

t -design と partial design

阪大 数春 野田 隆三郎

§ 1. 序

D.K. Ray - Chaudhuri and R.M. Wilson 及び P.J. Cameron の次の最近の論文 (いずれも to appear) の中の二, 三の定理を紹介するのが目的である。(論文(2)は坂内氏(東大)が入手されたものである。)

- (1) Ray - Chaudhuri and Wilson : On t -designs.
- (2) P.J. Cameron : Near regularity condition for designs.

はじめに用語の定義を述べる。

Def.1. $\mathcal{P}$ の $\mathcal{B} = \emptyset$ であるような二つの集合 $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}$ と $\mathcal{P} \times \mathcal{B}$ の部分集合 I の三つの組 $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ を incidence structure という。通常 $\mathcal{P}$ の元 p を点, $\mathcal{B}$ の元 B を block という。 $\mathcal{P} \ni p$, $\mathcal{B} \ni B$ に対し $(p, B) \in I$ なる時, p と B が incident といひ $p \in B$ と書く。

Def.2. incidence structure $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ の dual

structure $(\bar{P}, \bar{B}, \bar{I})$ とは 次の incidence structure のことである。 $\bar{P} = P$, $\bar{B} = B$, $\text{且} (p, B) \in \bar{I}$ $\Leftrightarrow (p, B) \in I$ と定義する。

Def. 3. t - (v, k, λ) design とは incidence structure $\mathcal{D} = (P, B, I)$ に対して次の条件が成り立つことを言う。

- (i) $|P| = v$.
- (ii) $B \ni^v B \Rightarrow \# \{ p \in P \mid p \in B \} = k$.
- (iii) $P^{(t)} \ni^v (p_1, p_2, \dots, p_t) \Rightarrow \# \{ B \in B \mid p_1, p_2, \dots, p_t \in B \} = \lambda$.

t - design $\mathcal{D}$ とは tactical configuration と言う。

Def. 4. class number t の partial design $(v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ とは tactical configuration (P, B, I) に対して次の条件が成り立つことを言う。

- (i) $|P| = v$, $|B| = b$.
- (ii) $B \ni^v B \Rightarrow \# \{ p \in P \mid p \in B \} = k$.
- $P \ni^v p \Rightarrow \# \{ B \in B \mid p \in B \} = r$.
- (iii) P の上には t 個の classes があり、ある association scheme が定義され、 (p, q) が i -th class に属しているならば $\# \{ B \mid p, q \in B \} = \lambda_i$ が成り立つ。 ($i = 1, 2, \dots, t$)

次の定義は一般的なものではないが便宜のため用いる：
とにする。

Def. 5. class number s の quasi partial design
($v, b, r, k, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$) とは上の定義の (i), (ii) と次の (iii)
(iii) と弱めたもの) をみたす tactical configuration を
言う。

$$(iii)' \quad \mathcal{P}^{(2)} \ni \forall (p, g) \Rightarrow \# \{ B \in \mathcal{B} \mid p, g \cap B \} = \lambda_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

但しこの場合は、 $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ と約束する。

§ 2. 二, 三の定理.

2-design における最も基本的な定理として Fischer の不
等式がよく知られていすがこの不等式の t -design への自然
な拡張として Ray-Chaudhuri と Wilson が次の不等式を
証明した。

定理 A. (Ray-Chaudhuri and Wilson)

t -(v, k, λ) design $\mathcal{D}$ ($t=2s$) において $v-1 \geq k$ が
みたされているとすると。

$$(*) \quad \binom{v}{s} \leq b \text{ が成り立つ。但し } b = \# \{ B \in \mathcal{B} \}.$$

かつ

$$\binom{v}{s} = b \Leftrightarrow \mathcal{D} \text{ の dual が class number } s \text{ の quasi partial design となる。}$$

定理 A の $\lambda = 1$ の場合が Fischer の不等式である。

Def. 6. 定理 A の等号を attain する t -design ($t=2\lambda$) を tight t -design とする。

次に定理 A とある意味で逆の方向への Fischer の不等式の拡張として class number s の partial design $(v, b, r, k, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ において $r \neq \lambda_i$ ($1 \leq i \leq s$) とみたしておれば $v \leq \binom{b}{k}$ が成り立つであろうと筆者も証明を考えていたのであるが、実はこのことは quasi partial design において正しいということと同一 Ray-Chaudhuri と Wilson が証明している。

定理 B. (Ray-Chaudhuri and Wilson).

quasi partial design $(v, b, r, k, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ において class number s の

“ $r \neq \lambda_i$ ($1 \leq i \leq s$) とみたしておれば $v \leq \binom{b}{k}$ が成り立つ。

再び $\lambda = 1$ の場合が Fischer の不等式である。なお Ray-Chaudhuri と Wilson は上の形で述べていたが定理 B は彼等の結果から直ちに従う。

最後に t -design と partial design に結びつける, P.J. Cameron の非常に興味深い定理を紹介する.

定理 C (P.J. Cameron)

$\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I) \in t\text{-}(v, k, \lambda)$ design ($t = 2(s-1)$) とする. このとき $(\mathcal{D}$ の dual $(\mathcal{B}, \mathcal{P}, \bar{I})$ が class number s の quasi partial design となすことすれば それは class number s の partial design となる.

特に tight t -design ($t = 2s$) の dual は class number s の partial design となる.

§3. 今後の問題.

1. まだ残されている一番大きな問題は定理 A の等号を attain する tight t -design ($t = 2s \geq 4$) を決定する問題であろう. 自明なもの (つまり, complete $s\text{-}(v, s, 1)$ design あるいはその complementary design) を除けば現在知られているのは $s=2$ のときの $4\text{-}(23, 7, 1)$ design だけである. この design は有名な単純群 Mathieu 群の一つに関係するもので他にこのような design が存在するかどうかは群論のオカとも非常に興味をもたれる問題である. $s > 3$ の場合はまだ何も知られていない.

2. 次に定理 B で等号を attain する quasi partial design はどのようなものであるか. 筆者の知る限り それらは定理 A で等号を attain する tight t -design の dual として与えられている. したがって定理 C により それらは皆に partial design とはしている. そこで今後の問題として次のような問題が考えられる.

問題 1. 定理 B で等号を attain する quasi partial design は partial design であるか.

問題 2. 定理 B で等号を attain する partial design は tight t -design の dual であるか.

もしこれらが正しいとすると定理 A 及び定理 B で等号を attain するものを決定する問題は全く同じ問題になるわけである.