

On fibered Calabi-Yau threefolds of Type II₀

お茶の水女子大学理学部 小木曾 啓示

この小論では、城崎シンポジウムでの講演内容とその後の発展について要約したいと思います。出発点になるのは定理(1.2)で、主結果は、シンポジウムでも述べた定理(2.4)と、その後得られた定理(3.3)です。証明には、あまりふれません。証明に興味のある方は原論文を参照して下さい。

§1. 序 - Rough Classification of fibered Calabi-Yau 3-folds

定義(1.1)

(1) $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X$ & $\pi_1(X) = \{1\}$ をみたす minimal projective 3-fold $X/\mathbb{C}$ と (こゝでは) Calabi-Yau 3-fold と呼ぶ。

(2) Calabi-Yau 3-fold X からの surjective morphism $\varphi: X \rightarrow W$ が、
(i) W は normal & projective (ii) φ の fibers は connected の
2条件をみたすとき、 $\varphi: X \rightarrow W$ を X 上の fiber space structure
といい、fiber space structure 付き Calabi-Yau 3-fold を fibered
Calabi-Yau 3-fold と呼ぶ。 $\square$

$\varphi: X \rightarrow W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold とする。このとき、

$H \in W$ への very ample (effective) divisor とすると, φ は, $\varphi = \bigoplus \varphi^* H_i$ により, X への nef & effective divisor $\varphi^* H$ から復元される。

次の定理は, fibered Calabi-Yau 3-fold を考えるときの 1つの出発点となるものである:

定理(1.2) ([O1], [SW], [OP]) (Rough classification theorem of fibered Calabi-Yau 3-folds via numerical invariants)

(1) $D \neq 0$ を Calabi-Yau 3-fold X への nef & effective divisor とすると, D は semi-ample: ある正の整数 m があつて, $|mD|$ は free で, $\Phi := \bigoplus |mD| : X \rightarrow W (= \text{Im } \Phi) \subset \mathbb{P}^{\dim |mD|}$ は, fibered Calabi-Yau 3-fold となる。また, $\Phi: X \rightarrow W$ は, このふうな m をとり π によつて, D が定まる。

(2) (1)の $\Phi: X \rightarrow W$ は, D に付随する 2つの numerical invariants $\nu(X, D)$ と $D \cdot C_2(X)$ の値を以下のように分類, 特徴付けられる。

このとき,

$\nu(X, D) := \max \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid D^n \neq 0\}$ (numerical Iitaka dimension);

$C_2(X)$ は, $\text{Sing } X$ (有限集合) の resolution $\nu: \hat{X} \rightarrow X$ を用いて,

$C_2(X) \cdot D := C_2(\hat{X}) \cdot \nu^* D$ で定まる $\text{Pic } X$ への linear form。

Type	$\nu(X, D)$	$D \cdot C_2(X)$	Structure of $\Phi: X \rightarrow W$
I_0	1	0	$\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, general fiber is, (原点を指定しない) Abelian surface
I_+	1	+	$\Phi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$, general fiber is K3 surface
II_0	2	0	W is high log terminal singularities の W とも rational surface である. $\mathcal{O}_W(12K_W) \cong \mathcal{O}_W$. -一般に "I" は, (原点を指定しない) elliptic curve.
II_+	2	+	$(W, \exists \Delta)$ ($\Delta > 0$ は $\mathbb{Q}$ -divisor) は log terminal singularities である. W は rational surface かつ $\mathcal{O}_W(12(K_W + \Delta)) \cong \mathcal{O}_W$. -一般に "I" は, (原点を指定しない) elliptic curve.
III_0	3	0	$\Phi: X \rightarrow W$ は birational morphism である. W は $\exists$ abelian 3-fold A の Gorenstein かつ $\text{codim} \geq 2$ である. free に作用する有限群 G による商: $W = A/G$.
III_+	3	+	$\Phi: X \rightarrow W$ は birational morphism である. W は III_0 の中にあらわしたものの以外の canonical Calabi-Yau 3-fold.

