

楕円型微分作用素の 一般境界値問題

東大理 井上 淳

§1. 序

1952年, I. M. Visik がその論文 “On general boundary value problems for elliptic differential operators” において考察したことを高階強楕円型微分作用素の場合に拡張し, その考えを用いて, いわゆる non-local boundary value problem を考えてみる。(Visik は, 上記の論文において 2階実変数係数の場合について述べ, その序文において, 高階の場合も同様の考察がなされるだろうと記している。) Visik の基本的な考えは 以下の様である。

H を, 可分な Hilbert 空間とし, T_0, T_0' を H における, 稠密な定義域をもった閉作用素で, 互いに共役たとする。

即ち, $f_0 \in D(T_0), g_0 \in D(T_0')$ に対し, $(T_0 f_0, g_0) = (f_0, T_0' g_0)$ が成立する。このとき, T_0' の共役作用素 $(T_0')^*$ を T_1 , T_0 のそれを $T_1' = (T_0)^*$ と定めると, $T_0 \subset T_1, T_0' \subset T_1'$ は明らか。

ここで、 T_0 及び T_0' が有界な逆をもつことを仮定すると、 $T_0 \subset \tilde{A} \subset T_1$ なる閉作用素 $\tilde{A}$ で、 $R(\tilde{A}) = H$ かつ $\tilde{A}^{-1}$ をもつような $\tilde{A}$ が少なくとも1つ存在する。(以後、このような $\tilde{A}$ を, *solvable realization* と呼ぶ). *Solvable realization* $\tilde{A}$ を1つとると、 $D(T_1) = D(T_0) + \tilde{A}^{-1}N(T_0') + N(T_1)$ と一次独立な和に分解できる。ここで、 $R(\#)$, $N(\#)$ はそれぞれ、作用素 $\#$ の値域及び零空間を表わす。又、 $T_0 \subset A \subset T_1$ なる閉作用素 A が *solvable* なる為の必要十分条件は、 $N(T_0')$ から $N(T_1)$ への有界作用素 C が存在して、 $D(A) = D(T_0) + (\tilde{A}^{-1} + C)N(T_0')$ と分解できることである。Visik の idea は、この分解を微分作用素の場合に適用することである。

Ω を $\mathbb{R}^n$ における滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域とする。 $L = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta$ を Ω における一様強楕円型微分作用素で、係数 $a_{\alpha\beta}(x)$ は $\bar{\Omega}$ で C^∞ とする。上の理論を用いる為、 L から induce される $L^2(\Omega)$ における Dirichlet 作用素が *solvable* と仮定する。即ち、 $D(A) = \mathcal{E}^m(\Omega) \cap \mathcal{E}^m(\bar{\Omega})$, $\tilde{A}f = Lf$ for $f \in D(A)$ と Dirichlet 作用素 $\tilde{A}$ を定めると、 $\tilde{A}$ は $D(A)$ から $L^2(\Omega)$ への *bijection* となる。まず $N(T_0')$ の性質を調べ、次に適当な境界作用素を導入して、 $D(A)$ (A は任意の *solvable realization*) の元に適用して *boundary condition* を導く。ここで、適当な境界作用素とは、 L が2階の場合、 $\partial f = f|_{\partial\Omega}$ for $f \in C^2(\bar{\Omega})$

及び, $\gamma_2 f = \frac{\partial}{\partial \nu} f - P \gamma_1 f$ for $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ なる作用素 γ_1, γ_2 を $D(T_1)$ に拡張したものである。ここで, $P \gamma_1 f = \frac{\partial}{\partial \nu} u$, u は $Lu=0$, $\gamma_1 u = \gamma_1 f$ なる解, ν は inner conormal を表わす。(T_0 は $L^2(\Omega)$ における L の minimal operator, T_1 は maximal operator になる。)

最後に, 上で調べた $N(T_1)$ の性質を用いて 以下の non-local boundary problem を証明する。 $L = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ を Ω における一様強楕円型微分作用素とし, solvable Dirichlet realization をもつとする。 B を $L^2(\partial\Omega)$ での有界作用素とし, 作用素 L_B を次の様に定める。

$$\begin{cases} D(L_B) = \{f \in D(T_1); \tau f \in L^2(\partial\Omega), Nf \in L^2(\partial\Omega) \text{ s.t. } Nf = B\tau f\} \\ L_B f = Lf \quad \text{for } f \in D(L_B) \end{cases}$$

