

複素 1 次元 W K B 法

Voros, Ecalle, Pham 理論概説

上智大学理工学部 内山康一 (Koichi Uchiyama)

1. 序

1 次元の定常Schrödinger方程式をモデルにして次の線形常微分方程式

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + x^2 Q(q)\right) \psi(q) = 0 \quad (1.1)$$

を考察の対象とする。ここで x はPlanck定数の逆数を複素パラメータと見なしたものであり、 $Q(q)$ ($= V(q) - E$; $V(q)$ はポテンシャル、 E はエネルギーパラメータ)は多項式である。これに対する複素W K B法は普通、近似解法と見なされている。W K B展開で求まる級数は漸近級数であって、しばしば有限項で打ち切って利用される。さらには、無限級数を用いても指数減少するW K B展開にはPoincaréの意味で漸近和を与える真の解が一意に存在するが、指数増大するW K B展開に対してはPoincaréの意味で漸近和となる真の解は一意でない。W K B展開の優部(dominant part)の陰に隠れた劣部(subdominant part)の解析が一般に難しい。これらが近似解法とみなされ、ときに曖昧さを与える理由であろう。

A.Voros氏は[Vo3]においてW K B展開にBorel総和法を適用した。すなわち、W K B展開のBorel変換を複素Laplace変換して(1)の解を表示できると考えた(Balian-Bloch表示。[Vo3]第5節)。発散級数としてのW K B展開の意味付けはPoincaréの意味の漸近級数ではなく、Borel変換によって定まる多価解析関数(Borel像)によって与えられる。従って、Poincaréの意味の漸近展開と違って、W K B展開において無限級数の全項がBorel変換による意味付けに

必要である。一方、WKB展開の優部と劣部は増大度の比較という定量的視点ではなく、Borel像の特異点の位置関係として幾何学的に明瞭に把握できる。Vorosは q を変わり点の近傍に局所化してBorel像の特異点の位置解析を行い、(単純な) 変わり点から出発するStokes線を q がよぎるときのWKB展開の接続公式を得た。それを用いて固有値問題のJost関数 $a(x)$ の x に関するWKB展開のBorel像 $a_B(\xi)$ の定める多価解析関数の特異点の位置を決定し、Jost関数 $a(x)$ の複素パラメータ x に関するStokes現象を $a_B(\xi)$ のLaplace積分によって記述した。そして $a_B(\xi)$ のRiemann面に著しい”再生構造”があるのを発見した。(analytic bootstrapと呼んでいる。)そして固有値関数の関数等式へ応用した。

J.Ecalle氏は彼の創始したresurgent function (再生関数と仮に訳す) のalien calculus ([Ec1]) の中にVoros理論を取り込んだ。Voros解析の前提であるBalian-Bloch表示はWKB展開が q をパラメータとする x の再生関数であることとして証明でき、Voros氏の得た再生現象(analytic bootstrap) は $a(x)$ あるいは $a_B(\xi)$ がalien derivation equation を満たすことにほかならないことを主張し、その粗筋を公表した([Ec2])。F.Pham氏たちは詳細未発表のEcalle理論をVorosの解析に適した形に構成しなおし、証明を整備しつつ、固有値問題への新しい応用を与えた([Ph2], [CNP1,2], [DDP], [DD], [Ah])。最近、河合隆裕氏たちはVorosの接続の超局所解析による基礎付を与え([AKT])、さらに、計算法の面で確定特異点型方程式のモノドロミー群の表現への応用を与えてVoros解析の新しい可能性を切り開いた。高崎金久氏はOlverの接続方法を押進めてJost関数 $a(x)$ のLaplace積分表示を与えた([Ta])。

Vorosの解析では計算法(calculus)が先行していて理論の整備が後をおっている。以下では漸近展開の初等的な例を述べてから主としてPham氏の流儀

にしたがって筆者の理解している範囲でVoros解析の概説を試みる。最後に、直接確かめられる例について鞍点法との関係を図解して述べる。この機会にここ数年来、数理解析研究所の研究会を通して上述の方々を初め、多くの方に教えていただいたことに感謝します。

2. Borel総和法とStokes現象.

簡単な例でBorel総和法を復習する。

例 1.

$$\frac{dS}{dz} - (1+z^{-1})S(z) + 1 = 0 \quad (2.1)$$

確定特異点 $z=0$ を中心に収束級数解を求めると対数分岐する解

$$S(z) = z e^z (a_0 - \log z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right\} z^{n+1} \quad (2.2)$$

をえる。右辺に現れるべき級数の収束半径は ∞ であり、(2.2)は解の大域表現を与えているが、解の $|z| \rightarrow \infty$ に対するふるまいはこれからはわからない。無限遠点の近傍における解のふるまいを見るために $\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ の形の形式解を求めると発散級数

$$\hat{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{-n} \quad (2.3)$$

をえる。Borel変換 (minor表示) $z^{-n-1} \mapsto \xi^n / n!$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-1} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \xi^n \quad (2.4)$$

を $z^{-1}\hat{S}(z)$ に行うと

$$z^{-1}\hat{S}(z) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi^n = \frac{1}{1+\xi}$$

をえる。そのLaplace変換

$$T(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\xi} \frac{d\xi}{1+\xi} \quad (\operatorname{Re} z > 0) \quad (2.5)$$

をBorel和という。このとき、(2.5)は(2.1)の解である。さらに、

$$|z T(z) - \sum_{n=0}^N (-1)^n n! z^{-n}| \leq (N+1)! |z|^{-(N+1)} \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

がわかる。(この誤差評価から絶対値の大きい z に対し適当な N を選べば漸近級数の第 N 部分和が良い近似を与えることがわかる。) ゆえに Poincaré の意味で $zT(z)$ は (2.3) の漸近和である。

$$zT(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty \text{ in } \{\operatorname{Re} z > 0\})$$

とかく。Laplace 変換の積分軸を $L_{\omega}(\alpha) = \{\omega + re^{i\alpha}; r > 0\}$ とおき、

$$H_{\omega}(\alpha) = \{z; |\arg(z - \omega) - \alpha| < \frac{\pi}{2}\} \quad T^{\alpha}(z) = \int_{L_0(\alpha)} e^{-z\xi} \frac{d\xi}{1+\xi}$$

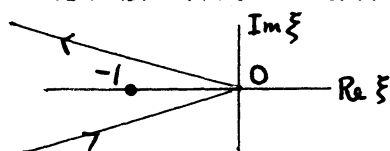
とおくと、 $T^{\alpha}(z)$ は $H_0(-\alpha)$ で定義される。 $zT(z)$ は $\operatorname{Re} z < 0$ においても漸近展開できる。 $\varepsilon > 0$ 十分小として、

$$zT^{\pi-\varepsilon}(z) \sim \sum (-1)^n n! z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty \text{ in } H_0(-\pi+\varepsilon))$$

$$zT^{-\pi+\varepsilon}(z) \sim \sum (-1)^n n! z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty \text{ in } H_0(\pi-\varepsilon)).$$

