

非回帰的空間における非放物型方程式とその応用

高村 幸男 (お茶の水女子大)
古谷希世子 (お茶の水女子大)

0. 序論

1) 関数空間

Schwartz の distribution は出現してすぐ大いに歓迎され、便利な言葉として数学全体に普及した。曖昧で分かりにくかったものを明確に易しく記述する、それが数学の進歩なのであろう。しかし、解析学とくに偏微分方程式の分野では(道具として)ソボレフ空間の方が本質的とされている。これは、弱い解を求めることよりも、強い解の詳しい性質を調べることに関心が向いていたことによるのであろう。結果として、なにが起こったか。

第一に、弱い位相を持った大きい空間には需要が少なかった。需要が全くなかった訳ではなく、Gelfand の三つ組や Lions の三つ組(名前がないが、仮にそう呼んでおく)は重要なものとして認められている。

$$F \subset H \subset F', \quad H: \text{Hilbert space},$$

ここに F は Gelfand の三つ組のときは核型可算ノルム空間、Lions の三つ組のときはバナッハ空間である。この F' で測度や非線形偏微分方程式の解を考えるのが本質的である。

第二に、精密な結果を求めるためには、(C^∞ まで行かず途中の段階の)ソボレフ空間が有用である。Grothendieck の核型空間は、Gelfand によって採り上げられ、Schwartz の distribution の抽象化として一応の意義を認められている。しかし彼のテンソル積と核型空間を結び付けた理論は、ある意味で Schwartz の distribution の理論の抽象化であるが、それ程成功した理論として認められてはいない。明快で有用な言葉を、難解な形に抽象化してもあまり歓迎されないのであろう。それと「途中の段階」でないということも大きい。

テンソル積が良く用いられているのは(バナッハ空間 X の値を取る)ベクトル測度(積分)の分野であるが、ここでも核型空間よりバナッハ空間である。発展方程式としては X としてソボレフ空間を採るが、テンソル積を X の方に適用してソボレフ空間を拡張するのが役に立つと思う。

2) テンソル積

2変数の関数 $F(x, y)$ を1変数の関数の積の和 $\sum f_j(x)g_j(y)$ として表し、関数空間 $\{F(x, y)\}$ のノルムを二つの関数空間 $\{f(x)\}, \{g(y)\}$ のノルムから導く。¹⁾ 相当の一番強いクロスノルム(テンソル積空間のノルム)が π ノルムである:

$$\|F(x, y)\|_\pi = \inf \left\{ \sum \|f_j\| \cdot \|g_j\| : F = \sum f_j \otimes g_j \right\}.$$

その共役の l^∞ 相当の一番弱いクロスノルムが ε ノルムである。 ε ノルムの方が有用であるが、直接には考えにくいので、ふつう π ノルムで考えてから共役に移す。(だからテンソル積の理論が役に立つ、と称する訳だ。)

位相ベクトル空間では、クロスセミノルムを考えてクロス位相を導入する。核型空間では二つのクロス位相は一致するが、無限次元のバナッハ空間ではクロスノルムはもちろんクロス位相も一致し

ない。テンソル積は、ソボレフ空間その他の関数空間に適用することにより、新しい関数空間を作り出す。それによりノルムの評価が可能になる。それは大いに有用である可能性がある。

I. シュレディンガー方程式

発展方程式の形

$$\frac{d}{dt}u = Au \equiv \sum A_j u, \quad A_j = i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

に書いたとき、生成作用素が各変数ごとの微分作用素の和（交換可能作用素の和）になっているから、丁度 π テンソル積に相性が良い。つまり 1 変数の空間 $X(x_j)$ でシュレディンガー方程式が適切（ A_j の生成する半群 T_t^j が等距離）であれば、 N 変数の空間 $X = X(x_1) \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi X(x_N)$ で適切（ A の生成する半群 $T_t = T_t^1 \otimes \cdots \otimes T_t^N$ が X で等距離）である。（ここに $\hat{\otimes}$ は完備化を表す。）これはそのまま共役の ε テンソル積に通用するわけだが、 ε テンソル積については自明でないと思うし、より役に立ちそうである。例えば、上の $X(x_j)$ が測度のフーリエ変換の空間であるとき、 ε テンソル積の空間 X は連続関数の空間にかなり近い。この場合

$$\tilde{X} = M(x_1) \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon M(x_N)$$