ここで, τ, N は, $\tau \tilde{f} = \tilde{f}|_{\partial\Omega}$, $N\tilde{f} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_j} \cos(n, x_i)|_{\partial\Omega} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \nu}$ for $\tilde{f} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ の $D(T_1)$ への適当な拡張である。 n は内法線。このとき, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ が real とすると, L_B は $L^2(\Omega)$ において閉作用素をなし, その spectrum $\sigma(L_B)$ は, 右に開いた parabolic-like region に含まれることが分る。この事実は既に R. Beals [1] によって証明され, ここでもその方針に従って示す。 L が solvable Dirichlet realization をもつという仮定によって, $D(T_1)$ の分解が使えるので, 証明は分かり易いであろう。

§2. 作用素の拡張理論

この節は Visik [1] による。

H を可分な Hilbert 空間, T_0, T_0' を H における稠密な定義域をもった閉作用素で, 互いに形式的共役たとする。 T_0, T_0' はそれぞれ有界な逆をもつとする。即ち, 定数 K が存在して任意の $f_0 \in D(T_0)$ に対して, $\|T_0 f_0\| \geq K \|f_0\|$ 又, 任意の $g_0 \in D(T_0')$ に対して, $\|T_0' g_0\| \geq K \|g_0\|$ が成立する。 T_0' の共役作用素 $T_0'^*$ を T_1 , T_0 のそれを T_1' と定義する。

補題 1. $R(T_1) = H, R(T_1') = H$

定理 1 次の性質をみたす線型作用素 $A, T_0 \subset A \subset T_1$, が少なくとも一つ存在する。

$$1) R(A) = H$$

2) A は有界な逆をもつ。

上の定理 1 より, 次の定理はすぐに導かれる。

定理 2. T_1 の定義域 $D(T_1)$ は以下の様に分解される。

$$(2.1) \quad D(T_1) = D(T_0) + A^{-1}N(T_1') + N(T_1) \quad (\直和)$$

ここで, A は定理 1 で存在を保証された1つの作用素である。

補題 2. 上の分解 (2.1) は次の意味で連続である。 $\{f_n\}$ $n=1, 2, \dots$, を $D(T_1)$ の元とし, $f_n = f_{0n} + A^{-1}v_n + u_n$, $f_{0n} \in D(T_0)$ $v_n \in N(T_1')$, $u_n \in N(T_1)$ と分解しておく。 f_n が f_0 にグラフ位相で収束しているとする。 f_0 は $D(T_1)$ に属するから,

$f_0 = f_{00} + A^{-1}v_0 + u_0$, $f_{00} \in D(T_0)$, $v_0 \in N(T_1')$, $u_0 \in N(T_1)$ と分解できる。
このとき, f_n, v_n, u_n はそれぞれ, f_{00}, v_0, u_0 に収束する。

(証明) まず, $R(T_0) \oplus N(T_1') = H$ を注意する。 $T_1 f_n = T_1 f_{00} \oplus v_n = T_0 f_{00} \oplus v_n$ が $T_1 f_0 = T_0 f_{00} \oplus v_0$ に収束しているのだから $T_0 f_n$ は $T_0 f_{00}$ に, v_n は v_0 に収束している。 T_0 は有界な逆をもつから, f_n は f_{00} に収束している。 f_n は f_0 に収束しているのだから, u_n は u_0 に収束していることが分かる。(A^{-1} が連続なることに注意) (終)

次に、可解性の定義をしよう。

定義1. 閉作用素 A は条件 (N) を満足するとき、正規的可解といわれる。(N): h が与えられたとき, $Af = h$ を満足する $f \in D(A)$ が存在する為の必要十分条件は, h が $N(A^*)$ に直交することである。

