

## Flux Line の運動 Ⅲ

— Prof. Nozieres への疑問 —

都 築 俊 夫 (京大理)

(1月20日受理)

### § 1 始めに

昨年12月に、Prof. Nozieres が来日した機会に、flux line の運動に関する彼等の議論の詳細を知ることが出来た。uniform transport current がある場合には、core の受ける力は

$$-\frac{ne}{c}(\underline{v}_{S1}-\underline{v}_L)\times\underline{\varphi}_0 \quad (1)$$

で与えられ、これが core に働く frictional drag とつり合うというのが彼等の結論の一つである。<sup>1)</sup> ここで、 $\underline{v}_L$  は core の速度、 $-ne\underline{v}_{S1}$  が transport current である。 $\varphi_0$  は磁束量子。

一方、筆者<sup>2)</sup>及び Bardeen 達<sup>3)</sup>の結論は、それらの理論の内容については必ずしも同じではないが、core に Magnus force は働かないと云うことである。更に、最近 Bardeen は uniform current がある場合には core に働く力は Lorentz force

$$-\frac{ne}{c}\underline{v}_{S1}\times\underline{\varphi}_0 \quad (2)$$

であると結論している。

この報告では、core に働く力は(2)で与えられることを示す。筆者のモデルは Nozieres のモデルと全く同一なので、なぜ Nozieres 達が(1)の結果を導いたかその原因を明らかにする。

### § 2 運動量定理

才 I 部で述べたことだが、解の一般的性質について今一度記しておく。超流体領域での基礎方程式は、London 方程式

$$\underline{\nabla} \times \underline{v}_S = \frac{e}{mc} \underline{h} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{v}_S = -\frac{e}{m} \underline{E} \quad (4)$$

$$\underline{E} = \underline{e} + \frac{1}{e} \underline{\nabla} \phi \quad (5)$$

$$\phi = \mu_S + \frac{1}{2} m v_S^2 \quad (6)$$

及び Maxwell 方程式

$$\left. \begin{aligned} \underline{\nabla} \times \underline{h} &= -\frac{4\pi ne}{c} \underline{v}_S, & \underline{\nabla} \cdot \underline{h} &= 0 \\ \underline{\nabla} \times \underline{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{h}, & \underline{\nabla} \cdot \underline{e} &= 4\pi \rho = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7)の才一式と(4)から

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0 \quad (8)$$

だから、電場  $\underline{e}$  のタテ成分は  $\phi$  の勾配と釣り合うように決まる。ところで、vector pot.  $\underline{A}$  と scalar pot.  $\Psi$  を用いて

$$\underline{h} = \underline{\nabla} \times \underline{A}, \quad \underline{e} = -\underline{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underline{A} \quad (9)$$

場の量が  $\underline{r} - \underline{v}_L t$  の関数とすると

$$\underline{e} = -\frac{1}{c} \underline{v}_L \times \underline{h} - \underline{\nabla} \left[ \phi - \frac{1}{c} \underline{v}_L \cdot \underline{A} \right] \quad (10)$$

と書けることはすぐ分る。ここで、 $\phi - \frac{1}{c} \underline{v}_L \cdot \underline{A}$  は core と共に動いている座標系でみた scalar pot. であることを注意しておく。(4)を変形すれば

$$\underline{\nabla} \left[ e \left\{ \phi - \frac{1}{c} \underline{v}_L \cdot \underline{A} \right\} - \mu_S - \frac{1}{2} m (\underline{v}_S - \underline{v}_L)^2 \right] = 0 \quad (11)$$

をうる。従つて

都築俊夫

$$\mu_S - e \left\{ \phi - \frac{1}{c} \underline{v}_L \cdot \underline{A} \right\} + \frac{1}{2} m (\underline{v}_S - \underline{v}_L)^2 = \text{const} \quad (12)$$

をうる。(12)の左辺は、coreに乗った座標系での total chemical potential である。その値が一定であることは、coreが安定であることを示す。(10)，(12)から

$$\underline{e} = -\frac{1}{c} \underline{v}_L \times \underline{h} - \frac{1}{e} \underline{\nabla} \left[ \mu_S + \frac{m}{2} (\underline{v}_S - \underline{v}_L)^2 \right] \quad (13)$$

となる。

次に運動量定理について書く。前に示したように、超電導電子の運動量密度を

$$\underline{g}_S = n m \underline{v}_S \quad (14)$$

とかくと、 $(\underline{v}_L/c)^2$  程度の量を見捨て

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{g}_S = -n e \underline{e} - \underline{\nabla} \cdot [n \phi \underline{1} + \underline{S} + \underline{T}(\underline{h})] \quad (15)$$

$$S_{ik} = \frac{1}{2} n m \{ 2 v_{Si} v_{Sk} - v_S^2 \delta_{ik} \} \quad (16)$$

$$T_{ik}(\underline{h}) = \frac{1}{8\pi} \{ h^2 \delta_{ik} - 2 h_i h_k \} \quad (17)$$