述に, structure を述べた性質は各 Type を特徴付ける。

□

注意

- (1) $C_2(X)$ は ν のとり方により定まり, D が nef ならば, $C_2(X) \cdot D \geq 0$ である. ([Mi])
- (2) 定理(1)は, abundance theorem for minimal 3-folds ([Ka4]) の modification. 今では, 定理(1)は, log abundance theorem for 3-folds ([KeMaMa]) の系でもある。

(3) [O1] では, 仮定 $\pi_2^{\text{alg}}(X - \text{Sing } X) = \{1\}$ の下で論じているが, $\mathcal{O}_X(K_X) \cong \mathcal{O}_X$ より, $\pi_2(X) = \{1\} \Leftrightarrow \pi_2(X - \text{Sing } X) = \{1\}$ が, [ka3] より経うので, [O1] の議論はそのまま適用できる。しかも, この仮定から, $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$ も経うことが, [ka2] からわかる。

(4) [O1] には, Type II₀, II₊ 中の式 $\mathcal{O}_W(12K_W) \cong \mathcal{O}_W$, $\mathcal{O}_W(12(K_W + \Delta)) \cong \mathcal{O}_W$ の記述はない。[ka1], [N] にもとなく, sheaf theoretic な証明は [OP] に書いてある。

(5) 表中 Type II₀ と II₊ の違いはそれほど顕著にあらわれていないが, 特異ファイバーの様子には大きな違いがある。W の general hyperplane H をとり, $\pi: X \rightarrow W \ni H$ に base change して得られる 極小 複曲面 $\pi|_S: S \rightarrow H$ について, Type II₀ のときは smooth fibration になるが, Type II₊ の時には, 有理曲線(いくつか)からなる特異ファイバーを必ずもつ。(いふ場合も multiple fiber はもたないが。)([O1])。従って, Type II₀ と Type II₊ は正しく区別して扱われるべきものと思われる。

(6) Type II₀ の base surface はかなり特殊な有理曲面である。Zhang 氏はこの様に $K_W \cong 0$ となる (高次元特異点のみ

ともつ) 有理曲面を log Enriques 曲面と呼んでいる。

([2])

(7) [01] には, Type II_0 と Type III_+ は区別をわけていない。

ここに書いた, Type II_0 の特徴付けは, Shepherd-Barron と Wilson ([SW]) による。

(8) 各 Type の存在は, [01, 02, 04] に示されている。□

ところで, この分類表を見る限り, Type II_0 と Type III_0 はかなり特殊な fiber space structure に思われる。分類理論での基本的考え方: 「特殊なものは完全に分類し, 一般的なものは family を記述 (考察) する。」に依るは, Type II_0 及び Type III_0 の fibered Calabi-Yau 3-folds は完全な分類に期待される対象である。この小論の目的は, §2 で, (城崎で話した) Type II_0 の 1 つの自然な subclass である Type II_0A について, §3 で, (その後また) Type III_0 について, それぞれ完全に分類した結果を述べることである。いおのの場合も得られる Calabi-Yau 3-folds はすべて rigid になる。本当に“特殊”なのである。

注意 一般的なものについては, family を考察すると述べた。この立場からは, M. Gross ([G]) による次の深い

結果が知られてゐる。

定理 (M. Gross)

Elliptic fibered Calabi-Yau 3-folds は upto birational equivalence $\mathbb{C}$ -bounded family を成す。 $\square$

§2. Complete Classification of fibered C.Y. 3-folds of Type II₀A

$\pi: X \rightarrow W$ を fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II₀ とする。

このとき, $I := \min \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{O}_W(nK_W) \cong \mathcal{O}_W\}$ (= the global canonical index) とおくと, 定理 (1.2) より $n \mid 12$ である。

$\pi: X \rightarrow W$ は, W の global canonical cover

$$\pi: \tilde{W} := \operatorname{Spec}_{\mathcal{O}_W} \left(\bigoplus_{i=0}^{I-1} \mathcal{O}_W(-iK_W) \right) \rightarrow W$$

に $\tilde{X} \rightarrow \tilde{W}$ と π の 2 の場合に分かれる:

Type II₀A : $\tilde{W}$ は abelian surface ;

Type II₀K : $\tilde{W}$ は高次元 Du Val singularities のみをもつ K3 surface.