A が正規的可解なる為の必要十分条件は, $R(A)$ が閉なることである。又, A が正規的可解ならば, A^* も正規的可解である。

定義2. 閉作用素 A は、次の条件 (R) をみたすとき、正則的可解といわれる。(R): A が正規的可解で, $\dim N(A) = \dim N(A^*) < \infty$

定義3. 閉作用素 A が (完全) 可解であるとは, $R(A) = H$ で (完全) 連続な逆をもつことである。

定理3 作用素 $A, T_0 \subset A \subset T_1$ が可解なる為の必要十分条件は、 $D(A) = D(T_0) + (\tilde{A}^{-1} + C)N(T_1')$ と直和分解されることである。ここで、 $\tilde{A}$ は定理1で存在を保証された1つの作用素、 C は $N(T_1')$ から $N(T_1)$ への連続作用素。もっと一般には、 A が正則的可解なる為の必要十分条件は、その定義域 $D(A)$ が $D(A) = D(T_0) + (\tilde{A}^{-1} + C)V + U^\perp$ と分解され、 V は $N(T_1')$ の閉部分空間、 $U^\perp$ は $N(T_1)$ の閉部分空間、 C は $D(C) = V$ から $R(C) \subset N(T_1)$ への連続作用素である。

§3. 最小作用素と最大作用素

$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ を m 階の微分作用素で、 $\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω で定義されているとする。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_i : 整数, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_j}$. L の形式的共役作用素を L' とする。 $L' = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (\overline{a_\alpha(x)} \cdot)$. $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ と仮定しておく。作用素 T_0, T_0' をそれぞれ、 $D(T_0) = C_0^\infty(\Omega)$, $T_0 u = Lu$ for $u \in D(T_0)$, $D(T_0') = \mathcal{D}(\Omega)$, $T_0' v = L'v$ for $v \in D(T_0')$ と定める。この T_0, T_0' が $L^2(\Omega)$ の中で closable なことは良く知られている。 T_0 を T_0 の $L^2(\Omega)$ での閉包とし、最小作用素という。 T_0' も同様。このとき、 $(T_0 f_0, g_0) = (f_0, T_0' g_0)$ for $f_0 \in D(T_0)$, $g_0 \in D(T_0')$ が成立することは明らか。 T_1 を T_0' の $L^2(\Omega)$ での共役作用素とし、最大作用素という。即ち、 $T_1 = (T_0)^*$ 同様、

$T_1' = T_0^*$ と定める。このとき、

定理 1 Ω を 滑らかで compact な境界 $\partial\Omega$ でおこまれた領域とする。 L を $2m$ 階一様強楕円型微分作用素, T_1 をその $L^2(\Omega)$ における最大作用素とする。 $T_2 = T_1|_{C^\infty(\bar{\Omega})}$ と定めると, T_2 の $L^2(\Omega)$ での閉包は T_1 である。但し, L の係数は滑らかとする。

定理 2 L と Ω を定理 1 と同じとする。このとき、

$$\left\{ \begin{array}{l} D(T_0) = \mathcal{D}_L^{2m}(\Omega) \\ D(T_1) = \{f \in L^2(\Omega) \cap \mathcal{E}_{L,\text{loc}}^{2m}(\Omega) ; Lf \in L^2(\Omega)\} \end{array} \right.$$

§ 4. 最大作用素の零空間

まず、良く知られた事実を記しておく。

補題 1. $\partial\Omega$ を十分滑らかとし, Ω を境界として $\partial\Omega$ をもつ領域とする。 $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ は $\mathcal{E}_L^m(\Omega)$, $m=0,1,2,\dots$ の中で稠密である。

補題 2. m を正整数とする。 n を内法線とし, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対し, $\mathcal{V}f = (\gamma_0 f, \dots, \gamma_{m-1} f)$, $\gamma_j f = \gamma_0 \left(\frac{\partial}{\partial n} \right)^j f$, $\gamma_0 f = f|_{\partial\Omega}$ と定める。 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{E}_L^m(\Omega)$ から $\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_L^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ への連続写像として拡張される。かつ、(i) $\mathcal{V}$ は surjective, (ii) kernel of $\mathcal{V} = \mathcal{D}_L^m(\Omega)$ 。

この補題 2 から ただちに, $\prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_L^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ から $\mathcal{E}_L^m(\Omega) \oplus \mathcal{D}_L^m(\Omega)$ ($\mathcal{D}_L^m(\Omega)$ の $\mathcal{E}_L^m(\Omega)$ での直交補空間) への写像 Φ が induce される。この写像 Φ は, $\varphi \in \prod_{j=0}^{m-1} \mathcal{E}_L^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ に対し, 次の方程式の解 w を

対応させるものである。即ち, $\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} w = 0$ with $\delta w = \varphi$.

