\rho(T^\circ) \leq \eta\rho(X)$ が成り立つ.

証明: 緩和問題 (SCP) の最適値が $\hat{\rho}(x^*)$ であることから, 任意の集合被覆 X に対し $\hat{\rho}^\circ(x^*) \leq \hat{\rho}(x^*) \leq \rho(\chi_X) = \rho(X)$ が得られる. 関数 $\hat{\rho}^\circ$ は単調かつ正斉次である. よって, 関係式 $\eta x^* \geq \chi_T$ が成り立つので, $\eta\hat{\rho}^\circ(x^*) = \hat{\rho}^\circ(\eta x^*) \geq \hat{\rho}^\circ(\chi_T) = \rho^\circ(T) = \rho(T^\circ)$ が得られる. 従って, $\rho(T^\circ) \leq \eta\rho(X)$ が得られる. $\square$

4.3 主双対アルゴリズム

緩和問題 (SCP) を用いて, 主双対アルゴリズムを与える. ベクトル $x \in \mathbf{R}_+^V$ が与えられたとき $\hat{\rho}(x) = \max\{\langle x, z \rangle \mid z \in P(\rho)\}$ となる. よって, 関数値 $\hat{\rho}(x)$ は, 変数 $\xi(X)$ ($X \subseteq N$) を用いた次の双対問題の最適値と等しい:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{X \subseteq N} \rho(X) \cdot \xi(X) \\ & \text{subject to} && \sum_{X: i \in X \subseteq N} \xi(X) = x(i) \quad (i \in N) \\ & && \xi(X) \geq 0 \quad (X \subseteq N). \end{aligned}$$

従って, 緩和問題 (SCP) は ρ の劣モジュラ性を用いて, 線形計画問題として

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \sum_{X \subseteq N} \rho(X) \cdot \xi(X) \\ & \text{subject to} && \sum_{i \in N_u} x(i) \geq 1 \quad (u \in U) \\ & && \sum_{X: i \in X \subseteq N} \xi(X) = x(i) \quad (i \in N) \\ & && \xi(X) \geq 0 \quad (X \subseteq N) \end{aligned}$$

となり, (SCP) の双対問題は劣モジュラ多面体 $P(\rho) = \{z \mid z(X) \leq \rho(X), \forall X \subseteq N\}$ を用いて

$$\begin{aligned} (\text{DCP}) \quad & \text{Maximize} && \sum_{u \in U} y(u) \\ & \text{subject to} && z \in P(\rho), \\ & && \sum_{u \in S_i} y(u) = z(i) \quad (i \in N), \\ & && y(u) \geq 0 \quad (u \in U) \end{aligned}$$

となる.

主双対アルゴリズムは (DCP) の許容解 (y, z) と z -タイトな部分集合 $T \subseteq N$ を保持する. アルゴリズムではまず $y := \mathbf{0}, z := \mathbf{0}, T := \emptyset$ とおく. 関数 ρ が $\rho(\emptyset) = 0$ を満たす非劣モジュラ関数であることから, このように初期化することで (DCP) の許容解が得られ, $z(T) = \rho(T)$ が成り立つ. アルゴリズムは T が集合被覆でない間, T で覆われない要素 $u \in U$ を選び, $y(u)$ と各 $i \in N_u$ に関する $z(i)$ を (DCP) の制約を満たすという条件の下でできる限り増加させる. さらに, アルゴリズムは T を $z(T) = \rho(T)$ となる (唯一の) 極大な部分集合に更新する. アルゴリズムはこの操作を T が集合被覆になるまで繰り返す. このアルゴリズムは厳密には以下のように記述できる.

劣モジュラ費用集合被覆問題の主双対アルゴリズム

Step 0: $y := \mathbf{0}, z := \mathbf{0}$ とおき, T を $z(T) = \rho(T)$ を満たす極大部分集合とする.

Step 1: T が集合被覆となるまで次の (1-1) から (1-4) を繰り返す:

(1-1) T で覆われていない点 $u \in U \setminus S_T$ を 1 つ選び, $Y = N_u$ とする.

(1-2) $\alpha := \max\{\lambda \mid z + \lambda \chi_Y \in P(\rho)\}$ を計算する.

(1-3) $y(u) := y(u) + \alpha, z := z + \alpha \chi_Y$ とおく.

(1-4) T を $z(T) = \rho(T)$ を満たす (唯一の) 極大部分集合とする.

Step 2: 集合被覆 T を出力する.

