

On differentiable maps which are
not homotopic to any C^∞ stable map

山口大教養 宇藤良文

J. N. Mather の一連の論文の結果から, proper な写像の全体の中でいわゆる 'nice range' に於いては C^∞ stable proper maps は $C_{pr}^\infty(N, P)$ の中で dense であることが得られた. さらに nice range の外でも位相的な proper stable maps が dense であることも知った. そこで我々は C^∞ stable map について考え, nice range の外で C^∞ stable map がどのくらいあるかを問題とする.

問題 与えられた写像 $f: N \rightarrow P$ が C^∞ stable map には決してホモトピックにならないための位相幾何的な条件を多様体 N と P および f に関する言葉で記述せよ.

この稿では次のような結果をえる.

定理 0 N C^∞ 多様体, E C^∞ 多様体

$f: N \rightarrow E$ 連続写像, $\dim N = n$ $\dim E = p$ とする.

次のような整数 i が存在すると仮定する.

$$(1) \quad (p-n+i) \left\{ i + \frac{1}{2} i(i+1) \right\} - i^2 - (p-n+i)^2 + 1 > n \quad \text{として}$$

(2) 次の (i), (ii) の1つだけが成立する.

(i) 次の (s, t) 成分が $W_{i+s-t}(\sigma)$ である $(p-n+i)$ -
行列の行列式が零でない

$$\begin{pmatrix} W_i(\sigma) & W_{i-1}(\sigma) & \cdots & \\ & \ddots & & \\ W_{i+1}(\sigma) & & & W_{i-1}(\sigma) \\ & & & \ddots & \\ & & & & W_{i+1}(\sigma) & W_i(\sigma) \end{pmatrix}$$

(ii) $n-p$: even i : even, N と E が orientable
でありかつ、次の (s, t) 成分が $P_{\frac{i}{2}+s-t}(\sigma)$ で
ある $\frac{p-n+i}{2}$ 行列の行列式が 2-torsion の元ではな
い.

$$\begin{pmatrix} P_{\frac{i}{2}}(\sigma) & P_{\frac{i}{2}-1}(\sigma) & \cdots & \\ & \ddots & & \\ P_{\frac{i}{2}+1}(\sigma) & & & P_{\frac{i}{2}-1}(\sigma) \\ & & & \ddots & \\ & & & & P_{\frac{i}{2}+1}(\sigma) & P_{\frac{i}{2}}(\sigma) \end{pmatrix}$$

ここで $\chi = TN - f^*(TE)$.

このとき, f はいかなる C^∞ stable map にもホモトピー
ックではない (特に $P = \mathbb{R}P$ の場合には $C^\infty(N, \mathbb{R}P)$ の
中に C^∞ -stable map は存在しない).

この稿でよく使われる Thom-Boardman singularity とその性質については [2], [7], [10] を参照してほしい。さらに Thom-Boardman singularity の双対類については [1] とその文献を参照してほしい。

最初に J. Mather による結果を引用していく。 $\Theta(f_x)$ によって, germ $f: (N, x) \rightarrow (P, f(x))$ に沿った C^∞ -vector field つまり, C^∞ -germ $\xi: (N, x) \rightarrow TP$ であり, N のすべての点 x' に対して $\xi(x') \in TP_{f(x')}$ であるもののつくる集合を表わす。 $\Theta(N) = \Theta(\text{id}_N)_x$, $\Theta(P)_y = \Theta(\text{id}_P)_y$ とおく。 $tf: \Theta(N)_x \rightarrow \Theta(f)_x$ と $\omega f: \Theta(P)_{f(x)} \rightarrow \Theta(f)_x$ を $tf(\xi) = T f_* \xi$ と $\omega f(\eta) = \eta \circ f$ によって定義する。 次の定理は [5] の Theorem 4.1 の一部である。

定理 1 ([5]). $f: N \rightarrow P$ を proper C^∞ stable map とする。この時

$$(*) \quad \Theta(f)_x = tf(\Theta(N)_x) + \omega f(\Theta(P)_{f(x)})$$

がすべての N の点 x で成立。

点 x における f の階数を $n-r$ とする。 N の点 x における局所座標 $x_1, \dots, x_n$ と P の点 y における局所座標 $y_1, \dots, y_r$ を次のようにとる。

$$(*) \quad \begin{cases} y_i \circ f = x_i & i \leq n-l_1 \\ d(y_i \circ f)(x) = 0 & n-l_1 < i \leq p \end{cases}$$

ここで d は differential.