第2節において考察したように, $N(\Gamma_1)$ を調べることに重要である。以後, Ω を $\mathbb{R}^n$ の領域で, 滑らかに compact な境界 $\partial\Omega$ で包まれているとする。 $L = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta$ $a_{\alpha\beta}(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ とし, 一様強楕円型とする。即ち, 正定数 δ_0 が存在して, $\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \bar{\xi}^\beta \geq \delta_0 |\xi|^{2m}$ for $x \in \bar{\Omega}$, $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$.

L の形式的共役を $L' = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \overline{a_{\beta\alpha}(x)} D^\beta$ とする。

補題3 任意の $f, g \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対して Green formula

$$(G.F.) \quad (Lf, g) - (f, L'g) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \{N_j f \bar{\gamma}_j g - \gamma_j f \overline{M_j g}\} ds$$

ここで, $N_j = b_j \delta_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} N_j^* \delta_{2m-j-k}$. b_j と $b_j^{-1} \in C^\infty(\partial\Omega)$, N_j^* は $\partial\Omega$ に tangential な $(k-1)$ 階以下の微分作用素. M_j も同様.

以後, 序で定めた Dirichlet operator $\tilde{A}$ が solvable in $L^2(\Omega)$ とする。

補題4. $\tilde{A}^* = \tilde{A}'$, $\tilde{A}'$ は L から定められた Dirichlet op.

補題5. 微分作用素 L は $\mathcal{D}_L^m(\Omega)$ から $\mathcal{D}_L^m(\Omega)$ への連続, onto の同型写像を与える。

定理1 任意の $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}) \in \prod E_L^{m-j-1/2}(\partial\Omega)$ に対して,

$u = (I - GL)\varphi$ は, $Lu = 0$, $\delta u = \varphi$ の $E_L^m(\Omega)$ における解を与える。

定理2 $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(\Gamma_1)$ は $N(\Gamma_1)$ の中で, $L^2(\Omega)$ ノルムで稠密である。

定理3. $N(T_1)$ から $\prod_{j=0}^{m-1} E_{\perp}^{-(j+1)}(\partial\Omega)$ への連続, onto な同型写像 π が存在する。 π は $C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1) \ni \tilde{u}$ に対しては, $\pi \tilde{u} = \mathcal{J} \tilde{u}$.

§5. 基本的境界作用素.

空間 $H_1 = \prod_{j=0}^{m-1} C^\infty(\partial\Omega)$ の中に, 次の様に内積を導入し, その完備化を $\mathcal{H}_1$ と記す. 任意の $\varphi, \psi \in H_1$ に対し,

$$\{\varphi, \psi\}_1 = ((I - GL)\Phi\varphi, (I - GL)\Phi\psi)$$

と定める. これが well-defined なることは, 前節定理1による.

特に, $\tilde{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1)$ に対して, $\tilde{u} = (I - GL)\Phi \mathcal{J} \tilde{u}$ に注意.

故に, 任意の $u \in N(T_1)$ に対し, $\mathcal{J}_1 u$ を $\mathcal{J}_1 u_n = \mathcal{J} u_n$, $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1)$ の極限として定めることにより, $\{\mathcal{J}_1 u, \mathcal{J}_1 v\}_1 = (u, v)$ が従う.

命題1. $\mathcal{J}_1$ は $N(T_1)$ から $\mathcal{H}_1$ への isometric, onto 作用素.

命題2. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1$ on $E_{\perp}^m(\Omega) \cap D(T_1)$.