主双対アルゴリズムの実行中, (y, z) は常に双対問題 (DCP) の許容解である. アルゴリズムの計算量を解析する. 劣モジュラ多面体 $P(\rho)$ は 指数個の不等式により定まっているため, Step (1-2) における α の効率的な方法は自明ではない. 離散 Newton 法を用いれば劣モジュラ関数最小化と同じ計算量で α を計算できる [6, 21]. また, Step (1-4) の結果として, T が集合として狭義に大きくなることが証明できるので, 主双対アルゴリズムの反復回数は高々 n 回となる. よって主双対アルゴリズムは多項式時間で集合被覆を出力して停止する.

次の定理は劣モジュラ費用集合被覆問題の主双対近似アルゴリズムの近似率が最大重複度 η となることを保証する.

定理 8 劣モジュラ費用集合被覆問題の主双対アルゴリズムが出力する集合被覆 T と任意の集合被覆 $X \subseteq N$ について $\rho(T) \leq \eta \rho(X)$ が成立する.

証明: (y, z) をアルゴリズム終了時の (DCP) の許容解とする. 最大重複度 η の定義より, 任意の集合被覆 $X \subseteq N$ について

$$\sum_{u \in U} y(u) \leq \sum_{i \in X} \sum_{u \in S_i} y(u) \leq \eta \sum_{u \in U} y(u)$$

が成り立つ. $T \subseteq N$ が $z(T) = \rho(T)$ を満たす集合被覆であることと (y, z) の実行可能性から

$$\rho(T) = z(T) = \sum_{i \in T} \sum_{u \in S_i} y(u) \leq \eta \sum_{u \in U} y(u).$$

が得られる。その一方で、任意の集合被覆 $X \subseteq N$ に対し

$$\rho(X) \geq z(X) = \sum_{i \in X} \sum_{u \in S_i} y(u) \geq \sum_{u \in U} y(u)$$

が成立する。よって、任意の集合被覆に対し $\rho(T) \leq \eta \rho(X)$ となる。 $\square$

5 劣モジュラ枝被覆問題

この節では劣モジュラ枝被覆問題の難しさに関する結果を与える。線形費用の場合、枝被覆問題はマッチングアルゴリズムにより多項式時間で解けることが知られている。費用が劣モジュラの場合に一般化すると、問題は NP-困難となる。この証明は MIN 2-SAT 問題 [12] の NP-困難性を用いて証明できる。

定理 9 劣モジュラ枝被覆問題は NP 困難。

以下では、劣モジュラ枝被覆問題の近似不可能性について調べる。本研究の解析は Goemans et al. [9] や Svitkina & Fleischer [27] と同様の解析と似た枠組みに基づいており、さらにランダムグラフに関する結果を利用する。

§4.1 で与えられた単純なアルゴリズムは、一般の劣モジュラ費用集合被覆問題に対し近似率 k を達成する。劣モジュラ枝被覆問題については、この近似率が本質的に最適であることを示す。次の定理が本節の主結果である。

定理 10 $\varepsilon > 0$ を任意の正数とする。関数値オラクルモデルにおいて、グラフ $H = (W, F)$ における劣モジュラ枝被覆問題に対し、関数値オラクルを多項式回呼び出すアルゴリズムで、近似率が $O(|W|^{1-\varepsilon})$ となるものは存在しない。より厳密に述べると、劣モジュラ枝被覆問題に対し近似率 $o(|W|/\ln^2 |W|)$ は達成できない。

この結果からすぐ劣モジュラ費用集合被覆問題については近似率 $o(k/\ln^2 k)$ は達成できないことが導かれる。定理 10 の証明を以下で与える。近似不可能性を示すために次の補題を用いる。

補題 11 ([27, Lemma 2.1]) f_1 と f_2 を 2^N で定義された 2 つの関数とする。 f_2 はランダムビットの列 R によってパラメータ化されているが、 f_1 はそうではないとする。 R を知ることなしに $X \subseteq N$ を選ぶとき、 $f_1(X) \neq f_2(X)$ となる (R の選択に関する) 確率が $n^{-\omega(1)}$ であると仮定する。このとき、関数値オラクルを多項式回呼び出すような任意のアルゴリズムが $f_1(X^*) \neq f_2(X^*)$ を満たす $X^* \subseteq N$ を見つけれられる確率は高々 $n^{-\omega(1)}$ である。