については、

$$A) \quad f \in \tilde{X}, |g| \leq |f| \implies g \in \tilde{X} \quad ,$$

が不成立であることに注意。

II. 双曲型方程式

定係数双曲型方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}u = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1}u + \cdots + A_N \frac{\partial}{\partial x_N}u, \quad A_j : n \text{ 次 Hermite 行列},$$

の場合は（シュレディンガー方程式のような可換性が無いので）テンソル積の空間を用いるために少し面倒な議論が必要となる。

1) フーリエ変換を用いる法 I

フーリエ変換した方程式

$$\frac{d}{dt}\tilde{u} = -i\xi_1 A_1 \tilde{u} - \cdots - i\xi_N A_N \tilde{u}, \quad A_j : n \text{ 次 Hermite 行列},$$

は ξ を固定したとき $\sqrt{\sum_j |\tilde{u}_j(\xi)|^2}$ を不変に保ちユニタリ群を生成する。よって、例えば空間 $\tilde{L}^p = \{u : |\tilde{u}| = \sqrt{\sum_j |\tilde{u}_j(\xi)|^2} \in L^p\}$ で適切である。（実際には L^p でなく）測度のフーリエ変換 $\tilde{M}^1$ が連続関数の空間に近く便利である。ただし測度の空間は π ノルムの構造をもち、連続関数の空間は ε ノルムの構造をもつ。それで変数の数が増すごとに差が大きくなる。そこで測度の空間の ε ノルムを考える方が有利な筈である。しかしまだ基礎的な考察が進んでいないので自由に使いこなせない。 $\tilde{L}^p, \tilde{M}^1$ などでは

$$|\tilde{f}(\xi)| \leq |\tilde{g}(\xi)| \quad \forall \xi \in R^N \implies \|f\| \leq \|g\|,$$

が成立するから考え易いが、クロスノルムを持ち出すとこの関係は保たれない。(この行き方[2]は簡単ではあるが、双曲型以外の定係数方程式に通用する。)しかし上の方法では今まで知られていた適切な空間全てを得ることができない。また条件 A) が成立するので、I で説明したシュレディンガー方程式を適切にする空間より狭い。そこで次のような工夫をする。

2) フーリエ変換を用いる法 II

シュレディンガー方程式と同じように議論するため、行列の可換表現 σ (本質的に 1 次元表現) を用いる。つまり

$$\sigma: U_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(g_1 g_2) = \sigma(g_1) \sigma(g_2) = \sigma(g_2) \sigma(g_1),$$

ここに $U_n = \{g\}$ は n 次ユニタリ行列の群である。

U_n の値を取る関数の半群 $T_t = g_t(\xi)$ を考える。(つまり $g_t(\xi)$ は各 ξ を固定したとき半群である。) その生成作用素を

$$A(\xi) = A_1(\xi_1) + \cdots + A_N(\xi_N)$$

とし、各 $A_j(\xi_j)$ が半群 T_t^j を生成するものとする。 $S_t = \sigma(T_t)$, $S_t^j = \sigma(T_t^j)$ とおく。

$$S_t = \sigma(T_t) = \sigma(\lim_{k \rightarrow \infty} \{T_{t/k}^1 \cdots T_{t/k}^N\}^k) = \sigma(T_t^1) \cdots \sigma(T_t^N) = S_t^1 \cdots S_t^N,$$

であるから S_t を用いて議論する [3]。

補題 各 S_t^j が Y_j で等距離であれば S_t は

$$Y_\pi = Y_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi Y_N, \quad Y_\varepsilon = Y_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon Y_N,$$