一方、(2.2) の表示からわかるように $zT^{\pi-\varepsilon}(z) - zT^{-\pi+\varepsilon}(z) = 2\pi i z e^z$ だが $\operatorname{Re} z < 0$ では $ze^z \sim 0$ なので Poincaré の意味の漸近展開では ze^z を検出できない。しかし、

Borel 総和法を採用した場合は



$$z \int_{L_0(\pi-\varepsilon)} e^{-z\xi} \frac{d\xi}{1+\xi} - z \int_{L_0(-\pi+\varepsilon)} e^{-z\xi} \frac{d\xi}{1+\xi} = 2\pi i z e^z$$

となり、Borel 像の特異点 (この場合は極) $\xi = -1$ から ze^z を検出することができる。これは、Stokes 現象と見なすことができる。 $\arg z = \pi$ において $\sum (-1)^n n! z^{-n}$ が優部で ze^z は劣部である。

例 2.

$$\frac{dS(z)}{dz} - (1 - z^{-1})S(z) + z^{-2} = 0 \quad (2.6)$$

も同様に考えると、収束解

$$S(z) = a_0 z^{-1} e^z + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \{1 + \dots + \frac{1}{n}\} z^{n-1} - z^{-1} e^z \log z \quad (2.7)$$

と発散する形式解

$$\hat{S}(z) = z^{-2} \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! z^{-n} \quad (2.8)$$

がえられる。(2.8)のBorel変換 (minor表示)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{n!} \xi^n = \log(1+\xi) \quad (2.9)$$

に対し、

$$T(z) = \int_0^\infty e^{-z\xi} \log(1+\xi) d\xi \quad (2.10)$$

とおけば、これは(2.6)の解である。例1と同様に積分軸を回転させることによ

って $\log(1+\xi)$ のもつ対数分岐点から $z^{-1}e^z$ を検出することができる。

注意. すこし一般の形式べき級数を考えると、Borel変換は原点で特異性をも

ち、積分を超関数の意味にとる必要がある。Borel変換のmajor表示

$$z^{-n-1} \longmapsto \frac{\xi^n}{2\pi i n!} \log \xi$$

を用いると例1の(2.3)のBorel変換のmajor表示は $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\xi+1} \log \xi$ となる。

Laplace積分は周回積分

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-z\xi} \frac{\log \xi}{\xi+1} d\xi \quad \text{!} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \leftarrow \\ \text{---} \\ \rightarrow \\ \Gamma \end{array}$$

となる。

(注意. major表示 $\frac{\log \xi}{\xi+1}$ は $\xi = -1$ に特異点をもっているが、その代わりに $\frac{\log(\xi e^{-\pi i})}{\xi+1}$ を使っても周回積分の値は変わらない。しかも、特異点 $\xi = -1$ は次の分枝に「押し込まれて」関数は $C - L_0(0)$ で正則である。)

3. Resurgent functionのalien calculus. ([Vo3]の1、2、3節。[CNP1,2], [Ec1,2])

(1) x^{-1} の形式べき級数 $\varphi_0(x)$ のBorel変換が極や対数分岐点のような孤立特異点をのぞいてどこまでも解析接続可能であるときBorel像 $\phi^0(\xi)$ (major表示) の原点における半平面 $H_0(\alpha + \pi)$ 上の芽を原点の全近傍で正則な関数の芽

を法とする同値類を再生関数の α 方向の芽 (resurgent functionの合成積モデル) という。原点でvariation (再生関数の α 方向の芽を原点に関して正の向きに半周解析接続した $H_0(\alpha+2\pi)$ 上の芽から負の向きに半周解析接続した $H_0(\alpha)$ 上の芽を引いて α 方向の芽を定義する。)をとればminor表示のBorel像 $\varphi^0(\xi)$ がえられる。このような形式べき級数自身も再生関数 (の形式モデル) という。形式べき級数は普通の和差積で代数をつくる。Borel像に移ると合成積 (convolution) を積とする代数になる。



原点に限らず、点 ω の近傍で同様に正則な関数を法とする同値類を考えると、それを ω における再生ミクロ関数という。 $\phi^\omega(\xi)$ とかく。対応する形式モデルは $e^{-x\omega} \varphi_\omega(x)$ 。

(major表示)

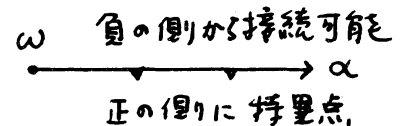
ω における α 方向の再生ミクロ関数の代表元のとりかたには自由度があるので、どこまでも解析接続することができるだけでなく、特異点を他の分枝に押し込んで $\mathbb{C}-L_\omega(\alpha)$ で正則になるようにとれる。さらに切り込み $L_\omega(\alpha)$ の正の側あるいは負の側については特異点が現れないようにできる。

例. (負の側から特異点にぶつかる)



(正の側からは $L_\omega(\alpha)$ を越えて接続可能)

あるいは



負の側から接続可能
正の側に特異点

(2) 粗く言って α 方向を含んで開き π 以下の扇形領域の中に特異点があってそこから α 方向に切込みをいれた複素平面で正則になる関数がどこまでも接続可能であるとき、その整関数を法とする同値類をextended resurgent function (拡大再生関数) という。

拡大再生関数を特異点の近傍に制限すれば再生ミクロ関数を定義する。但し、 α 方向の切り込みにおいて正の側から見える特異点における芽と負の側から見える特異点における芽とは一般に違う。全体として正の側から見た特異点

を添数とする再生ミクロ関数の族（形式モデルでかくと、形式和 $\sum_j e^{-x\omega_j^+} \varphi_{\omega_j^+}(x)$ と負の側から見た再生ミクロ関数の族 $\sum_j e^{-x\omega_j^-} \varphi_{\omega_j^-}(x)$ ）を定義する。これを拡大再生関数の正の側からのあるいは負の側から見た表象という。

$$\begin{array}{c} \omega_1^- \quad \omega_2^- \\ \bullet \quad \blacktriangle \quad \blacktriangledown \quad \blacktriangle \\ \omega_0 \quad \omega_1^+ \end{array} \quad (\text{major 表示})$$

(3) 表象に対し、それを負の側から見た表象とするような拡大再生関数が一意に存在する。その拡大再生関数の正の側から見た表象をはじめの表象に対応させる写像を表象の接続自己同型 $\dot{\mathcal{G}}_\alpha$ (Stokes自己同型) という。

$$\dot{\Delta}_\alpha = \log \dot{\mathcal{G}}_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\dot{\mathcal{G}}_\alpha - 1)^n$$

を表象に働く alien derivation (dérivation étrangère 仮に外来微分または異空間微分と訳す。) という。これを表象の成分 (再生ミクロ関数) 毎に考え、さらに再生ミクロ関数を原点に引き戻して再生関数としてみるならば外来微分は再生関数のつくる代数に対し、微分 (derivation) として働くという著しい特徴を持っている。応用上現れる再生関数は外来微分の結果を再び自分自身を用いて表せることが多い。即ち、通常の微分に対する指数関数のように外来微分に関する簡単な「外来微分方程式 (ADE!)」を満たすことが多い。これが「再生現象」であり、再生 (resurgence) の名はもともとここに由来する。