定理 10 を証明するのに、グラフ $H = (W, F)$ と枝集合 F における二つの単調な劣モジュラ関数で次のようなものを与える：

- 関数 ρ_2 はランダム集合 $R \subseteq F$ でパラメータ化されているが、 ρ_1 はそうではない。
- R を知らなければ、 $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ を満たす $X \subseteq F$ を見つけるのが難しい。
- $i = 1, 2$ について、 H と ρ_i に関する劣モジュラ枝被覆問題の最適値を OPT_i とすると、 $3/4$ 以上の確率で $\text{OPT}_1 = \Omega(|W|)$ かつ $\text{OPT}_2 = O(\ln^2 |W|)$ が成立する。

このような準備によって、 $o(|W|/\ln^2 |W|)$ -近似アルゴリズムの存在を仮定すると、矛盾が導かれ、定理 10 が示される。

ランダムグラフ

k を偶数とし, $H = (W, F)$ を $|W| = k$ を満たす完全グラフとする. 枝集合 F の要素数は $n = \frac{1}{2}k(k-1)$ である. もし枝部分集合 $X \subseteq F$ が H の完全マッチングであれば, X は H における枝被覆である. $R \subseteq F$ を各 $e \in F$ を独立に確率 $\pi \in [0, 1]$ で選ぶことによって得られる F のランダム部分集合とする. ここで π は後で定めるパラメータである. ランダムグラフ $H_\pi = (W, R)$ についていくつかの性質を示す. $\mu = \mathbf{E}[|R|] = \frac{1}{2}k(k-1)\pi$ とおく. パラメータ π は R が高確率で完全マッチングを含むように定める. Erdős & Rényi はランダムグラフに関する次の結果を証明している (cf. [2, Theorem VII.14]).

定理 12 (Erdős & Rényi [5]) $\pi \geq (\ln k + 3 \ln \ln k)/2k$ ならば, $H_\pi = (W, R)$ が完全マッチングを持たない確率は $o(1)$.

ランダム部分集合 R のサイズを見積もるために, Bernoulli 試行の和の分布を知る必要がある. 以下の良く知られた上界は Chernoff 上界とよばれる.

補題 13 (Chernoff 上界 [20]) $\beta_1, \dots, \beta_m$ を独立な 0-1 確率変数で, $\Pr(\beta_i = 1) = \pi$ と $\Pr(\beta_i = 0) = 1 - \pi$ を満たすものとする. $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ とし $\mu_\beta = \mathbf{E}[\beta] = \pi m$ とおく. このとき $\alpha \geq 8\mu_\beta$ ならば, $\Pr(\beta \geq \alpha) \leq \exp(-\alpha)$ が成立する.

以下では, $\pi = \ln k/k$ と設定する. 定理 12 より, 整数 k_0 が存在し, 任意の $k \geq k_0$ に対して

$$\Pr(H_\pi = (W, R) \text{ は完全マッチングを持つ}) > \frac{3}{4},$$

となる. $\mu = \mathbf{E}[|R|] = \frac{1}{2}(k-1) \ln k$ なので, 補題 13 より

$$\Pr(|R| \geq 8\mu) \leq \exp(-8\mu) = \exp(-4(k-1) \ln k) = k^{-4(k-1)} \quad (3)$$

が得られる.

二つの劣モジュラ関数の比較

枝集合 F における二つの集合関数を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \rho_1(X) &= \min\{\mu, |X|\} \quad (X \subseteq F), \\ \rho_2(X) &= \min\{\mu, |X \setminus R| + \min\{36 \ln^2 k, |X \cap R|\}\} \quad (X \subseteq F). \end{aligned}$$

関数 ρ_2 はランダム集合 R によってパラメータ化されているが, ρ_1 はそうではない. R の選択とは関係なく, 任意の $X \subseteq F$ について $\rho_2(X) \leq \rho_1(X)$ となり, ρ_1 と ρ_2 はともに単調な劣モジュラ関数である. $i = 1, 2$ について, $H = (W, F)$ と ρ_i に関する劣モジュラ枝被覆問題の最適値を OPT_i と表す. 以下で見るように, OPT_1 と OPT_2 の値の差は大きい. この性質は定理 10 を示すのに重要な役割を果たす.

補題 14 $H_\pi = (W, R)$ が完全マッチングを持つならば, $\text{OPT}_1 = \Omega(k)$ かつ $\text{OPT}_2 = O(\ln^2 k)$.

証明: 任意の枝被覆 $X \subseteq F$ について $|X| \geq k/2$ が成り立つ. $\mu = \frac{1}{2}(k-1)\ln k$ より, $\text{OPT}_1 \geq \min\{\mu, k/2\} = \Omega(k)$ となる. $H_\pi = (W, R)$ が完全マッチング X を持つ場合を考える. $X \subseteq R$ なので, $\text{OPT}_2 \leq \rho_2(X) = \min\{\mu, 36\ln^2 k, k/2\} = O(\ln^2 k)$ が得られる. $\square$

十分大きい k について, H_π が完全マッチングを持つ (R の選択に関する) 確率は $\frac{3}{4}$ 以上であることに注意する.