この節では, fibered Calabi-Yau 3-folds of Type II₀A を完全に分類する。(Type II₀K については後述しない。)

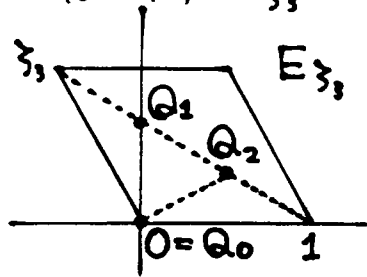
出発点は, Ueno-Beauville による次の例である。

例 (2.1) ([B])

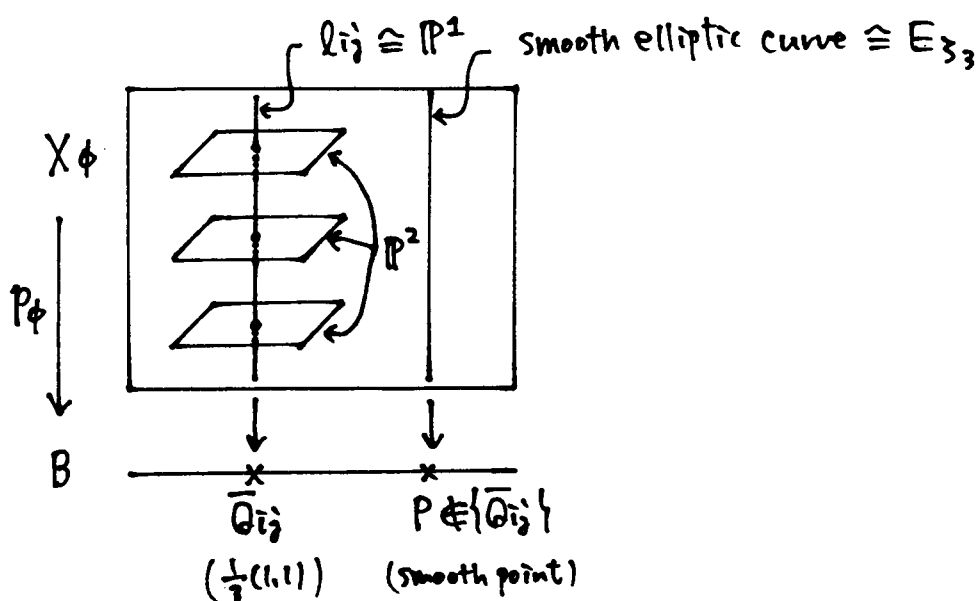
$\zeta_3 = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$ とし, period は ζ_3 の elliptic curve

$E_{\mathbb{Z}_3} := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta_3$ と考える。すると, abelian n -fold $E_{\mathbb{Z}_3}^n$ は $\mathbb{Z}_3$ 倍する自己同型 $g_n: E_{\mathbb{Z}_3}^n \rightarrow E_{\mathbb{Z}_3}^n$ ($x_i \mapsto (\zeta_3 x_i)$ ($i=1, \dots, n$)) をもつ。特に, $E_{\mathbb{Z}_3}^3 / \langle g_3 \rangle$ は 27 個の $\frac{1}{3}(1,1,1)$ 型特異点をもち, その toric resolution $X_\phi \xrightarrow{\nu} E_{\mathbb{Z}_3}^3 / \langle g_3 \rangle$ は, smooth Calabi-Yau 3-fold となり, ν は自然な射影 $p_{22}: E_{\mathbb{Z}_3}^3 / \langle g_3 \rangle \rightarrow E_{\mathbb{Z}_3}^2 / \langle g_2 \rangle$ ($:= B$ とおく。) の合成写像 $p_\phi: X_\phi \rightarrow B$ は fibered Calabi-Yau 3-fold of Type II₀A となる。□