力の計算をするためには、積分領域内の全運動量

$$\underline{G}_S = \int n m \underline{v}_S dV \quad (18)$$

の時間変化を求めるとよい。積分体積  $V$  を core を囲む適当な領域にとると、積分領域が速度  $\underline{v}_L$  で動くことによる運動量変化を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{G}_S = & - \int \{ n e \underline{e} - \underline{\nabla} \cdot [n \phi \underline{1} + \underline{S} + \underline{T}(\underline{h})] \} dV \\ & + \int n m \underline{v}_S \underline{v}_L \cdot d\underline{S} \end{aligned} \quad (19)$$

前の報告では (15) の両辺の差を取るように書いたが、そのことは (19) と全く同じ内容であることはすぐ分るであろう。(13)を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_S = & \int \frac{ne}{c} \underline{v}_L \times \underline{h} dV + \int nm \underline{v}_L \times (\underline{v}_S \times d\underline{S}) \\ & - \int [\underline{S} + \underline{T}(h)] \cdot d\underline{S} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。core の受ける力  $\underline{F}_{core}$  は

$$\underline{F}_{core} = - \frac{d}{dt} G_S \quad (21)$$

で与えられる。

我々の基礎方程式 (20) が Nozieres 達の力の計算式と同一であることを示す。(19) に帰つて

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_S = & \int \left\{ \frac{ne}{c} \underline{v}_L \times \underline{h} + \underline{\nabla} \left[ \frac{1}{2} nm (\underline{v}_S - \underline{v}_L)^2 \right] \right. \\ & \left. - \underline{\nabla} \cdot \left[ \frac{1}{2} nm \underline{v}_S^2 \underline{\mathbf{1}} + \underline{S} + \underline{T}(h) \right] \right\} \\ & + \int nm \underline{v}_S \cdot \underline{v}_L d\underline{S} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{1}{2} nm \underline{v}_S^2 \underline{\mathbf{1}} + \underline{S} = nm \underline{v}_S \underline{v}_S \quad (23)$$

$$\underline{T}(h) = \frac{1}{4\pi} \{ \underline{h} \times (\underline{\nabla} \times \underline{h}) - \underline{h} (\underline{\nabla} \cdot \underline{h}) \} = \frac{ne}{c} \underline{v}_S \times \underline{h} \quad (24)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G_S = & - \int \frac{ne}{c} (\underline{v}_S - \underline{v}_L) \times \underline{h} dV \\ & + \int \frac{1}{2} nm (\underline{v}_S - \underline{v}_L)^2 d\underline{S} + \int nm \underline{v}_S (\underline{v}_S - \underline{v}_L) \cdot d\underline{S} \end{aligned} \quad (25)$$

となる。これは Nozieres 達の式である。このように力の計算式は、我々と Nozieres とでは全く同じである。

ここで Nozieres 達の計算の inconsistent な面を指摘しよう。彼等は、磁場の侵入度を  $\lambda_L$ ，  $a (\sim \xi_0)$  を core 半径とすると、半径  $R$  が  $a \ll R \ll \lambda_L$

都築俊夫

であるような、core と同軸の円柱（半径  $a$  の円柱の core 領域は除いて）を  
 考えて、力の計算をした。(25) で右辺の第一項は体積積分であるから他の項に比  
 して  $(a/\lambda_L)^2$  程度小さいから無視出来て、結局表面積分だけが力に寄与すると  
 した。しかし (24) から分るように (25) の体積積分は一部表面積分に書けるの  
 であつて、計算が inconsistent であることは明らかであろう。彼等のよう  
 に計算すれば、力は  $\tilde{v}_{S1} - \tilde{v}_L$  に比例する結果になるが、正しく計算すれば、 $\tilde{v}_L$   
 に比例する部分は打消されて、 $\tilde{v}_{S1}$  のみに比例するようになる。それは次に示  
 す。

### § 3 Core の受ける力

(3)~(7)を報告 I で述べた境界条件のもとでとくと

$$h = \alpha K_0(\zeta) - \frac{mc}{\lambda_L e} v_{S1} \zeta \sin \theta \quad (26)$$

$$v_{Sx} = v_{S1} + \frac{\lambda_L e}{mc} \alpha K_1(\zeta) \sin \theta \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{Sy} = - \frac{\lambda_L e}{mc} \alpha K_1(\zeta) \cos \theta \end{array} \right. \quad (28)$$