定理1. $\mathcal{H}_1$ は $\prod_{j=0}^{m-1} E_{\perp}^{-(j+1)}(\partial\Omega)$ と同一視できる.

次に, 作用素 P を以下のように定める. 任意の $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{m-1}) \in \prod_{j=0}^{m-1} C^\infty(\partial\Omega)$ に対し, $P\varphi = Nu$, ここで $u = (I - GL)\Phi\varphi$,

$N = (N_0, \dots, N_{m-1})$, N_j は前節補題3で定義されたもの. そして

任意の $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対して, $\mathcal{J}_2 f = Nf - P\mathcal{J}_1 f$ と定義する.

2. $\mathcal{J}_2 f_0 = 0$ for $f_0 \in D(T_0) = E_{\perp}^m(\Omega)$, $\mathcal{J}_2 u = 0$ for $u \in N(T_1)$ と定める. これらが natural なることは明らか. 次に, $G\tilde{u}$,

$\tilde{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ に対して考える。まず、

命題3 $\tilde{v}, \tilde{v}' \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ に対して、

$$(\tilde{v}, \tilde{v}') = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} N_j G \tilde{v} \cdot \overline{N_j \tilde{v}'} ds$$

空間 $H_2 = \{ \mathfrak{D}_2 G \tilde{v}, \tilde{v} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1') \}$ に次の様に内積を入れその完備化を $\mathfrak{H}_2$ と記す。 $\{ \mathfrak{D}_2 G \tilde{v}, \mathfrak{D}_2 G \tilde{v}' \}_2 = (\tilde{v}, \tilde{v}')$ 。このとき、 $\mathfrak{D}_2 G \tilde{v} = N G \tilde{v}$ に注意せよ。任意の $v \in N(T_1')$ に対して、 $v_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(T_1')$ かつ $v_n \Rightarrow v$ を考え、 $\mathfrak{D}_2 G v_n$ の $\mathfrak{H}_2$ での極限を $\mathfrak{D}_2 G v$ と記す。 $\{ \mathfrak{D}_2 G v, \mathfrak{D}_2 G v' \}_2 = (v, v')$

命題4 作用素 $\mathfrak{D}_2 G$ は $N(T_1')$ を $\mathfrak{H}_2$ へ isometric, onto に対応させる。

命題5 $\mathfrak{D}_2$ は $D(T_1)$ から $\mathfrak{H}_2$ への連続写像、 $D(T_1)$ には $\frac{1}{2}$ の位相を入れておく。

定理2 空間 $\mathfrak{H}_2$ と $\prod_{j=0}^{m-1} E_L^{(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ は同一視できる。

定理3 空間 $\mathfrak{H}_2$ と $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$ と $\mathfrak{H}_1$ は互いに dual.

duality は、 $\langle \mathfrak{D}_2 G v, \overline{\mathfrak{D}_1 u'} \rangle = (v, v')$ for $v, v' \in N(T_1')$.

$\langle \mathfrak{D}_1 u, \overline{\mathfrak{D}_2 G u'} \rangle = (u, u')$ for $u, u' \in N(T_1)$ で与えられる。ここで1式の $\langle, \rangle$ は $\prod E_L^{(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ と $\prod E_L^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$, 2式の $\langle, \rangle$ は $\prod E_L^{-(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ と $\prod E_L^{(j+\frac{1}{2})}(\partial\Omega)$ の duality.

§ 6. 同次境界条件の一般形

前節の境界作用素 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ を第2節の定理3に適用して、

定理. 境界条件が $\mathcal{B}f = C\mathcal{B}f$ の形であるとき, 対応する作用素 A_C は solvable である. $D(A_C) = \{f \in D(T_1); \mathcal{B}f = C\mathcal{B}f\}$ C は $\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_1$ への有界作用素. 逆に, $T_0 \subset A \subset T_1$ なる作用素 A が solvable ならば, $\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_1$ への有界作用素 C_A が存在して, $D(A)$ の元は, $\mathcal{B}f = C_A \mathcal{B}f, f \in D(A)$ を満足している.

§ 7. non-local boundary value problem.