さて $\mathcal{E}$ (resp $\mathcal{E}'$) で 変数 $x_1, \dots, x_n$ (resp. $x_{n-l_1+1}, \dots, x_n$) の原点における C^∞ 関数の germ のつくる環を表わす. $\mathcal{E}'^{p-n+l_1}$ により $\mathcal{E}'$ を $(p-n+l_1)$ 回かけた積空間 $\mathcal{E}' \times \dots \times \mathcal{E}'$ とする. 次に $(\)' : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ を

$$u'(x_{n-l_1+1}, \dots, x_n) = u(0, \dots, 0, x_{n-l_1+1}, \dots, x_n)$$

で定義する. $\theta(f)$ を $\mathcal{E}^p$ と普通に同視したとき.

[4. §1] によりある射影: $\theta(f) \mapsto \mathcal{E}'^{p-n+l_1}$ が存在する. このときこの射影により $tf(\theta(N)_x) + \omega f(\theta(P)_{f(x)})$ は $\Omega(f') + [\partial f]$ に写される.

$\Omega(f')$ は次のもので生成される $\mathcal{E}'^{p-n+l_1}$ の $\mathcal{E}'$ -submodule である.

$$l_1 \text{ 個の vectors } [\partial f' / \partial x_j, \dots, \partial f_{p'}' / \partial x_j] \\ (j = n-l_1+1, \dots, n)$$

$$\mathcal{I}'(f) \times \dots \times \mathcal{I}(f')$$

$$\mathcal{I}(f) \equiv (f'_{p-n+l_1}, \dots, f'_p)$$

$[\partial f]$ は次の $(n-l_1)$ 個の vector で生成される $\mathcal{E}'^{p-n+l_1}$ の R -vector space.

$$[af_{n-l_1+1}/\partial x_j', \dots, af_p/\partial x_j']$$

$$(j = 1, \dots, n-l_1)$$

$\mathcal{E}'$ の maximal ideal を me' とかく. $\mathcal{E}'^{p-n+l_1}$ の
部分集合 V に対して, 標準的射影 $:\mathcal{E}'^{p-n+l_1} \rightarrow$
 $\mathcal{E}'^{p-n+l_1}/me'^k(\mathcal{E}'^{p-n+l_1})$ による像を $V^{(k-1)}$ とかく.

定理 2 ([4]) $k > p$. germ $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$
に対して 定理 1 の (*) が成立する



$$(*) \quad \Omega(f')^{(k-1)} + [af]^{(k-1)} \subset (me' \mathcal{E}'^{p-n+l_1})^{(k-1)}$$

この定理より germ f が stable かどうかは f の $(p+1)$
jet により依存する. (*) が germ f (k -jet of f)
に対して成立しないとき f を不定定 (nonstable) と呼ぶ.

$\Sigma(n, p)$ により, $J^k(n, p)$ ($k > p$) の nonstable
 k -jets のなす部分集合を表わす. さて $\bar{\Sigma}(n, p)$ は
定理 2 より $J^k(n, p)$ の alg. subset になる. $J_{x,y}^k(N, P)$
に対して $\bar{\Sigma}_{x,y}(N, P)$ を考え, $\bar{\Sigma}(N, P)$
 $= \bigcup_{x,y} \bar{\Sigma}_{x,y}(N, P)$ を $J^k(N, P)$ の中にくくる. 次

の定理 1 の系を得る.