(4) 表象の成分が一つしかないとき基本表象ということにする。基本表象 $\dot{\varphi}(x) = e^{-\omega_0 x} \varphi_{\omega_0}(x)$ に対する接続自己同型と外来微分を考える。

(イ) $e^{-\omega_0 x} \varphi_{\omega_0}(x)$ の Borel 像 (minor 表示 φ^{ω_0}) が ω_0 から出発する半直線 $L_{\omega_0}(\alpha)$ 上に特異点をもたないとき。

$$\int_{L_{\omega_0}(\alpha-0)} e^{-\xi x} \varphi^{\omega_0}(\xi) d\xi = \int_{L_{\omega_0}(\alpha+0)} e^{-\xi x} \varphi^{\omega_0}(\xi) d\xi$$

であり

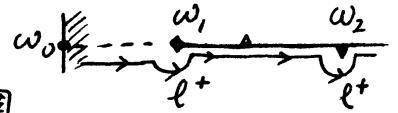
$$\begin{cases} (\dot{\mathcal{G}}_\alpha \dot{\varphi})^{\omega_0} = \varphi^{\omega_0}(\xi) \\ (\dot{\mathcal{G}}_\alpha \dot{\varphi})^\omega = 0 \end{cases} \quad \omega \neq \omega_0, \quad (\omega \in L_{\omega_0}(\alpha))$$

となる。Stokes現象は方向 α の前後で起きない。

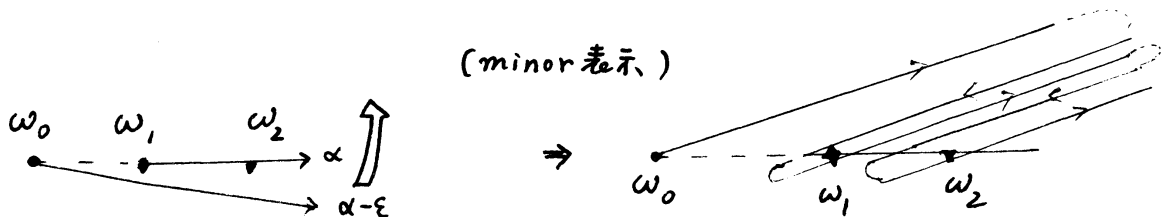
(ロ) $e^{-x\omega_0} \varphi_{\omega_0}(x)$ のBorel像 (minor表示) $\varphi^{\omega_0}(\xi)$ が ω_0 から出発する半直線 $L_{\omega_0}(\alpha)$ 上に特異点をもつとき。

$$(\dot{G}_\alpha \dot{\varphi})^{\omega_0} = \varphi^{\omega_0}(\xi)$$

$$(\dot{G}_\alpha \dot{\varphi})^{\omega_j} = (\ell^+ - \ell^-) (\ell^+ \cdots \ell^+) \varphi^{\omega_0}(\xi)$$



ここで $\ell^\pm$ は半直線 $L_{\omega_0}(\alpha)$ に沿った解析接続を表す作用素で、 $+$ は $L_{\omega_0}(\alpha)$ 上に「見えかくれする」特異点を正の側によけて進み、 $-$ は負の側によけて進むことを意味する。これは方向Laplace変換の積分軸を始め $\alpha - \varepsilon$ 方向ににとり、次に正の方向へ回転させて α を越えるとき $L_{\omega_0}(\alpha)$ 上、正の側に見える特異点を拾い出した効果と理解できる。Stokes現象である。



記号的に

$$(\dot{G} - 1) \varphi = (\ell^+ - \ell^-) \varphi + (\ell^+ \ell^+ - \ell^- \ell^+) \varphi + \cdots$$

とかけるので、表象に働く作用素 $\dot{\Delta}_\alpha$ を

$$\dot{\Delta}_\alpha \varphi = (\log \dot{G}_\alpha) \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\dot{G}_\alpha - 1)^n \varphi$$

で定義する。成分ごとに考えると、再生ミクロ関数から再生ミクロ関数への作用とみなせる。ミクロ関数を原点に平行移動で引き戻せば Δ_α 再生関数上に作用する。これがEcalteの導入したalien derivation (外来微分) である。minor表示における具体的な表示はつぎの通りである。

$$\dot{\Delta}_{\omega_1} \dot{\varphi} = (\ell^+ - \ell^-) \varphi^{\omega_0}$$

$$\dot{\Delta}_{\omega_2} \varphi = (\ell^+ - \ell^-) \frac{1}{2} (\ell^+ + \ell^-) \varphi$$

$$\dot{\Delta}_{\omega_3} \varphi = (\ell^+ - \ell^-) \left\{ \frac{1}{3} \ell^+ \ell^+ + \frac{1}{6} \ell^+ \ell^- + \frac{1}{6} \ell^- \ell^+ + \frac{1}{3} \ell^- \ell^- \right\} \varphi$$

一般に、 $L_{\omega_0}(\alpha)$ 上をジグザグに前進するとき見え隠れする全ての特異点の中で
 n 番目の特異点 ω_n を検出する外来微分は

$$\dot{\Delta}_{\omega_n} \varphi = (l^+ - l^-) \sum_{(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)} \frac{p! q!}{n!} l^{\varepsilon_{n-1}} \dots l^{\varepsilon_1} \varphi \quad (n \geq 2)$$

とかける。ここで、

p : $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ を + 側 (右側) によけた回数

q : " " を - 側 (左側) " "

$(\varepsilon_{n-1}, \dots, \varepsilon_1)$: $\varepsilon_j = \pm$ の 全ての重複順列

4. Schrödinger 方程式の WKB 解。

(1) $Q(q)$ は d 次の多項式とする。 $Q(q) = 0$ は 1 位の零点 $q'_1, \dots, q'_d$ しか持たないとする。これらを単純な変わり点 (turning point) という。(1.1) の解を

$$\begin{cases} \psi(q) = \exp \int^q S(q', x) dq' \\ S(q, x) = S_{-1}x + S_0(q) + S_1(q)x^{-1} + S_2(q)x^{-2} + \dots \end{cases} \quad (4.1)$$

の形に想定する (WKB 法 [We], [AKT])。S は Riccati 方程式を満たす。S を x の奇数次の部分 U と偶数次の部分 V に分けると、 $V = -\frac{1}{2}(\log U)'$ となること
 がわかる。したがって、

$$\psi(q) = \frac{1}{\sqrt{U}} \exp \left[\int^q U(q', x) dq' \right] \quad (4.3)$$

$$S_{-1}(q) = \pm \sqrt{Q(q)} \quad (4.4)$$

$$U^2 - x^2 Q = \frac{1}{2} \left\{ \frac{U''}{U} - \frac{3}{2} \left(\frac{U'}{U} \right)^2 \right\} \quad (4.5)$$

をえる。(4.4) と (4.5) から S_{2k-1} が順次決まる。

注意。 S_{2k-1} は $Q^{-1/2} \times \{Q, Q', Q''\}$ の有理式である。無限遠方における増大度は

$O \left[|q|^{-\frac{2k-1}{2}d-2k} \right]$ である。従って、 $k \geq 1$ に対しては $S_{2k-1}(q)$ は無限遠