又を前の通りとする. $L = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$ とし, 一樣強楕円型, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) = \overline{a_{ij}(x)} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ とする. $b_i(x), c(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ も仮定. B を $L^2(\partial\Omega)$ の有界作用素として, 次の様な作用素 A_B を考える.

$$\left\{ \begin{array}{l} D(A_B) = \{f \in D(T_1); \tau f \in L^2(\partial\Omega), Nf \in L^2(\partial\Omega), Nf = B\tau f\} \\ L_B f = Lf, \text{ for } f \in D(L_B) \end{array} \right.$$

定理. L が solvable Dirichlet realization をもつとする. このとき, L_B は閉作用素で, その spectrum $\sigma(L_B)$ は右に開いた parabolic-like な領域に含まれる.

この証明の為に $\tilde{S}$ operator を導入する. 即ち.

$$\left\{ \begin{array}{l} D(\tilde{S}) = \{[f, \tau f] \mid f \in D(T_1), \tau f \in L^2(\partial\Omega), \& Nf \in L^2(\partial\Omega)\} \\ \tilde{S}[f, \tau f] = [\tau f, Nf] \end{array} \right.$$

このとき

補題1 $\mathcal{S}$ は $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ の中で稠密な定義域をもった閉作用素である。

(証明) $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ の稠密性, $[g, \varphi] \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ を $\mathcal{D}(\mathcal{S})$ に直交しているえとする。即ち, $(f, g) + (\tau f, \varphi) = 0$ $f = f_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_0)$ とおいて, $(f_0, g) = 0$. 故に $g = 0$. 次に $f = \tilde{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap N(\mathcal{T}_1)$ とおいて $\varphi = 0$ を得る。

$\mathcal{S}$ の閉性, $[f_n, \tau f_n]$ が $[f, \varphi]$ に $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ で収束しているとする。かつ $[\mathcal{T}_1 f_n, N f_n] \Rightarrow [g, \psi]$ on $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$. $\mathcal{T}_1$ の閉なることより, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$, $\mathcal{T}_1 f = g$ がたがいに従う。 τf_n が τf に $L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ の意味で収束することは知られているから, $\tau f = \varphi$. 同様にして, $N f = \psi$. かつ $\mathcal{S}[f, \varphi] = \mathcal{S}[f, \tau f] = [\mathcal{T}_1 f, N f] = [g, \psi]$

Q.E.D.

補題2 $\mathcal{S}' = \mathcal{S}^*$. $\mathcal{S}'$ は L^2 に対応する作用素, $\mathcal{S}^*$ は $\mathcal{S}$ の $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ の中での adjoint.

補題3 $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_1)$, $\tau f \in L^2(\partial\Omega)$, $N f \in L^2(\partial\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{E}_L^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

この補題の証明に, S_0 の $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$ での閉包が $\mathcal{S}$ に一致することを用いる。ここで, $\mathcal{D}(S_0) = \{[f, \tau f] \mid f \in C^\infty(\bar{\Omega})\}$, $S_0 = \mathcal{S}$ on $\mathcal{D}(S_0)$.

補題4 もし, $0 \in \rho(\mathcal{S} - B - \mathcal{R}(\lambda))$ ならば, 作用素 L_B は閉で $\lambda \in \rho(L_B)$. ここで, $B[f, \varphi] = [0, B\varphi]$, $\mathcal{R}(\lambda)[f, \varphi] = [\lambda f, 0]$ for $[f, \varphi] \in L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$

補題5. 正定数 δ_0 が存在して

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_i}) \geq \delta_0 \|f\|_1^2 - \delta_0 \|f\|_0^2 \quad \text{for } f \in E_L^1(\Omega)$$

補題6. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, C_1 が存在して

$$\|f\|_{0,\Omega}^2 \leq \varepsilon \|f\|_1^2 + \frac{C_1}{\varepsilon} \|f\|_0^2 \quad \text{for } f \in E_L^1(\Omega).$$

この2つの補題より, $0 \in \rho(\tilde{S} - B_1 - P(\sigma))$ なる σ の存在を示す. 結局, $\|(\tilde{S} - B_1 - P(\sigma))[f, \bar{f}]\| \geq C_0 \| [f, \bar{f}] \|$ なる不等式を得る. このような $\sigma \in \mathbb{R}$ の存在がわかる. 又, $(\tilde{S} - B_1 - P(\sigma))^* = \tilde{S}' - B_1^* - P(\sigma)$ なることが合から, 同様の不等式が成立する. 故に, $0 \in \rho(\tilde{S} - B_1 - P(\sigma))$ が示される.