系3. f が proper C^∞ stable map

$\Rightarrow$

$$j^* f(N) \cap \Sigma(N, P) = \emptyset$$

我々の目的は与えられた f に対して f とホモトピックなどんな g に対しても $j^* g(N) \cap \Sigma(N, P) \neq \emptyset$ なるための条件を得ることである。しかし $\Sigma(N, P)$ はいかにも難しい集合であるので、かわりに $\Sigma(N, P) \supset \Sigma^I(N, P)$ となる

Thom-Boardman singularity を考える。そして同様のことを考えるのである。

以下では多様体 N は閉多様体とする。さらに $I = (i)$ or (i, j) に対して Σ^I の双対類を $C^I(TN, f^*(TP))$ で表わす ([1] の定義参照)

定理4. $I = (i)$ or (i, j) N : 閉多様体.

$f: N \rightarrow P$; C^∞ 写像. ($\Sigma^I(N, P)$ が orientable のときは N と P も orientable) このとき

$\Sigma(N, P) \supset \Sigma^{(I, 0, \dots, 0)}$ であり, $C^I(TN, f^*(TP))$ も 0

であるような symbol I が存在すれば, f はいかなる

C^∞ -stable map にもホモトピックでない (特に $P = \mathbb{R}^p$ ならば $C^\infty(N, \mathbb{R}^p)$ の中に C^∞ -stable map はない.)

(証明) g を C^∞ -stable map とする. $\Xi^I(N, P)$ の Whitney's condition (b) ([9]) を持つ stratification を考えよ. $j^*g: N \rightarrow J^k(N, P)$ は stratification に transverse. だから $\Xi^I(g)$ の双対類が定義でき、それは $C^I(TN, g^*(TP))$ に等しくなる. さえもし f が上の g にホモトピックとすれば、 $\Xi(n, p) \supset \Xi^I(n, p)$ より $\Xi^I(g) = \phi$. 故に $C^I(TN, g^*(TP)) = 0$ 一方 $C^I(TN, f^*(TP)) = C^I(TN, f^*(TP))$. 仮定より後者は nonzero だから予値である. (証明)

我々は [1] で双対類と特性類で表現する方法を与えたからこれは計算可能. 故に次に $\Xi(n, p) \supset \Xi^I(n, p)$ なる条件を考えよう.

$I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$. そして $\mathcal{E}'/m_{\mathcal{E}'}^{k+1}$ のイデアル

$$J' = (x_{n-i_1+1}, \dots, x_{n-i_2})^2 + (x_{n-i_1+1}, \dots, x_{n-i_3})^3 \\ + \dots + (x_{n-i_1+1}, \dots, x_{n-i_k})^k$$

$$y_{n-i_1+1}, \dots, y_p \in J'$$

とする.

$$\text{ベクトル } [\partial g / \partial x] \equiv [\partial g_{n-i_1+1} / \partial x_1, \dots, \partial g_p / \partial x_p]$$

$y_{n-i_1+1}, \dots, y_p$ で生成されるイデアルを $J(g)$ とする.

このとき次の $\mathcal{E}'$ submodule を考える.

▽

$$\Omega(g) \equiv \varepsilon'[\partial g / \partial x_{n-l_1+1}] + \dots + \varepsilon'[\partial g / \partial x_p] \\ + \mathcal{J}(g)^{p-n+l_1}$$

$$d(I) \equiv \min \left\{ \dim_{\mathbb{R}} (m' \varepsilon'^{p-n+l_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)} \mid g_{n-l_1+1}, \dots, g_p \text{ が } \mathcal{J}' \text{ 中で動く} \right\}$$

命題 5. $k > p$, $I = (l_1, l_2, \dots, l_k)$

$$\Xi(n, p) \supset \Xi^I(n, p) \iff d(I) > n - l_1$$

(証明) まず $\Xi(n, p) \supset \Xi^I(n, p)$ を仮定する. これよ

り $\Xi(n, p) \supset \overline{\Xi^I(n, p)}$ (— は閉包). このとき $d(I)$

$\leq n - l_1$ と思うと矛盾が生じることを示す. $d(I) \leq n - l_1$

より $\mathcal{J}'$ の中にある $g_{n-l_1+1}, \dots, g_p$ が存在して

$$\dim (m' \varepsilon'^{p-n+l_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)} \leq n - l_1$$