方で積分可能。

(2) 解(4.3)の形式表示を方程式(1.1)の変換に読みかえることができる。

$$\begin{cases} \psi(q) = \left(\frac{dq}{d\xi}\right)^{1/2} \varphi(\xi) \\ q = q(\xi; x) = q_0(\xi) + x^2 q_1(\xi) + \dots \end{cases} \quad (4.6)$$

という x^{-1} の形式べき級数による変換を考える。(1.1)は

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + x^2 Q(q'_\xi)^2 \varphi &= \frac{1}{2} \left(\frac{q''_\xi}{q'_\xi} - \frac{3}{2} \left(\frac{q''_\xi}{q'_\xi} \right)^2 \right) \varphi \\ &= \frac{1}{2} \{q, \xi\} \varphi \end{aligned} \quad (4.7)$$

とかける。右辺の $\{, \}$ は Schwarz 微分である。

$$x^2 Q(q'_\xi)^2 - \frac{1}{2} \{q, \xi\} = x^2 \tilde{Q}(\xi) \quad (4.8)$$

をみたす $q(\xi, x)$ による変換は(1.1)において $Q(q)$ を $\tilde{Q}(\xi)$ にかえるだけで方程式の型を変えない。(4.8)で $x^2 \tilde{Q} = 1$ となる解 $q(\xi, x)$ は(4.5)から

$$\xi = \int_1^q S(q', x) dq'$$

の逆関数である。

もっと簡単に

$$Q(q) q'_\xi{}^2 = 1 \iff \frac{d\xi}{dq} = \sqrt{Q(q)} \quad (4.9)$$

あるいは $q(\xi)$ を $\xi = \int_1^q \sqrt{Q(q')} dq'$ の逆関数とするととき(4.6)を Liouville 変換という。(4.9)により(1.1)は

$$-\varphi''(\xi) + x^2 \varphi(\xi) = \frac{1}{2} \{q, \xi\} \varphi(\xi) \quad (4.10)$$

にかわる。右辺の $\{q, \xi\}$ は遠方で ξ について逆自乗の減少を示す。

(3) 波動関数 $\psi(q; \lambda)$ の正規化。 $\mathbb{C} = \mathbb{C} - \{q'_1, \dots, q'_d\}$ とし、 U を $\mathbb{C}$ 内の単連結な領域とする。 U 内に始点 q_0 を任意に固定する。 U 内の動点 q から出発して無限遠点に向かう $\mathbb{C}$ 内の路を λ とする。

(1.1)の解 $\psi(q; \lambda)$ の定数倍 $c\psi$ は c が x に依存するとき x の Borel 像に無統制な特異性を持込みうるので次のような正規化された WKB 展開を考える。

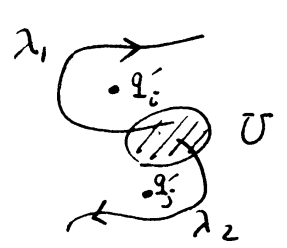
$$\begin{cases} \psi_\lambda = \frac{1}{\sqrt{U(q;x)}} \exp x \int_{q_0}^q S_{-1}(q') dq' \exp \int_{\infty}^q R dq' \\ S_{-1}(q) = -\sqrt{Q(q)} \end{cases} \quad (4.11)$$

(λ^{-1})

ここで R は S の負の奇数べき部分 $R = U - x S_{-1}$ である。 R の各項の係数 S_{2k-1} は無限遠方で積分可能である。(4.11) の右辺の第 1 因子と第 3 因子の積は x^{-1} の逆べきに展開できる。その第 1 項は $Q(q)^{-(1/4)} x^{-1/2}$ である。このように正規化された WKB 展開は q を正則パラメータとする拡大再生関数になる (といわれている)。次のように正規化された解も用いられる。

$$\psi_\pm = \frac{1}{\sqrt{U}} \exp \pm \int_{q_0}^q U dq'.$$

λ_1 と λ_2 は U 内で $Q^{-1/4}$ の同じ分枝をとる路とする。 $\lambda = \lambda_2 \circ \lambda_1^{-1}$ に対して

$$a_\lambda(x) = \int_{\infty}^{\infty} R(q'; x) dq' \quad (4.12)$$


とおき、Pham に従って Voros 係数と呼ぶ。

(4) WKB 展開の形式モノドロミー。(1.1) の解は $Q(q)$ が多項式なので x, q の整関数である。しかし、WKB 展開は

$$Q^{-1/4}(q), \int_{\infty}^q Q^{-1/2} x \{Q, Q', Q'' \text{ の有理関数} \} dq', \int_{q_0}^q \sqrt{Q} dq'$$

などの変わり点の特異点とする多価関数を構成要素にもっている。 ℓ を開 Riemann 面 $p^2 = Q(q)$ の閉路とする。 ℓ にそって 1 周するときの (4.11) のモノドロミーは (4.11) の右辺の第 1 因子から生ずる $e^{-\frac{\pi i}{2} m(\ell)}$ 、第 2 因子から生ずる周期積分 $\exp x \omega_\ell$ 、第 3 因子から生ずる $a_\ell(x)$ である。ここで $m(\ell)$ は変わり点たちに関する路 ℓ の回転数であり、

$$\begin{cases} \omega_\ell = \int_\ell \sqrt{Q(q)} dq \\ a_\ell(x) = \int_\ell R(q'; x) dq' \end{cases}$$



$a_q(x)$ は $a_{C_1}(x), \dots, a_{C_d}(x)$ でかける。 $C_1, \dots, C_d$ は変わり点から無限遠方に放射状に入れた切込みに沿って周回するホモロジー基底である。関係式

$$a_{C_1}(x) a_{C_2}(x) \cdots a_{C_d}(x) = 1 \quad (4.13)$$

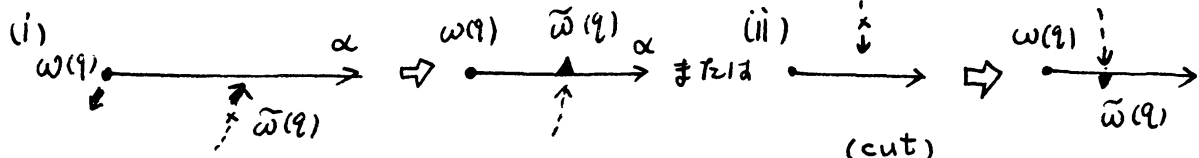
が成立している。

5. VOROS の接続。

正規化された WKB 展開を q をパラメータとする基本表象と考えるとそれに対応する拡大再生関数 $\Psi(q; \xi)$ (major 表示) による Borel 和は (1.1) の真の解を

$$\Psi(q, x) = \int_{C(q)} e^{-x\xi} \Psi(q, \xi) d\xi \quad (5.1)$$

であらわす (Balian-Bloch 表示)。ここで積分路 $C(q)$ は特異点 $\omega(q) = \int_{q_0}^q \sqrt{Q} dq'$ から出発する ^(cut) 半直線 $L_{\omega(q)}(q)$ を正の向きに周回する路である。出発点以外には半直線上に特異点がないとする。(下図は major 表示)



q を動かしていくと隠れていた別の特異点 $\tilde{\omega}(q)$ が半直線から表面に出て来るときがある。すると基本表象で表されていた WKB 展開が二つの基本表象の和に不連続に変化する。(5.1) で表される真の解はもちろん q について正則に変化している。それにもかかわらず表象 (WKB 展開) が不連続に変化するのは Stokes 現象である。場合 (i)、(ii) に応じて

$$(i) \quad \hat{G}_\alpha \Psi = \Psi - \hat{\Delta}_{\tilde{\omega}(q)} \Psi \quad \omega \text{ --- } \tilde{\omega}$$