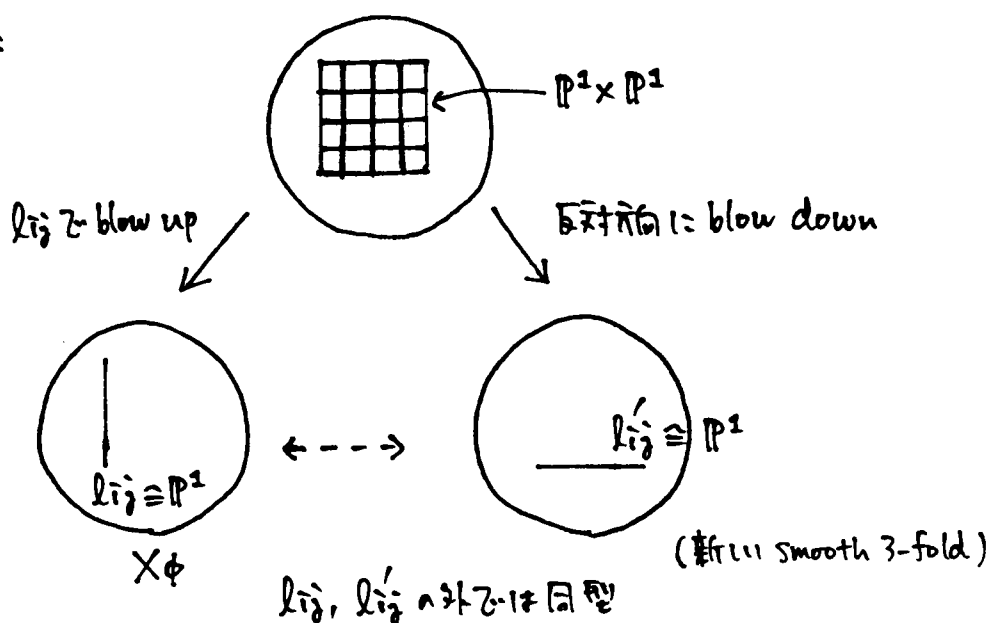
以下の記述のために, $E_{\mathbb{Z}_3}^{\langle g_2 \rangle}$ の 3 点に次の様に名前を付ける:



すると, B は, 自然な射影 $E_{\mathbb{Z}_3}^2 \rightarrow B$ での, $Q_{ij} = (Q_i, Q_j)$ の像 $\overline{Q_{ij}}$ に $\frac{1}{3}(1,1)$ 型特異点をもち, $p_\phi: X_\phi \rightarrow B$ は, $\overline{Q_{ij}}$ とは n 個の特異ファイバーをもつ。その形は, 次の様になる。



実は, $N_{X_\phi|l_{ij}} \cong \mathcal{O}_{l_{ij}}(-1)^{\oplus 2}$ であることが check できる
 ので, l_{ij} には t : elementary transformation を与え, π ,
 $P_\phi: X_\phi \rightarrow B$ から, B と n 個の fiber space を作ることもできる
 3:



(l_{ij} には t : elementary transformation)

要する。(あとは自明であろう。) これは, X 内にたたく因子があることを用いて示される。(ここでは, 逆に, Calabi-Yau であるが, elementary transformation の後, projectivity がくたがる 1 つの印象的な例をあげておく:

(巨例) ([02]) $\gamma \in \mathbb{P}^5$ の general な (2,4) complete intersection とする。このとき, γ は smooth Calabi-Yau 3-fold で $N_{\gamma/\mathbb{C}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-2)^{\oplus 2}$ となる smooth curve $\mathbb{C}$ を含む。 $\mathbb{C}$ に沿って elementary transformation を行い, 2 得られる "Calabi-Yau 3-fold" を Z とすると, $H^2(Z, \mathbb{Z}) \cong \text{Pic } Z \cong \mathbb{Z}L$, $L^3 = 0$ となる。疑いなく, この Z は projective variety と homeo ではない。) $\square$