となる. そこで $(m' \varepsilon'^{p-n+l_1})^{(k-1)} / \Omega(g)^{(k-1)}$ が $(n - l_1)$ コ

のベクトル $[\tilde{h}_{n-l_1+1}^j, \dots, \tilde{h}_p^j]$ ($1 \leq j \leq n - l_1$) を取る

と $(m' \varepsilon'^{p-n+l_1})^{(k-1)}$ の中に $[h_{n-l_1+1}^j, \dots, h_p^j]$ が存在

して標準的射影で前者のベクトルに写される. そこで

$\text{germ } f: (N, x) \rightarrow (P, f(x))$ (k -jet と書いた方が良
りか) を次の式で定義する.

$$(***) \quad \begin{cases} y_i \circ f = x_i & (i \leq n-l_1) \\ y_i \circ f = y_i + \sum_{j=1}^{n-l_1} x_j h_{ij}^j & (n-l_1 < i \leq p) \end{cases}$$

すると $\Omega(f')$ は $g_{n-l_1+1}, \dots, g_p$ のみで決まり ($= \Omega(g)$)

$[\partial f]$ は $[h_{n-l_1+1}^j, \dots, h_p^j] \quad (j=1, \dots, n-l_1)$ 上の $\mathbb{R}$ -

vector space であるから、その作り方より

$$\Omega(f') + [\partial f]^{(k-1)} = (w' \varepsilon^{(p-n+l_1)} \varepsilon^{(k-1)})$$

即ち f は stable germ となる。一方 f の作り方から f は

いわゆる Boardman ideal

$$\mathcal{I}_I = (x_1 \cdots x_{n-l_1}) + (x_1 \cdots x_{n-l_2})^2 + \cdots \\ + (x_1 \cdots x_{n-l_k})^k$$

を考えると $y_i \circ f \in \mathcal{I}_I$ for every i . 故に

$j^k f \in \bar{\Sigma}^I(n, p)$. 最初の仮定より $\bar{\Sigma}^I(n, p) \subset \bar{\Sigma}(n, p)$

だから f は nonstable germ となる。これは矛盾である。

逆に $d(I) > n-l_1$ とする。 $z \in \bar{\Sigma}^I(n, p)$ とする。 z を適当な coordinate $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ と $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p)$ の下に

$$\begin{cases} \bar{y}_i \circ f = \bar{x}_i & (i \leq n-l_1) \\ d(\bar{y}_i \circ f) = 0 & (n-l_1 < i \leq p) \end{cases}$$

とかいて良い。一方 $\bar{\Sigma}(n, p)$ と $\bar{\Sigma}^I(n, p)$ は N と P の

座標変換に関して不変だから $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ を $(x_1, \dots, x_n)$ に

$(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p)$ を $(y_1, \dots, y_p)$ に変換する座標変換を f にほどこ

したもののについて $j^k f$ が $\bar{\Sigma}(n, p)$ に入るかどうかを問題

にあることと $j^k f$ そのものについてそれを問題にすることは同値である。故に以下では $\text{germ } f$ (あるいは z) について

$$\begin{cases} g_i \circ f = x_i & (i \leq n-l_1) \\ d(g_i \circ f) = 0 & (n-l_1 \leq i \leq p) \end{cases}$$

なるものだけについて考えれば充分である。

$$\begin{aligned} & \dim (\Omega(f')^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)}) \\ & \leq \dim \Omega(f')^{(k-1)} + \dim [\partial f]^{(k-1)} \\ & \leq \dim (m' \varepsilon' p - n + l_1)^{(k-1)} - d(I) + n - l_1 \\ & < \dim (m' \varepsilon' p - n + l_1)^{(k-1)} \end{aligned}$$

故に

$$\Omega(f')^{(k-1)} + [\partial f]^{(k-1)} \subsetneq (m' \varepsilon' p - n + l_1)^{(k-1)}$$

即ち $z \in \Sigma(n, p)$. (証明終)

系 6. $k > p$, $k \geq l+1$, $I = (\underbrace{l_1, l_1, \dots, l_1}_{\ell}, 0, \dots, 0)$

に対して $(p-n+l_1) \dim (m'/m'^{l+2}) - \{l_1 + l_1^2 + (p-n+l_1)^2 - 1\} > n - l_1$ ならば $\Sigma(n, p) \supset \Sigma^I(n, p)$.