あるいは

$$(ii) \quad \hat{G}_\alpha \Psi = \Psi + \hat{\Delta}_{\tilde{\omega}(q)} \Psi \quad \omega \text{ --- } \tilde{\omega}$$

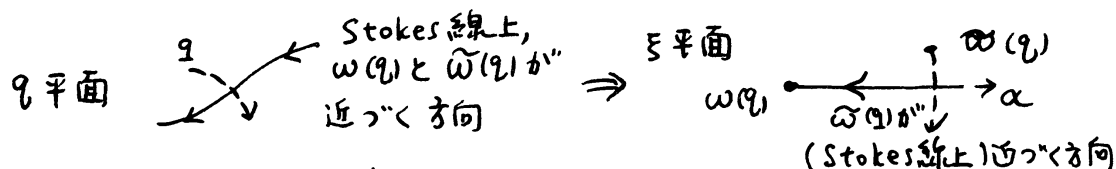
とかくことができる。(形式モデル表示)。

(major 表示)

$\omega(q)$ も $\tilde{\omega}(q)$ も微分方程式

$$\left(\frac{d\xi}{dq}\right)^2 = Q(q) \quad (5.2)$$

の解である。 $\omega(q)$ に対し、(5.2)の解は q に関する微係数が等しいものと逆符号のものに分類される。前者は q が動くとき $\omega(q)$ との相対位置を変えない。後者は相対位置を変えるので q の変化に伴って $\omega(q)$ から出る半直線 $L_{\omega(q)}(\alpha)$ 上に $\tilde{\omega}(q)$ が来ることがある。そこでStokes現象を起こす可能性がある。そのような q の軌跡を α に対するStokes線という（注意： α が0のときは $\omega(q)$ と $\tilde{\omega}(q)$ の虚部が等しいときである。Stokes線の呼称は数理物理の文献にならっている。例[He]。数学の文献ではAnti-Stokes線といわれる）。



(5.2)で定まる複素ベクトル場 $\frac{d\xi}{dq}$ を考える。二つの特異点の実部が近づく方向に q をStokes線上移動させると q が複素ベクトル場の特異点すなわち変わり点に達することがある。変わり点から出発するStokes線は2階の方程式(1.1)では一番重要なので以下Stokes線をその場合に限る。

(1) 変わり点と変わり点を結ぶStokes線はないものとする。 α は固定する。

$\xi(q) = \int_{q_0}^q \sqrt{Q} dq'$ とおく。 $\xi_j = \xi(q'_j)$ とする。 $\omega(q)$ から ξ_j へ向かう方向を $\alpha_j(q)$ とする。 ξ 平面における $\omega(q)$ から ξ_j へ向かう線分を

$\xi = \int_{q_0}^q \sqrt{Q} dq'$ で q 平面に引き戻すと q と q'_j を結ぶ $\alpha_j(q)$ 方向のStokes線となる。 q から出発してこのStokes線に沿って正の向きに周回して q'_j から q に戻ってくる路 ρ_j に沿ってWKB展開（基本表象） ψ を解析接続して

$\rho_j(\psi)$ とする。次の定理はVoros解析の要約である([Ph4])。

「定理」1 ([Vo3]第6節, [Ec2], [CNP1]) .

$$\omega_j(q) = \int_{\rho_j} \sqrt{Q} dq'$$

とするとき

$$\Delta \omega_{j|q} \psi = \rho_j(\psi). \quad (5.3)$$

適当に正規化されたWKB展開の基底をとれば（例えば ψ_+ と ψ_- ）、(5.3)からStokes線を越えるときの基底の変換行列が求められる。

(2) 方向 α に対して変わり点と変わり点を結ぶ有界なStokes線がある時、該当する二つの変わり点を結ぶStokes線分を1周する閉路を ℓ とする。

「定理」2 ([Vo3]第7、8、9節, [Ec2], [CNP1])。 ν にそって正規化された基本表象としてのWKB展開 ψ_ν に対して

$$\tilde{G}_\alpha \psi_\nu = \left[\prod_\ell (1 + \dot{a}_\ell)^{\ell \cdot \nu} \right] \psi_\nu \quad (5.4)$$

Voros係数 a_λ に対して

$$\tilde{G}_\alpha a_\lambda = \left[\prod_\ell (1 + \dot{a}_\ell)^{\ell \cdot \lambda} \right] a_\lambda \quad (5.5)$$

ここで $\ell \cdot \nu$ および $\ell \cdot \lambda$ は向きづけによって決まる交点数である。

$$\dot{a}_\ell = e^{-x \omega_\ell} a_\ell \quad \text{である。}$$

「定理」1 から「定理」2 が証明される。図のように縮退したStokes線図の方向 α を回転させて臨界方向の前後で縮退を解き、「定理」1 から導かれる接続公式を適用する (Vorosのradar method)。「定理」2 からたとえばVoros係数 a_{c_i} の満たす外来微分方程式を導ける。 ξ_i から ξ_j に向かう方向を α_{ij} とする。 q'_i と q'_j を囲んで正の向きに1周する路を γ_{ij} とする。 γ_{ij} は $C_1, \dots, C_d$ を用いて分解できるので ($a_i = a_{c_i}$ と ν)

$$\dot{a}_{\gamma_{ij}} = e^{-\omega_{ij}} (a_{j+1} a_{j+2} \dots a_{i-1}) (a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{j-1})^{-1}$$

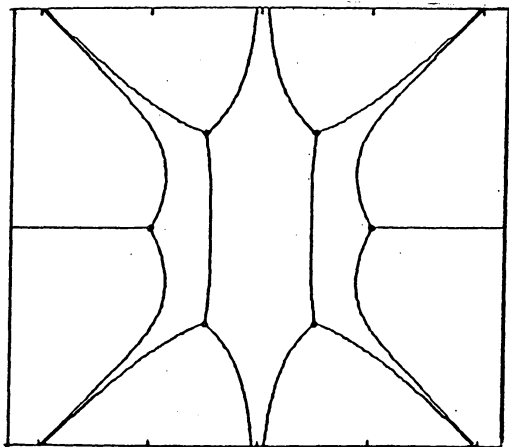
従って(5.5)から

$$\tilde{G}_{\alpha_{ij}} a_{c_i} = (1 + e^{-\omega_{ij} x} \frac{a_{j+1} \dots a_{i-1}}{a_{i+1} \dots a_{j-1}}) a_{c_i}$$

