

Generalized extended Lorentz cone programming の弱双対定理

小崎 敏寛 (Toshihiro Kosaki)*
ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

概要

二次錐 [1, 3] を一般化した extended Lorentz cone [4, 5, 6] とさらに一般化した錐を 3 つ考える。その錐を制約に使った最適化問題の弱双対定理を証明する。さらに目的関数が凸二次関数の時も考える。

1 はじめに

最適化問題に対して、双対問題を考えることがある。最小化問題である主問題に対して、最大化問題として双対問題を考え、主問題と双対問題の（実行可能解における）目的関数の差を双対ギャップという。双対ギャップを最適性の基準として使うアルゴリズムとして、主双対内点法 [2, 7] がある。アルゴリズムが上手く動くためには、弱双対定理が重要である。そこで、弱双対定理を示す。

二次錐計画問題 [1, 3] は多くの応用を持つ問題のクラスである。そこで、本稿では二次錐計画問題の一般化を考える。

2 節では目的関数が線形の時、3 節では目的関数が凸二次の時を考える。4 節で、まとめと今後の課題を述べる。

記法として、ベクトル x と y に対して、内積を $\langle x, y \rangle := x^T y$ とする。

2 目的関数が線形の時

この節では目的関数が線形の時を考える。

2.1 2 ノルムの時

2.1.1 定式化

考える問題は次の extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, \tilde{x} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \in L_2 := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|_{e_p}\} \end{aligned} \tag{P-2}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

ただし, e_p は全ての要素が 1 の p 次の列ベクトル. 変数は $\tilde{x}$. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} + \tilde{z} = c \\ & \tilde{z} \in M_2 := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq \|t\|, z \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{D-2})$$

ただし, 変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.1.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle &= \langle A^T \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\ &= \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\ &= \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \langle \|u\| e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &= \|u\| \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \|u\| \|t\| + \langle u, t \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって, 弱双対定理がなりたつ.

2.2 p ノルムの時

2.2.1 定式化

考える問題は次の p ノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, \tilde{x} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A \tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \in L_p := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|_p e_p\} \end{aligned} \quad (\text{P-p})$$

ただし, 変数は $\tilde{x}$. ノルムの下付き添え字の $p \geq 1$ と $q \geq 1$ は, $1/p + 1/q = 1$ をみたす定数. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} + \tilde{z} = c \\ & \tilde{z} \in M_q := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq \|t\|_q, z \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{D-p})$$

ただし, 変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.2.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle &= \langle A^T \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\
 &= \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\
 &= \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq \langle \|u\|_p e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &= \|u\|_p \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq \|u\|_p \|t\|_q + \langle u, t \rangle \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

したがって、弱双対定理がなりたつ。

2.3 一般のノルムの時

2.3.1 定式化

考える問題は次のノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \langle c, \tilde{x} \rangle \\
 \text{s.t.} \quad & A\tilde{x} = b \\
 & \tilde{x} \in L_n := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq f(u)e_p\}
 \end{aligned} \tag{P-n}$$

ただし、 f をノルムとする。変数は $\tilde{x}$ 。双対問題は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle \\
 \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} + \tilde{z} = c \\
 & \tilde{z} \in M_n := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq f^\circ(t), z \geq 0\}
 \end{aligned} \tag{D-n}$$

ただし、 f° は f の双対ノルム。変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$ 。

2.3.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle &= \langle A^T \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\
 &= \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\
 &= \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq \langle f(u)e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &= f(u) \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq f(u) f^\circ(t) + \langle u, t \rangle \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

したがって、弱双対定理がなりたつ。

2.4 ゲージの時

2.4.1 定式化

考える問題は次のゲージ extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle c, \tilde{x} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \in L_g := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \rho(u)e_p\} \end{aligned} \quad (\text{P-g})$$

ただし, ρ をゲージとする. 変数は $\tilde{x}$. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} + \tilde{z} = c \\ & \tilde{z} \in M_g := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq \rho^\circ(t), z \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{D-g})$$

ただし, ρ° は ρ の双対ゲージ. 変数は $(\tilde{y}, \tilde{z})$.

2.4.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle &= \langle A^T \tilde{y} + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\ &= \langle \tilde{z}, \tilde{x} \rangle \\ &= \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \langle \rho(u)e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &= \rho(u) \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \rho(u)\rho^\circ(t) + \langle u, t \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって, 弱双対定理がなりたつ.

3 目的関数が凸二次の時

この節では目的関数が凸二次の時を考える.

3.1 2ノルムの時

3.1.1 定式化

考える問題は次の凸二次 extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \in L_2 := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|e_p\} \end{aligned} \quad (\text{P-2-2})$$

ただし, Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル. 変数は $\tilde{x}$. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}', Q \tilde{x}' \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} - Q \tilde{x}' + \tilde{z} = c \\ & \tilde{z} \in M_2 := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq \|t\|, z \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{D-2-2})$$

ただし, 変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$.

3.1.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \tilde{x}, Q \tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}', Q \tilde{x}' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x}, Q \tilde{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}', Q \tilde{x}' \rangle + \langle A^T \tilde{y} - Q \tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \|u\| e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \|u\| \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \|u\| \|t\| + \langle u, t \rangle \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって, 弱双対定理がなりたつ.