(証明略)

さて次に定理 を証明しよう。

定理 0 の証明. 系 6 で $\ell=1$ の場合を考えよと

$$(p-n+i)\{i + \frac{1}{2}i(i+1)\} - i - i^2 - (p-n+i)^2 + 1 > n-i$$

$$\Rightarrow \Sigma(n, p) \supset \Sigma(i, 0, \dots, 0)(n, p).$$

一方 [1] により $C^{\pm}(TN, f^*(TP))$ という dual class はそれぞれ、定理 0 の中の行列の行列式に等しい。ただし $i: \text{even}$, $p-n: \text{even}$ N と P orientable の場合の整係数の双対類については modulo 2-torsion で等しい。今我々はこの双対類 $C^{\pm}(TN, f^*(TP))$ が消滅しないと仮定したので定理 0 は定理 4 より導かれる。 (証明終)

例 7. $(C^{\infty}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}^n), n = 2^k \cdot a \text{ (ただし } a: \text{odd, } k \geq 2, 2^k \leq a \leq 2^{k-1}(2^k-1)) \text{ の中には } C^{\infty} \text{ stable map は存在しない})$

$$\begin{aligned} \text{(略証)} \quad W(\mathbb{R}P^n) &= (1 + W_1)^{2^k \cdot a} \\ &= (1 + W_1^{2^k})^a \\ &= 1 + a W_1^{2^k} + \dots \end{aligned}$$

定理 0 の i として 2^k を取ると

$$W_j = 0 \quad \text{for } 1 \leq j < 2^k$$

次に

$$\begin{vmatrix} W_1^{2^k} & \dots & 0 \\ W_{2^k+1} & \dots & \\ & & W_{2^k+1} W_{2^k} \end{vmatrix} = (W_1^{2^k})^{2^k} = W_1^{2^k \cdot 2^k} \neq 0$$

$$\text{系より } \Sigma(n, p) \supset \Sigma(2^k, 0, \dots, 0)(n, p).$$

このような例は $C^\infty(\mathbb{C}P^n, \mathbb{R}^{2n})$ に対しても
 Pontrjagin class を考えることにより簡単に構成することが
 できる. $P(\mathbb{C}P^n) = (1 + h_n^2)^{n+1}$, h_n は
 $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ の generator である.

今後の課題(直接的)は $d(I)$ の計算と $\Sigma(n, p)$ と
 $\Xi^{\pm}(n, p)$ を細分してできるだけうまく表現すること. もう
 1つの問題は, この稿の主旨と逆に stable map の構成を
 Gromov 型の問題に定式化することと思う.

この稿および [1] では双対類を定義する homology theory
 を singular homology theory で扱ったので多様体 N を閉多様体
 にしたが, これは N の閉の条件のかわりに map f を
 proper map の条件に置きかえることもできる.

文 献

- [1] Y. Ando, Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order two (to appear).
- [2] J. M. Boardman, Singularities of differentiable maps, Publ. Math. Inst. HES, 33 (1967), 383-419.
- [3] M. Golubitsky and V. Guillemin, Stable Mappings and their singularities, Springer Verlag, 1973.
- [4] J. N. Mather, Stability of C^∞ Mappings IV, Publ. Math. I. H. E. S., 37 (1969), 223-248.
- [5] ———, Stability of C^∞ Mappings V, Advances in Math., 4 (1970), 301-336.
- [6] ———, Stability of C^∞ Mappings VI, Springer Lecture Notes 192 (1971), 207-253.
- [7] ———, On Thom-Boardman singularities, Dynamical Systems, Academic Press, 1973, 233-248.
- [9] ———, Stratification and Mappings, *ibid.*, 195-232.
- [10] R. Thom, Les singularités des applications différentiables, Ann. Inst. Four., 6 (1955-56), 43-87.