を得る。ここで

$$\omega_{ij} = \int_{\gamma_{ij}} \sqrt{Q} dq'$$

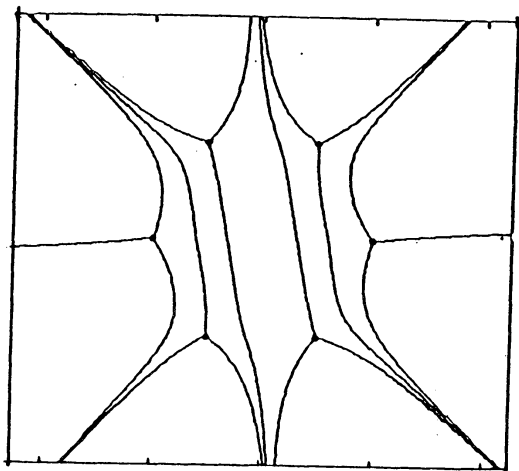
— Stokes 線図の例 —



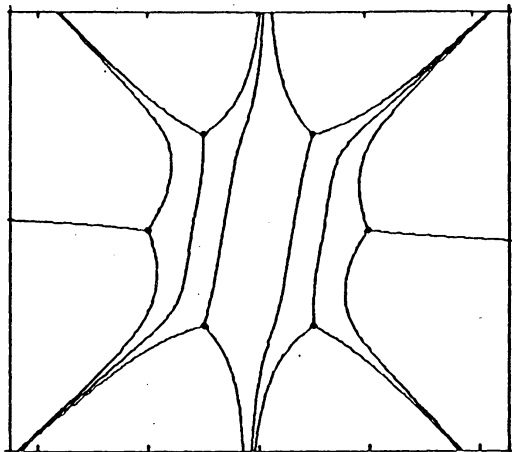
$$Q(q) = q^6 - 1$$

$$= \prod_{k=0}^5 (q - e^{\frac{\pi}{3}ki}),$$

$\alpha = (-\arg x) = 0$ に対する
Stokes 線図. 変り点
 $e^{\frac{\pi}{3}i}$ と $e^{\frac{5}{3}\pi i}$, $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ と $e^{\frac{4}{3}\pi i}$
を結ぶ Stokes 線が現わ
れている.

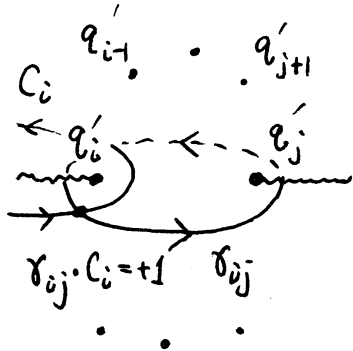


$\alpha = \frac{\pi}{9}$ に対する Stokes 線
図. 変り点を結んでいた
Stokes 線は分離している.
 $Q(q) = 1 - q^2$ に対する
Stokes 線図の縮退の解
消と同じ状況になっている.



$\alpha = -\frac{\pi}{9}$ に対する Stokes 線図.

である。ゆえに、



$$\Delta_{\alpha_{ij}} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\omega_{ij}x} \left(\frac{a_{j+1} \cdots a_{i-1}}{a_{i+1} \cdots a_{j-1}} \right)^n a_i$$

$$\Delta_{n\omega_{ij}} a_i = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{a_{j+1} \cdots a_{i-1}}{a_{i+1} \cdots a_{j-1}} \right)^n a_i \quad (5.6)$$

がわかる。 $Q_{C_i}(x)$ たちは外来微分について閉じた代数をつくっている。このような代数を再生代数という。

6. 鞍点法によるVOROS解析の図解。

方程式(1.1)において

$$Q(q) = \frac{q^2}{4} - 1 \quad (6.1)$$

$$\arg x = -\alpha \quad (6.2)$$

とする。変わり点は $q=2$ と -2 である。 $\alpha=0$ に対するStokes線図を図1に示した。実線がStokes線で破線がAnti-Stokes線である。Weber関数の積分表示式([Mo])より次のような積分表示を考察の対象にする。

$$\Psi(q; \Gamma) = \int_{\Gamma} e^{-x \left(\frac{q^2}{4} + qu + \frac{1}{2}u^2 + \log u + \frac{1}{2} - \pi i \right)} \frac{du}{\sqrt{u}} \quad (6.3)$$

これは(1.1)の解であることは直接確かめられる。鞍点は

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} (-q \pm \sqrt{q^2 - 4}) \quad (6.4)$$

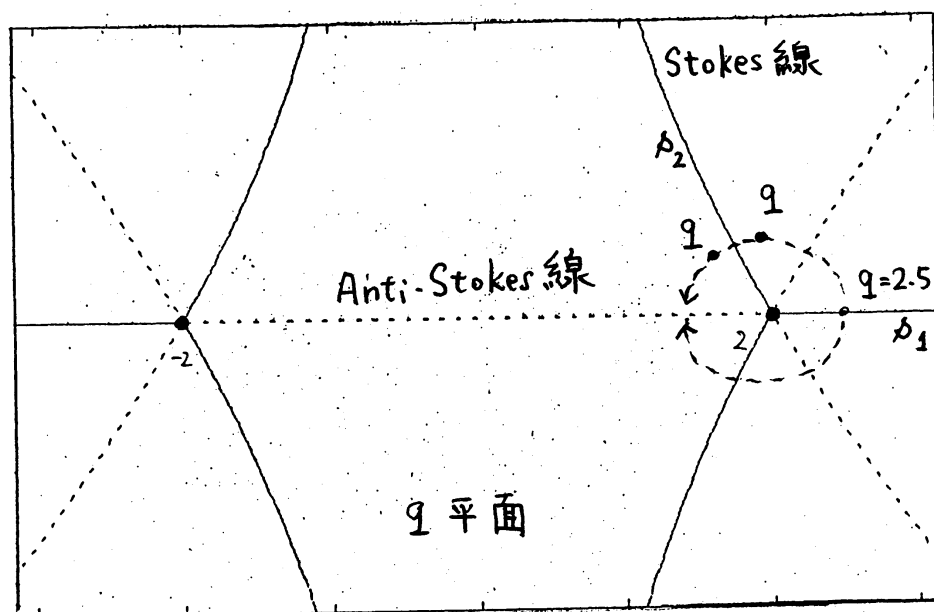
である。位相関数を

$$\xi = \frac{q^2}{4} + qu + \frac{1}{2}u^2 + \log u + \frac{1}{2} - \pi i \quad (6.5)$$