他の量は今必要でないので書かない。 $\lambda_L \zeta = |\tilde{r} - \tilde{v}_L t|$  である。(20) の右  
 辺の第一項及び  $\vec{T}(h)$  を除いた部分、(25) で云えば、右辺の第二及び第三項をま  
 ず計算する。全超流体領域にわたつて積分して

$$\begin{aligned} & \frac{ne}{c} 2\pi \lambda_L a \alpha K_1\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) (\tilde{v}_{S1} - \tilde{v}_L) \times \hat{z} \\ & = \frac{ne}{c} (\tilde{v}_{S1} - \tilde{v}_L) \times (\varphi_0 - \pi a^2 \tilde{h}_c) \end{aligned} \quad (29)$$

をうる。ここで量子条件から決る関係

$$\pi a^2 \alpha K_2\left(\frac{a}{\lambda_L}\right) = -\varphi_0 \quad (30)$$

を用いた。従つて、ベクトル  $\varphi_0$  及び  $\tilde{h}_c$  (core 内の磁場) は  $z$  方向を向いてい

ることに注意されたい。(29)は、Nozieres 達に対応する項のみを計算したものである。flux は全体でなく、正常状態にある core に含まれる部分だけ差引いたものになっている。この結果は物理的に非常に理解しやすい。

次に(20)では  $\vec{T}(h)$  から来る寄与、(25)では  $\int \frac{ne}{c} \vec{v}_S \times \vec{h} dV$  から来る寄与を計算しよう。

$$\frac{ne}{c} \vec{v}_{S1} \times (\pi a^2 \vec{h}_C) \quad (31)$$

を得る。(29)と(30)から、 $\vec{v}_{S1}$  に依存する力は total flux に比例するようになる。以上計算して来たものはすべて表面力である。最後に体積力  $\int \frac{ne}{c} \vec{v}_L \times \vec{h} dV$  を計算する。

$$\begin{aligned} \int \frac{ne}{c} \vec{v}_L \times \vec{h} dV &= \frac{ne}{c} 2\pi \lambda_L a \alpha K_1 \left( \frac{a}{\lambda_L} \right) (\vec{v}_L \times \hat{z}) \\ &= \frac{ne}{c} \vec{v}_L \times (\vec{\varphi}_0 - \pi a^2 \vec{h}_C) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。これは(29)で  $\vec{v}_L$  に依存した項を完全に打消す。結局 core に働く力は

$$\vec{F}_{\text{core}} = \frac{1}{c} (\vec{J}_T \times \vec{\varphi}_0) \quad (33)$$

となる。 $\vec{J}_T = -ne \vec{v}_{S1}$  で与えられる。このように一様電流による Lorentz 力のみを受けることになる。

以上で core の受ける力についての考察を終つたわけだが、いくつかの疑問が提起されるかも知れない。予想されるもののなかから一つここでとりあげておく必要があると考えられるものは、(31)で与えられる表面力は考える必要がないのではないかと云う点である。実際、我々は磁場  $h$  が core 表面で連続あるよう決めてあるから、core の内側から外側へ、(31)と同じ大きさで向きが逆の力がある。テンソル  $\vec{T}(h)$  が連続だからである。しかしながら、core 内の正常電子に関する運動量定理を導き、それから、電子がまわりの超流体に及ぼす力を計算してみれば分るように、上記の core の内側からの表面力は、も

都築俊夫

う一度 core 内での体積力に打消され、結局 (31) は残ることになる。一般的に云つて、core の受ける力の定義が問題になる。まわりの超流体から core の受ける力なのか、core 内の電子がまわりの超流体に及ぼす力を引き去つた正味の力を考えているのかと云うことである。我々の場合には、いずれであつても同じ結果を与える。

次に、core が受ける力をどのようにしてささえているかと云う問題である。core 内の lattice ions が単位時間に受けとる運動量 (core が動くことによつて、超電導電子が失つた運動量と core 内の正常電子が失つた運動量  $m v_n / \tau$  との和) が (38) と釣り合う。ここでピン止め力等の他の力は全く考えていない。このようにして、例えば "flow resistivity"  $\rho_f$  は

$$\rho_f / \rho_n \simeq \frac{\pi a^2 h_c}{\phi_0}$$

となる。 $\rho_n$  は正常電子の抵抗である。

#### 参 考 文 献

- 1) P. G. de Gennes, P. Nozieres, W. F. Vinen: preprint "The Motion of Flux Lines in Type II Superconductors"
- 2) 都築: 物性研究 5(1965) 142, 161.
- 3) J. Bardeen, M. J. Stephen: Phys. Rev. 140 (1965) A1197.