少し横にそれてしまふが, fibered Calabi-Yau 3-folds of Type II₀A は 例 2.2 の modified Beauville's examples に限るというのが主結果である。

よりくわしく述べるために Λ^2 の部分集合からなる次の集合を導入しておく。

定義 (2.3)

$\Lambda^2 = \{(i,j) \mid i=0,1,2; j=0,1,2\}$ とし, 次の, Λ^2 の 14 個の部分集合からなる集合を考える:

$$\begin{aligned} \Omega_{II_0 A} := & \{ \phi, \Lambda^2, \{ (0,0) \}, \{ (0,0) \}^c, \{ (0,0), (0,1) \}, \{ (0,0), (0,1) \}^c, \\ & \{ (0,0), (1,0), (2,0) \}, \{ (0,0), (1,0), (0,1) \}, \\ & \{ (0,0), (1,0), (2,0) \}^c, \{ (0,0), (1,0), (0,1) \}^c, \\ & \{ (0,0), (1,0), (0,1), (2,0) \}, \{ (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) \}, \\ & \{ (0,0), (1,0), (0,1), (2,0) \}^c, \{ (0,0), (1,0), (0,1), (1,1) \}^c \}. \end{aligned}$$

($\{*\}^c$ は $\{*\} \cap \Lambda^2$ の補集合。) $\square$

定理 (2.4) ([03]) (Complete classification of fibered Calabi-Tau 3-folds of Type $II_0 A$)

$\Phi: X \rightarrow W$ は fibered Calabi-Tau 3-fold of Type $II_0 A$ とする。

このとき, $\Phi: X \rightarrow W$ に対し $T \in \Omega_{II_0 A}$ が一意的に存在して, $\Phi: X \rightarrow W$ は $p_T: X_T \rightarrow B$ と fiber spaces と

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\cong} & X_T \\ \Phi \downarrow & \cong & \downarrow p_T \\ W & \xrightarrow{\cong} & B \end{array}.$$

特に, fibered Calabi-Tau 3-fold of Type $II_0 A$ は fiber spaces としての同型を除いてちょうど 14 個で, それだけ rigid となる。

$\square$

注意 証明の要点は, $W = E_{\mathbb{Z}_3}^2 / \langle g_2 \rangle$ となることと,

次の図式を示すことにある:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\text{birat.}} & E_{3,3}^3 / \langle g_3 \rangle & \longleftarrow & X_\phi \\
 \Phi \downarrow & \Omega & \downarrow p_{12} & \swarrow p_\phi & \\
 W & = & E_{3,3}^2 / \langle g_2 \rangle (=B) & & .
 \end{array}$$

これが言えること、 $\Phi: X \rightarrow W$ は、 $p_\phi: X_\phi \rightarrow B (= E_{3,3}^2 / \langle g_2 \rangle)$
 と $(B$ との) flop でうっかり合うことになる。 $([ka_3, k_0])$
 とこのが、 p_ϕ の fiber 内にある動かない有理曲線は l_{ij} 達だ
 けなので、 $\Phi: X \rightarrow W$ は Modified Beauville's examples のとしか
 なることが従う。あとは Modified Beauville's examples 達を
 fiber spaces の同型で分類して結論を得る。 $\square$

§3. Complete classification of fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0

この節では、fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III_0 を完全
 に分類する。先と同様、例から始める。

例(3.1) ([B]) (Beauville's example, again)