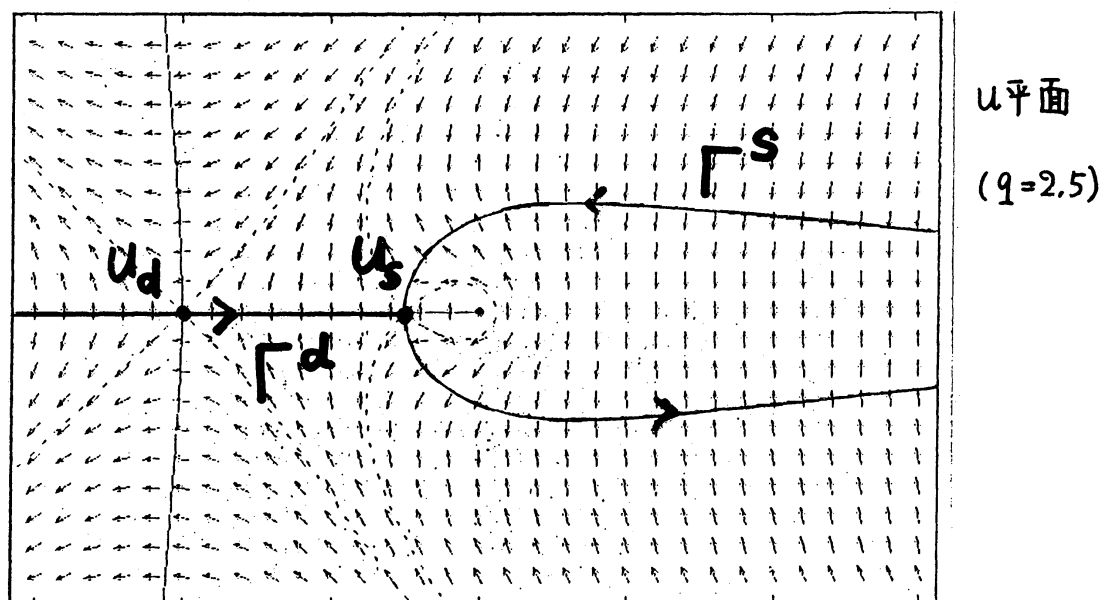
によって定義する。(6.3)の積分変数を(6.5)によって u から ξ へ変換すれば、WK

B展開のBalian-Bloch表示をえる。鞍点における位相は

図 1

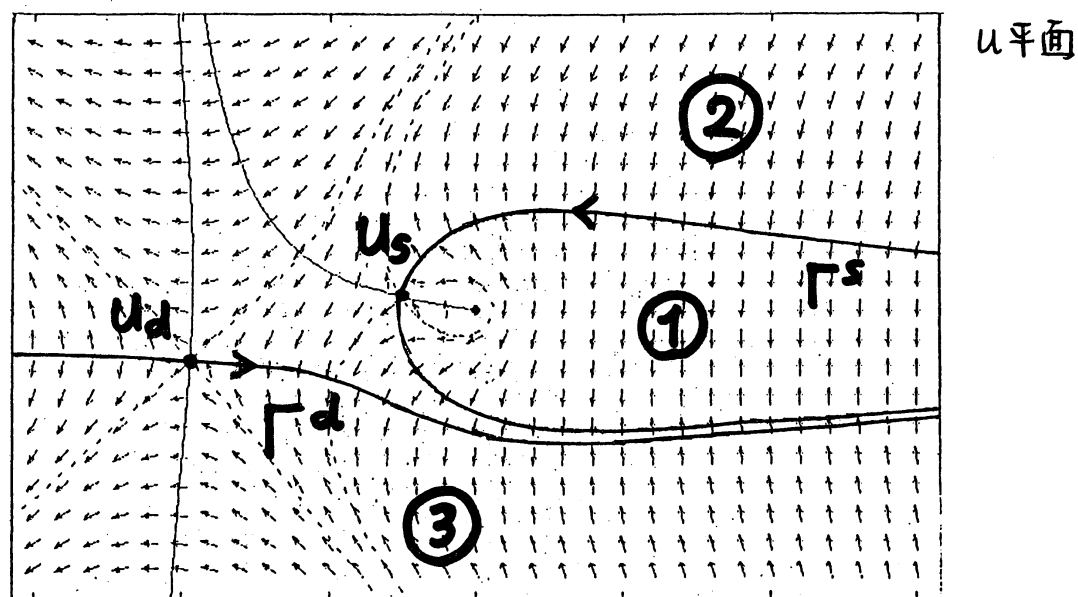


方程式 $\left(-\frac{d^2}{dq^2} + x^2\left(\frac{q^2}{4} - 1\right)\right)\psi(q) = 0$ の $\alpha = 0$ に
 対する Stokes 線 と Anti-Stokes 線

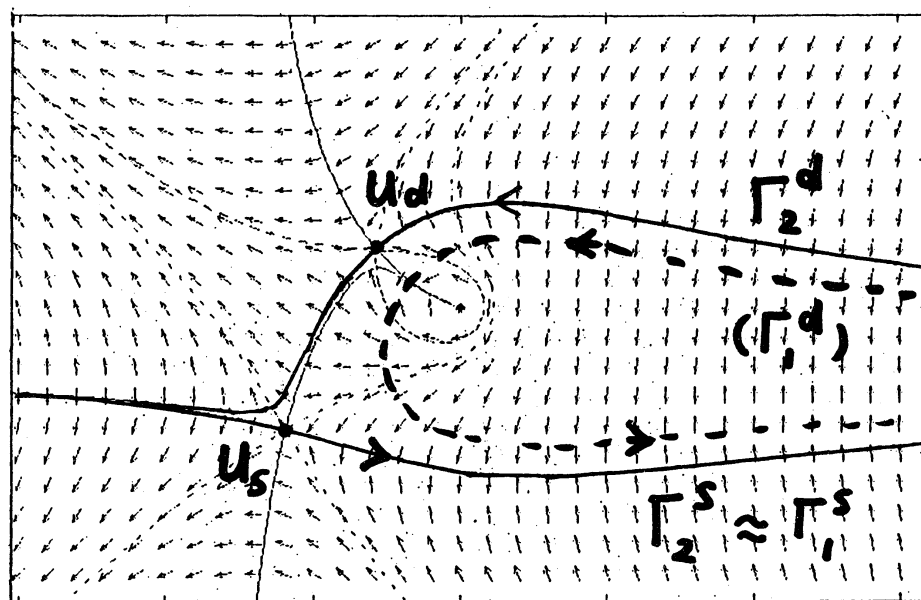


鞍点法による積分路. 矢印は $\text{Re } \psi$ の等高線の接ベクトル.

$q=2.5$ は Stokes 線 ρ_1 上にある. u_d, u_s は鞍点.



$q = 2.43 + \sqrt{0.25}$. 積分路を境界とする領域 ①, ②
 ③ は 写像 (6.5) によって異なる 切り込みの入った平面に写される.