定理 10 を示すのに重要なもうひとつの性質は, すべての $X \subseteq F$ について, $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ となる (R の選択に関する) 確率が一様に小さいことである.

補題 15 任意の部分集合 $X \subseteq F$ を固定する. R を各 $e \in F$ を独立に確率 $\pi = \ln k/k$ で選ぶことによって得られる F のランダム部分集合とする. このとき, $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ が成立する (R の選択に関する) 確率は高々 $k^{-\omega(1)}$.

証明: この主張を示すために, $|X| \geq 9\mu$ の場合と $|X| \leq 9\mu$ の場合で分けて考察する. k は十分大きいものとする.

(i) $|X| \geq 9\mu$ の場合. このとき, $|R| \leq 8\mu$ なら $\mu \leq |X \setminus R|$ となる. さらに, $\mu \leq |X \setminus R|$ なら $\rho_1(X) = \rho_2(X) = \mu$ が得られる. よって, 式 (3) より,

$$\begin{aligned} \Pr(\rho_1(X) \neq \rho_2(X)) &\leq \Pr(|R| > 8\mu) \\ &\leq k^{-4(k-1)} \\ &= k^{-\omega(1)} \end{aligned}$$

が得られる.

(ii) $|X| \leq 9\mu$ の場合. ρ_1 と ρ_2 の定義より, $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ なら $|X \cap R| > 36\ln^2 k$ となる. よって,

$$\Pr(\rho_1(X) \neq \rho_2(X)) \leq \Pr(|X \cap R| > 36\ln^2 k) \quad (4)$$

となる. 明らかに, 不等式 (4) の右辺は $|X| = \lfloor 9\mu \rfloor$ のときに X に関して最大化される. T を $|T| = \lfloor 9\mu \rfloor$ を満たす任意の F の部分集合とし, $\mu' = \mathbf{E}(|T \cap R|) = \pi \cdot \lfloor 9\mu \rfloor$ とする. $9\mu\pi = \frac{9}{2} \frac{k-1}{k} \ln^2 k$ であることから $4\ln^2 k \leq \mu' \leq \frac{9}{2} \ln^2 k$ が得られる. 補題 13 より

$$\begin{aligned} \Pr(|T \cap R| > 36\ln^2 k) &= \Pr(|T \cap R| > 8 \cdot (\frac{9}{2} \ln^2 k)) \\ &\leq \Pr(|T \cap R| > 8\mu') \\ &\leq \exp(-8\mu') \\ &\leq \exp(-32\ln^2 k) \end{aligned}$$

となる. よって, $|X| \leq 9\mu$ を満たす任意の部分集合 $X \subseteq F$ について,

$$\begin{aligned} \Pr(|X \cap R| > 36\ln^2 k) &\leq \Pr(|T \cap R| > 36\ln^2 k) \\ &\leq k^{-32\ln k} \\ &= k^{-\omega(1)} \end{aligned} \quad (5)$$

となる. 不等式 (4) と (5) より, $\Pr(\rho_1(X) \neq \rho_2(X)) \leq k^{-\omega(1)}$ が得られ, 証明が終わる. $\square$

補題 11 と補題 15 より次が得られる.

系 16 関数値オラクルを多項式回呼び出す任意のアルゴリズムが $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ を満たす部分集合 $X \subseteq F$ を見つけられる (R の選択に関する) 確率は高々 $k^{-\omega(1)}$.

近似不可能性の証明

最後に定理 10 の証明を与える.

定理 10 の証明: $k = |W|$ とおく. 矛盾を導くべく, $\gamma = o(k/\ln^2 k)$ として, 劣モジュラ枝被覆問題に対する高確率で成功するような多項式時間 γ -近似アルゴリズム $\mathcal{A}$ の存在を仮定する. 一般性を失うことなく, $\mathcal{A}$ は確率 $3/4$ 以上の確率で成功するものと仮定できる.

k が十分大きいと仮定する. ρ_2 と H に関する劣モジュラ枝被覆問題に対してアルゴリズム $\mathcal{A}$ を適用し, X を出力された枝被覆とする. アルゴリズム $\mathcal{A}$ が成功し, 同時に H_π が完全マッチングを持つ場合を考察する. この状況は少なくとも $1 - (1 - \frac{3}{4}) - (1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$ 以上の確率で起こる. 補題 14 より $\rho_1(X) \geq \text{OPT}_1 = \Omega(k)$ と $\rho_2(X) \leq \gamma \cdot \text{OPT}_2 = O(\ln^2 k \cdot \gamma) = o(k)$ が得られる. 結果として, $1/2$ 以上の確率で $\rho_1(X) \neq \rho_2(X)$ が成立する. しかし, これは系 16 に矛盾する. $\square$

謝辞

有益なコメントを頂いた Magnús Halldórsson 氏と Lex Schrijver 氏に深く感謝する.