最後に, $\sigma(L_B)$ の位置が, 次の不等式が成立する $\lambda \in \mathbb{C}$ の complement として示される. 即ち, $C = C(\lambda) > 0$ が存在して

$$|((L_B - \lambda)f, f)| \geq C \|f\|^2$$

以後の計算は R. Beals [1] と全く同じ. $D(f, f) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_i})$

$R(f, f) = \sum (b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}, f) + (c(x)f, f)$ とする. $C_0 = \max_{x \in \Omega} \{|b_i(x)|, |c(x)|\}$

とあれば, $|R(f, f)| \leq C_0 \varepsilon \|f\|_1^2 + \frac{C_0}{\varepsilon} \|f\|_0^2$

$$\begin{aligned} |((L_B - \lambda)f, f)| &= |D(f, f) + R(f, f) + \int_{\Omega} N f \bar{f} dS - \lambda \|f\|_0^2| \\ &\geq t D(f, f) + ((1-t)|c| - \sigma t) \|f\|_0^2 - |R(f, f)| - \|B\| \|f\|_{0,\Omega}^2 \quad 0 \leq t \leq 1 \\ &\geq (t\delta_0 - (\|B\| + C_0)\varepsilon) \|f\|_1^2 + ((1-t)|c| - \sigma t - \delta_0 t - \frac{C_1}{\varepsilon} - \frac{\|B\|C_0}{\varepsilon}) \|f\|_0^2 \end{aligned}$$

ここで $\lambda = \sigma + i\tau$ とおいた. $t\delta_0 = (\|B\| + C_0)\varepsilon$ と ε をとり,

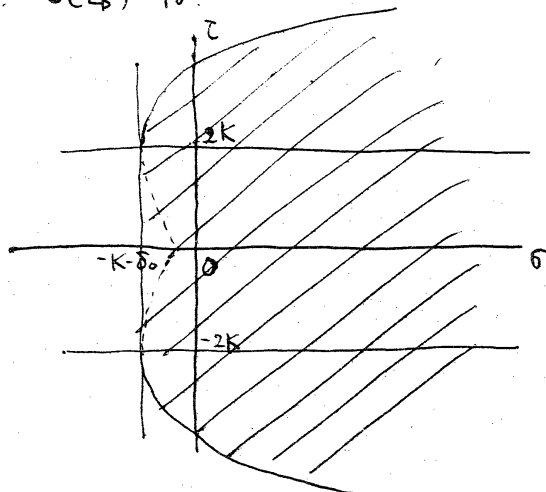
$$(1-t)|c| - (\sigma + \delta_0)t - \frac{(\|B\| + C_0)(\|B\|C_0 + C_1)}{t\delta_0} > 0 \quad \text{なる様にせよ.}$$

$K \equiv \delta_0^{-1}(\|B\| + C_0)(\|B\|C_0 + C_1)$ とおくと,

$$\sigma + \delta_0 < |\tau|(1-t)t^{-1} - Kt^{-2} = g(t)$$

$g(t)$ の最大値は $\frac{2K}{|\tau|} = t(\tau)$ とられ, $g(t(\tau)) = O(|\tau|^2 K^{-1})$ $|\tau| \rightarrow \infty$

故に, $\sigma(L_\beta)$ は



なる parabolic-like region の中にある。

References

R. Beals [1] 'Non-local boundary value problems for elliptic operators' Amer. J. Math. 87 (1965) 315-362

J.L. Lions et E. Magenes [1] 'Problèmes aux limites non homogènes IV' Scuola Norm. Sup. Pisa. 15 (1961) 311-326.

M.I. Vishik [1] 'On general boundary value problems for elliptic partial differential equations'

Amer. Math. Soc. Transl. (2) 94 107-172.