$q = 1.75 + \sqrt{0.43301}$ Stokes 線 σ_2 をよこぎった直後,
 Anti-Stokes 線を越えたときに u_d と u_s が入れかわっている.

$$\xi_{\pm} = \xi(u_{\pm}) = \pm \frac{q}{4} \sqrt{q^2 - 4} - \log(q \pm \sqrt{q^2 - 4}) + \log 2 \quad (6.6)$$

である。一般に鞍点法の公式によれば

$$\int_{\Gamma} e^{-x \xi(u)} A(u) du \sim x^{-1/2} \left(\frac{2}{\xi''(u_0)} \right)^{1/2} e^{-x \xi(u_0)} A(u_0) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (6.7)$$

である。したがって(6.3)の鞍点 ξ_+ をとおる最急降下線に対応する漸近展開第1項は

$$x^{-1/2} \left(\frac{q^2}{4} + 1 \right)^{-1/4} 2^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) e^{-x \xi(u_+)} \quad (6.8)$$

である。
$$\omega(q) = \int_2^q \sqrt{\frac{q'^2}{4} - 1} dq' \quad (6.9)$$

とおいたWKB展開第1項に一致する。

q を2を中心として半径0.5の円周に沿って正の向きに1周させる。漸近展開の優部と劣部に対応する二つの最急降下線がある。それを Γ^d と Γ^s とかく。 $q=2.5$ のときStokes線上にある。図2にあるように Γ^s は定まるが Γ^d は一意に定まらない。 $\arg(q-2)$ が0から増加すると Γ^d と Γ^s は滑らかに連続的に変化する。 q がAnti-Stokes線を越えると優部と劣部が入れ替わる。 q が次のStokes線を越えるとき Γ_1^s は Γ_2^s に連続的に変化するだけだが、 Γ_1^d は不連続に Γ_2^d に形を変える。 Γ_1^d は積分の値を変えることなしに最急降下線 Γ_2^d に変形することはできない。 Γ_1^d は Γ_2^d と Γ_2^s の和になる。結局、

$$\psi(q; \Gamma_1^d) \rightarrow \psi(q; \Gamma_2^d) + \psi(q; \Gamma_2^s)$$

となり、 $\psi(q; \Gamma_2^s)$ がStokes現象として付加される劣部である。これを続けて「定理」1の内容を確かめることができる。「定理」2に対応する現象は $\alpha=\pi$ のStokes線図において α を π から増減させて対応するStokes線図において q を動かして確かめることができる。

付記。偏角 α におけるStokes線の作図アルゴリズムは次の方法によった ([012])。

$$\sqrt{Q(q)} = U(x, y) + i V(x, y), \quad q = x + iy$$

とおく。(実際は二価性に注意がいる)。

$$\operatorname{Im} (e^{-i\alpha} \int_{q_0}^q \sqrt{Q(q')} dq') = -\text{定}$$

の軌跡 $q=q(t)=x(t)+iy(t)$ を求めればよい。

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im} (e^{-i\alpha} \int_{q_0}^q \{U(x,y) + iV(x,y)\} (dx + i dy)) = 0$$

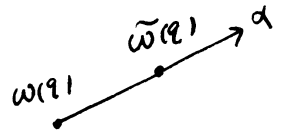
より連立方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\cos \alpha U(x,y) + \sin \alpha V(x,y)) \\ \dot{y} = \cos \alpha V(x,y) - \sin \alpha U(x,y) \end{cases}$$

をえる。これを[Mr]にならって2次のRunge-Kutta法で解く。変わり点方程式の特異点なので変わり点からの「初めの一步」はTaylor展開を用いて直線で近似する。変わり点の位数が高くても $Q(q)$ が有理関数で極を持つ場合でも作図は正常にできる。Anti-Stokes線も同様である。位相関数(6.5)の u に関する微分は零点(6.4)を持ち原点に極を持つ u の有理関数なので最急降下(上昇)線の作図も同じ考えでできる。

References

- [Ah] Ahmedou Ould Jidoumou, MODELES DE RESURGENCE PARAMETRIQUE: FONCTIONS D'AIRY ET CYLINDRO-PARABOLICQUES, Thèse à l'Université de Nice Sophia Antipolis
- [AKT] Aoki, T., T. Kawai and Y. Takei, The Bender-Wu Analysis and the Voros Theory, preprint RIMS-732 (1990)
- [BB] Balian, R. and C. Bloch, SOLUTION OF THE SCHRÖDINGER EQUATION IN TERMS OF CLASSICAL PATHS, Ann. Phys., 85(1974)514-545
- [C] Candelpergher, B. Une introduction à la résurgence, Gazette des Mathématiciens, S.M.F., n42(October 1989), 36-64
- [CNP1] Candelpergher, B., J.C. Nosmas and F. Pham, Résurgence et développements semi-classiques (Séminaire semi-classique, Nice 1985-87) (in preparation)
- [CNP2] Approche de la résurgence, book to appear.
- [DD] Delabaere, E. and H. Dillinger, CONTRIBUTION A LA RESURGENCE QUANTIQUE Résurgence de Voros et Fonctions spectrale de Jost, Thèse de Doctorat,



à l'Université en 1991

- [DDP] Delabaere, E., Dillinger, H. and F. Pham, Développements semi-classiques exacts des niveaux d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C.R.Acad.Sci. Série I, 310(1990)141-146
- [Ec1] Ecalle, J. LES FONCTIONS RESURGENTES, Publ.Math.d'Orsay.
Tome I: Les algèbres de fonctions résurgentes. 81-05(1981)
Tome II: Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération 81-06(1981)
Tome III: L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux. 85-05(1985)
- [Ec2] Ecalle, J. Cinq applications des fonctions résurgentes, Pré-pub.math., Univ. de Paris-Sud 84T62(1984)
- [He] Heading, J. An Introduction to PHASE-INTEGRAL METHODS, Methuen's monographs on physical subjects, London & New York, 1962.
- [Mo] 森口繁一他「数学公式III」-特殊関数-, 岩波、1960.
- [Mr] 森本光生「パソコンによる微分方程式」朝倉書店、1987
- [Ol1] Olver, F.W.J. Asymptotics and Special Functions, A.P.1974
- [Ol2] Olver, F.W.J. General Connection Formula for Liouville-Green Approximation in the Complex Plane, Phil. Trans. Roy. Soc. 289A(1978)501-548
- [Ph1] Pham, F. Introduction à la résurgence quantique (d'après Ecalle et Voros), Sémin.Bourbaki, 656, 1985/86.
- [Ph2] Pham, F. Resurgence, Quantized Canonical Transformations and Multi-Instanton Expansions, Prospect in Algebraic Analysis (dedicated to Prof M.Sato's 60th birthday) A.P.1989
- [Ph3] Pham, F. Fonction résurgentes implicites, C.R.A.S. t309(1989)999-1001.
- [Ph4] Pham, F. "Voros in a nutshell", (Quantum resurgence of 1 dimensional Schrödinger equation), informal seminar at RIMS in 1990
- [T] Takasaki, K. ANALYTIC EXPRESSION OF VOROS COEFFICIENTS AND ITS APPLICATION TO WKB CONNECTION PROBLEM, preprint RIMS-725 (1990)
- [Vo1] Voros, A. Correspondence semi-classique et résultats exacts: cas des spectres d'opérateurs de Schrödinger homogènes, C.R.A.S. 293(1981) 709-712.
- [Vo2] Voros, A. PROBLEME SPECTRAL DE STURM-LIOUVILLE: LE CAS DE L'OSCILLATEUR QUARTIQUE, Sémin.Bourbaki, 602(1982/83) Astérisque, 1983.
- [Vo3] Voros, A. The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, Ann.Inst.H. Poincaré 39A(1983)211-338.
- [We] Wentzel, G. Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik, Z.Physik 38(1926), 518-529
([DD], [Ah]は竹井義次氏に教えていただいた。)