で等距離である。

$U_n = \{g \mid g(\xi) \in U_n, \forall \xi \in R^N\}$ とおく。半群 $\{T_t\}$ を含む部分群 $V (\subset U_n)$ を一つ固定する。(極端な場合として、 U_n 自身、もしくは A_j がエルミートであるようなすべての T_t および回転群 SO_n を含む最小の部分群の二つがある。) ベクトル $e_0 \in C^n$ を一つ固定する。 $Y \subset L_{loc}^1$ をバナッハ空間で

$$\|f(\xi)\| = \|e^{i\lambda \cdot \xi} f(\xi)\|, \quad \lambda, \xi \in R^N, f \in Y,$$

を満たすものとする。 Y の単位球を B_Y とし、 $X_B = \text{con}\{f\sigma^{-1}f/|f| : f \in Y_B\} \cdot e_0$ (ここに $\text{con}\{\cdot\}$ は凸包を表す) を単位球とするバナッハ空間を X とする。

定理 S_t が Y で等距離であれば、 T_t は X で等距離である。

前節 1) で空間 $\tilde{L}^p$ などを用いるのは 0 次元表現の場合に相当する。

A_j が可換の場合、同時対角化が可能であり、本質的に常微分方程式となる。この場合、連続関数の空間など平行移動可能な空間は適切となる。我々の理論はこのような特異なケースも包含できるといふ形式論のみならず、恐らく本質的な意味があるのだろうと思う。

3) 平行移動を用いる法

バナッハ空間に限定せず、またフーリエ変換が関数空間にならない場合も含めたい。これは定係数に限定しても関数空間の一般論の建設から出発することになり、大掛かりな議論が必要である。

抽象論としては現在進行中 [5] であるが、偏微分方程式に役に立つところまで進めるにはさらに多くの具体例の計算が必要である。この方法は、残念ながら双曲型以外には適用できない。

III. 応用

1) 非放物型方程式の混合問題

幾つかの応用があるが、元来非回帰的空間で非放物型方程式を考える我々の問題意識は、この問題 [1] から発している。 L^2 でない空間では境界条件が変わってくる。とくに斜交条件も含まれる。([4] 参照。)

2) ディラック 方程式に対する経路積分

連続関数の空間で適切であるような方程式に就いては、経路積分が測度で記述される。連続関数の空間に近い適切な空間を取れば、測度に近いもので経路積分が記述される。([3] 参照。)

3) 準線形方程式の局所解

双曲型方程式を L^2 以外の空間で論ずる必要度が高いのは非線形の場合である。2階双曲型方程式

$$\partial_i^2 u = \sum_j \partial_j a_j(x, \partial u)$$

の局所解を求めるには、普通 ∂u が連続になるよう高階の L^2 微分を用いる。我々の場合は、測度のフーリエ変換は連続であるから、2階微分が測度になる空間で考えれば局所解が得られる。高階の微分を用いたくない場合は有効である。ただし、係数 a_j には可なり強い条件が必要である。例えば、整関数 (収束半径無限大の整級数) f は測度のフーリエ変換を測度のフーリエ変換に移すことはすぐわかる。つまり

$$f(\tilde{\mu}) = \sum c_n \tilde{\mu}^n = \mathcal{F}(\sum c_n \mu * \cdots * \mu),$$

が収束する。もう少し弱い条件で論じたいが、まだ考察が進んでいない。

文献

- [1] K. Furuya and Y. Kōmura, Linear evolution equations of non-parabolic type with variable domains, Tohoku Math. J. vol. 37, no.2, (1985) 125-149.
- [2] Y. Kōmura and K. Furuya, Wave Equations in Nonreflexive Spaces, Lecture notes in Math.1540 (H. Komatsu(ed): Functional Analysis and Related Topics) Springer (1991) 235-238.
- [3] Y. Kōmura and K. Furuya, Wellposed Spaces and path integrals for Dirac Equations. (preprint)
- [4] K. Furuya, Mixed Problem for Wave Equations with Oblique Boundary Conditions. (preprint)
- [5] Y. Kōmura, Lectures on Evolution Equations. (in preparation)