§2 の例(2.1)で作った Calabi-Yau 3-fold X_ϕ をこのでは、

X_3 と書くことにする。このとき、自然な射影

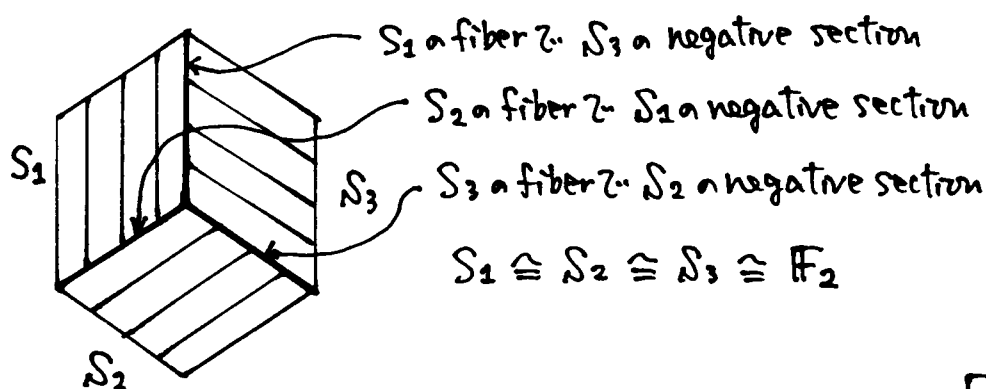
$\nu_3 := \nu: X_3 \rightarrow E_{3,3}^3 / \langle g_3 \rangle$ は fibered Calabi-Yau 3-fold of
 Type III_0 となる。 $(E_{3,3}^3 / \langle g_3 \rangle)$ は、type $\frac{1}{3}(1,1,1)$ の特異点を 27
 個持つ。 X_3 は各特異点を $\mathbb{P}^2$ におきかえて得られる smooth
 Calabi-Yau 3-fold である。) $\square$

次の例は, $[R\gamma]$ にある例をわかりやすい形に書き直したものである。

例 (3.2) ($[R\gamma]$) (Roan-Tau's example)

$C := \{x_0x_1^3 + x_1x_2^3 + x_2x_0^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$ は Klein の 4 次曲線 (C は genus 3 の非特異曲線) とし, $A_\eta \in C$ の Jacobian variety とする: $A_\eta = H^0(C, \Omega_C^3)^* / H_1(C, \mathbb{Z})$. A_η は abelian 3-fold である。

また, $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : \zeta_\eta x_1 : \zeta_\eta^3 x_2]$ (ただし, $\zeta_\eta = \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\eta})$) によって C の自己同型を induce する A_η の自己同型を g_η とする。このとき, A_η の (universal cover の) 適当な座標 (z_1, z_2, z_3) を用いると, $g_\eta: (z_1, z_2, z_3) \mapsto (\zeta_\eta z_1, \zeta_\eta^2 z_2, \zeta_\eta^4 z_3)$ と書ける。特に g_η は A_η の位数 η の Gorenstein (即ち 3-form を invariant にする) 自己同型である。商多様体 $A_\eta / \langle g_\eta \rangle$ は type $\frac{1}{\eta}(1, 2, 4)$ の特異点を丁度 η 個持つ。 $A_\eta / \langle g_\eta \rangle$ (の特異点) の toric resolution を $V_\eta: X_\eta \rightarrow A_\eta / \langle g_\eta \rangle$ とおくと, X_η は smooth な rigid な Calabi-Tau 3-fold であり, $V_\eta: X_\eta \rightarrow A_\eta / \langle g_\eta \rangle$ は fibered Calabi-Tau 3-fold of Type III となる。具体的に、 X_η は $A_\eta / \langle g_\eta \rangle$ の各特異点を次のようにもつて $\mathbb{F}_2$ をおまかえたものである:



□

逆に, fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III₀ はこの2つに限るというのが, §3の主要結果である:

定理 (3.3) ([04]) (Complete classification of fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III₀)

$\pi: X \rightarrow W$ is fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III₀ とする。

このとき, $\pi: X \rightarrow W$ は, $V_3: X_3 \rightarrow E_{3,3}/\langle g_3 \rangle$ とは

$V_\eta: X_\eta \rightarrow A_\eta/\langle g_\eta \rangle$ のいおかし - π に (の π) fiber space

と12同型になる。特に, fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III₀ は, 同型を除いてちょうど2個で, いおかし rigid とする。 □