参考文献

- [1] R. Bar-Yehuda and S. Even: A linear time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem. *J. Algorithms*, **2** (1981), pp. 198–203.
- [2] B. Bollobás: *Random Graphs*. Academic Press, 1985.
- [3] F. Chudak and K. Nagano: Efficient solutions to relaxations of combinatorial problems with submodular penalties via the Lovász extension and non-smooth convex optimization. *Proceedings of the 18th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2007), pp. 79–88.
- [4] J. Edmonds: Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. *Combinatorial Structures and Their Applications*, R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds., Gordon and Breach, 1970, pp. 69–87.
- [5] P. Erdős and A. Rényi: On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **17** (1966), pp. 359–368.
- [6] L. Fleischer and S. Iwata: A push-relabel framework for submodular function minimization and applications to parametric optimization. *Discrete Appl. Math.*, **131** (2003), pp. 311–322.
- [7] S. Fujishige: *Submodular Functions and Optimization*. Elsevier, Amsterdam, 2005.

- [8] G. Goel, C. Karande, P. Tripathi, and L. Wang: Approximability of combinatorial problems with multi-agent submodular cost functions. *Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (2009), to appear.
- [9] M. X. Goemans, N. Harvey, R. Kleinberg, and V. Mirrokni: On learning submodular functions. Manuscript, 2008.
- [10] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver: The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, **1** (1981), pp. 169–197.
- [11] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [12] D. Gusfield and L. Pitt: A bounded approximation for the minimum cost 2-sat problem. *Algorithmica*, **8** (1992), pp. 103–117.
- [13] A. Hayrapetyan, C. Swamy, and É. Tardos: Network design for information networks. *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (2005), pp. 933–942.
- [14] D. S. Hochbaum: Approximation algorithms for the set covering and vertex cover problems. *SIAM J. Comput.*, **11** (1982), pp. 555–556.
- [15] D. S. Hochbaum, N. Megiddo, J. Naor and A. Tamir: Tight bounds and 2-approximation algorithms for integer programs with two variables per inequality. *Math. Programming*, **62** (1993), pp. 69–83.
- [16] S. Iwata, L. Fleischer, and S. Fujishige: A combinatorial strongly polynomial algorithm for minimizing submodular functions. *Journal of the ACM*, **48** (2001), pp. 761–777.
- [17] S. Khot and O. Regev: Vertex cover might be hard to approximate to within $2 - \epsilon$. *Journal of Computer and System Sciences*, **74** (2008), pp. 335–349.
- [18] C. Koufogiannakis and N. Young: Greedy Δ -approximation algorithm for covering with arbitrary constraints and submodular cost. In: S. Albers *et al.* (eds.) ICALP 2009, Part I, LNCS, vol 5555, pp. 634–652.
- [19] L. Lovász: Submodular functions and convexity. *Mathematical Programming — The State of the Art*. A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, eds., Springer-Verlag, 1983, pp. 235–257.
- [20] M. Mitzenmacher and E. Upfal: *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*. Cambridge University Press, 2005.
- [21] K. Nagano: A faster parametric submodular function minimization algorithm and applications. METR 2007-43, University of Tokyo, July 2007.

- [22] G. L. Nemhauser and L. E. Trotter, Jr.: Properties of vertex packing and independence system polyhedra. *Math. Programming*, **6** (1974), pp. 48–61.
- [23] Y. Nesterov: Smooth minimization of non-smooth functions. *Math. Programming*, **103** (2005), pp. 127–152.
- [24] Y. Nesterov: Excessive gap technique in nonsmooth convex minimization. *SIAM J. Optim.*, **16** (2005), pp. 235–249.
- [25] A. Schrijver: A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time. *J. Combinatorial Theory (B)*, **80** (2000), pp. 346–355.
- [26] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization — Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, 2003.
- [27] Z. Svitkina and L. Fleischer: Submodular approximation: sampling-based algorithms and lower bounds. *Proceedings of the 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science* (2008), pp. 697–706.
- [28] V. V. Vazirani: *Approximation Algorithms*. Springer-Verlag, 2001.