3.2 p ノルムの時

3.2.1 定式化

考える問題は次の凸二次 p ノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \langle \tilde{x}, Q \tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A \tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \in L_p := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq \|u\|_p e_p\} \end{aligned} \quad (\text{P-p-2})$$

ただし, Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル. 変数は $\tilde{x}$. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned} \max \quad & \langle b, \tilde{y} \rangle - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}', Q \tilde{x}' \rangle \\ \text{s.t.} \quad & A^T \tilde{y} - Q \tilde{x}' + \tilde{z} = c \\ & \tilde{z} \in M_q := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq \|t\|_q, z \geq 0\} \end{aligned} \quad (\text{D-p-2})$$

ただし, 変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$.

3.2.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle + \langle A^T \tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \|u\|_p e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \|u\|_p \langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \|u\|_p \|t\|_q + \langle u, t \rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

したがって、弱双対定理がなりたつ。

3.3 一般のノルムの時

3.3.1 定式化

考える問題は次の凸二次ノルム extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle \\
& \text{s.t. } A\tilde{x} = b \\
& \tilde{x} \in L_n := \{(x, u) \in \Re^p \times \Re^q : x \geq f(u)e_p\}
\end{aligned} \tag{P-n-2}$$

ただし、 Q は対称半正定値行列、 e_p は全ての要素が1のベクトル。変数は $\tilde{x}$ 。双対問題は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \max \langle b, \tilde{y} \rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle \\
& \text{s.t. } A^T \tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\
& \tilde{z} \in M_n := \{(z, t) \in \Re^p \times \Re^q : \langle z, e_p \rangle \geq f^\circ(t), z \geq 0\}
\end{aligned} \tag{D-n-2}$$

ただし、 f° は f の双対ノルム。変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$ 。

3.3.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle + \langle A^T \tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle f(u)e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + f(u)\langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
&\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + f(u)f^\circ(t) + \langle u, t \rangle \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

したがって, 弱双対定理がなりたつ.

3.4 ゲージの時

3.4.1 定式化

考える問題は次の凸二次ゲージ extended Lorentz cone programming :

$$\begin{aligned}
& \min \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle \\
& \text{s.t. } A\tilde{x} = b \\
& \tilde{x} \in L_g := \{(x, u) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : x \geq \rho(u)e_p\}
\end{aligned} \tag{P-g-2}$$

ただし, Q は対称半正定値行列, e_p は全ての要素が 1 のベクトル. 変数は $\tilde{x}$. 双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
& \max \langle b, \tilde{y} \rangle - \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle \\
& \text{s.t. } A^T \tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z} = c \\
& \tilde{z} \in M_g := \{(z, t) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : \langle z, e_p \rangle \geq \rho^\circ(t), z \geq 0\}
\end{aligned} \tag{D-g-2}$$

ただし, ρ° は ρ の双対ゲージ. 変数は $(\tilde{x}', \tilde{y}, \tilde{z})$.

3.4.2 弱双対定理

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \langle c, \tilde{x} \rangle - \langle b, \tilde{y} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle \\
 &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x}, Q\tilde{x} \rangle + \frac{1}{2}\langle \tilde{x}', Q\tilde{x}' \rangle + \langle A^T \tilde{y} - Q\tilde{x}' + \tilde{z}, \tilde{x} \rangle - \langle A\tilde{x}, \tilde{y} \rangle \\
 &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \tilde{x}, \tilde{z} \rangle \\
 &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle x, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \langle \rho(u)e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &= \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \rho(u)\langle e_p, z \rangle + \langle u, t \rangle \\
 &\geq \frac{1}{2}\langle \tilde{x} - \tilde{x}', Q(\tilde{x} - \tilde{x}') \rangle + \rho(u)\rho^\circ(t) + \langle u, t \rangle \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

したがって、弱双対定理がなりたつ.

4 まとめと今後の課題

本稿では、二次錐計画問題を拡張した：extended Lorentz cone 計画問題をさらに一般化した問題を考えた。目的関数が線形と二次の時を考え、弱双対定理を証明した。証明の過程の不等号が、全て等号で成りたてば、最適解が得られていることがわかる。このことから制約想定のようなものを考えることができる。

今後の課題としては、応用を考えることやアルゴリズムを考えることがある。

参考文献

- [1] F. Alizadeh and D. Goldfarb, Second-order cone programming, *Mathematical Programming*, 95, 3-51, 2003.
- [2] 小島政和, 土谷隆, 水野眞治, 矢部博, 「内点法」, 朝倉書店, 2004.
- [3] M. Lobo, L. Vandenbergh, S. Boyd, and H. Lebert, Applications of second-order cone programming, *Linear Algebra and its Applications*, 284, 193-228, 1998.
- [4] S. Z. Németh and L. Xiao, Linear complementarity problems on extended second order cones, *arXiv*, 2017.
- [5] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and mixed complementarity problems, *Journal of Global Optimization*, 62, 443-457, 2015.
- [6] S. Z. Németh and G. Zhang, Extended Lorentz cones and variational inequalities on cylinders, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 168, 756-768, 2016.
- [7] S. J. Wright, Primal-dual interior-point method, *SIAM Publications*, 1997.