注意

(1) $h^{1,1}(X_3) = 36$, $h^{1,1}(X_\eta) = 24$ なる X_3 兼 X_η である。

(2) §1(3.1), (3.2) で構成した2つの crepant resolutions

$\nu_3: X_3 \rightarrow E_3^3/\langle g_3 \rangle$, $\nu_7: X_7 \rightarrow A_7/\langle g_7 \rangle$ はいずれも exceptional set 内に isolated rational curves を有しない。従って, flop theorem ([ka3, ko]) に依り, $E_3^3/\langle g_3 \rangle$ または $A_7/\langle g_7 \rangle$ を base space に持つ fibered Calabi-Yau 3-fold of Type III₀ は $\textcircled{1}$ と記述するもの以外にはないことがわかる。定理 (3.3) の証明の要点は, (逆に) fibered Calabi-Yau 3-folds of Type III₀ の base が $\textcircled{2}$ の $E_3^3/\langle g_3 \rangle$ または $A_7/\langle g_7 \rangle$ のいずれかに限ることであることを示す部分にある。 $\square$

References

- [B] A. Beauville, Some remarks on Kähler manifolds with $C_1=0$, In classification of algebraic and analytic manifolds, (K. Ueno editor) Progress Math. 39 (1983) 1-26
- [G] M. Gross, A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds, Duke Math. J. 74 (1994) 271-299
- [ka1] T. Kawamata, Kodaira dimension of certain algebraic fiber spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 30, (1983) 1-24

- [Ka2] T. Kawamata, Minimal models and the kodaira dimension of algebraic fiber spaces, Crelle's J. 363 (1985) 1-46
- [Ka3] T. Kawamata, The crepant blowing-ups of 3-dimensional canonical singularities and its application to degeneration of surfaces, Ann. of Math. 127 (1988) 93-163
- [Ka4] T. Kawamata, Abundance theorem for minimal threefolds, Invent. math. 108 (1992) 229-246
- [keMaMa] S. Keel, K. Matsuki & J. McKernan, Log abundance theorem for threefolds, Duke Math. J. 75, (1994) 99-118
- [Ko] J. Kollár, Flops, Nagoya math. J. 113 (1989) 15-36
- [Mi] T. Miyaoka, The Chern classes and kodaira dimension of a minimal variety, Adv. St. Pure math. 10 (1987) 449-476
- [N] N. Nakayama, On Weierstrass models, in algebraic geometry & commutative algebra in honor of M. Nagata, vol II, Kinokuniya (1987) 405-431

- [O1] K. Oguiso, On algebraic fiber space structures on a Calabi-Yau 3-fold, Intern. math. 4 (1993) 439-465
- [O2] K. Oguiso, Two remarks on Calabi-Yau Moishezon threefolds, Crelle's J. (1994) 153-161
- [O3] K. Oguiso, On certain rigid fibered Calabi-Yau threefolds, to appear Math. Z.
- [O4] K. Oguiso, On the complete classification of Calabi-Yau threefolds of Type III₀, 1994, preprint
- [OP] K. Oguiso & T. Peternell, An observation on the nef cone of Calabi-Yau threefolds of general type, 1994, preprint
- [R] S. Roan, On the generalization of Kummer surfaces, J. Diff. Geom. 30 (1989) 523-537
- [RT] S. Roan & S. Tau, On Ricci flat 3-folds, Acta math. Sinica, 3 (1987) 256-288
- [SW] N.I. Shepherd-Baron & P.M.H. Wilson, Singular threefolds with numerically trivial first and second Chern classes, J. Alg. Geom. 3 (1994)

- [W1] P.M.H. Wilson, Calabi-Yau manifolds with large Picard number, *Invent. math.* 98 (1989) 139-155
- [W2] P.M.H. Wilson, The role of C_2 in Calabi-Yau classification - a preliminary survey, preprint, 1994.
- [Z] De-Qi Zhang, Logarithmic Enriques surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.* 31 (1991) 419-466.

(文献表は必おしも完備ではありません。定理(1.2), (2.4), (3.3)の証明に必要な文献は必要に応じて上記文献からまじりもして下さい。)