

時間領域境界要素法と超音波非破壊評価法への応用*

群馬大学・大学院理工学府[†] 斎藤 隆泰

Takahiro Saitoh

Department of Civil and Environmental Engineering
Gunma University

§1. はじめに

本論文では、時間領域境界要素法について述べ、超音波非破壊評価法に対するいくつかの数値解析例とともに、その有効性について検討する。時間領域境界要素法は、波動解析に適した数値解析手法として発展してきた [1]。従来の時間領域境界要素法は、時間増分が小さい場合の数値解の安定性や、大規模問題に対する対応に難点があるばかりか、時間領域基本解を陽な形で求めることができない粘弾性波動問題や飽和多孔質弾性波動問題等を扱うことも難しく、実用的な数値解析手法という意味では有限要素法や差分法等に遅れを取ってきた。しかしながら、畳込み積分を比較的精度良く・安定に計算できる演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method) [2] を時間領域境界積分方程式中の畳込み積分に適用する新しい時間領域境界要素法 (演算子積分時間領域境界要素法) が開発され、工学の様々な問題に適用することが行われている。また、大規模問題に対応するために、演算子積分時間領域境界要素法に高速多重極法 [3, 4] や ACA [5] と呼ばれる方法を適用して計算効率を軽減することも行われている。

本論文では、高速多重極法や ACA の詳細、その演算子積分時間領域境界要素法への適用方法については他の文献 [6, 7] に譲り、演算子積分法と演算子積分時間領域境界要素法について簡単に説明する。次に、その演算子積分法を時間領域境界積分方程式に適用し、時間方向に離散化する方法について説明する。最後に、演算子積分時間領域境界要素法を超音波非破壊評価法の数値シミュレーションに資する工学の様々な問題に適用した数値解析例

を示すことで、その有効性について確認する。

§1. 演算子積分法 (CQM: Convolution Quadrature Method)

後に示す時間領域境界積分方程式における畳込み積分を精度良く、安定に計算するために、まず演算子積分法についてまとめておく。Lubich[2] は、畳込み積分 $f(t) * g(t)$ を、 $f(t)$ の Laplace 変換を用いた離散化畳込み積によって近似する手法を提案した。

一般的に、畳込み積分は次のように表される。

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

Lubich の演算子積分法によれば、式 (1) で表される畳込み積分は、時間 t を時間増分 Δt を用いて N ステップに分割することで、次のように近似される。

$$f(n\Delta t) * g(n\Delta t) \simeq \sum_{j=0}^n \omega_{n-j}(\Delta t)g(j\Delta t), \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (2)$$

ただし、 $\omega_j(\Delta t)$ は演算子積分法における重み関数であり、Laplace パラメータ s 、自然対数の底 e を用いた関数 $f(t)$ の Laplace 変換

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad (3)$$

を用いて次のように求めることができる。

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\mathcal{R}} F\left(\frac{\gamma(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz \simeq \frac{\mathcal{R}^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} F\left(\frac{\gamma(z_l)}{\Delta t}\right) e^{\frac{-2\pi i n l}{L}} \quad (4)$$

ただし i は虚数単位である。ここで f の Laplace 変換である関数 F の存在を保証するためには、引数 $\gamma(z)/\Delta t$ の実部が正のときに正則でなければならない。式 (4) の第一式から第二式への積分の評価は、台形公式等を用いて行うことができる。そのため、引数 z_l は半径 $\mathcal{R} < 1$ の円周上の等分点 L を考え、 $z_l = \mathcal{R}e^{2\pi i l/L}$ によって表される。ここで $\mathcal{R}$ は目標とする精度 ϵ によって決定されるパラメータで、

$$\mathcal{R}^L = \sqrt{\epsilon} \quad (5)$$

により決定される。また、式 (4) の $\gamma(z)$ は線形多段法における生成多項式の商を表しており、その一般形は

$$\gamma(z) = \frac{\alpha_0 z^k + \alpha_1 z^{k-1} \dots + \alpha_k}{\beta_0 z^k + \beta_1 z^{k-1} \dots + \beta_k} \quad (6)$$

によって与えられる。線形多段法では、式 (6) の係数 α_k や β_k の決定の仕方により様々な解法が提案されているが [8], 例えば $\alpha_k \neq 0, \beta_k = 1, \beta_j = 0 (j < k)$ とすれば、 k 次の後退差分法へ帰着でき、 $\gamma(z)$ は

$$\gamma(z) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} (1-z)^i \quad (7)$$

で計算される。式 (2), (4) からわかるように、式 (1) を演算子積分法で評価するには関数 $f(t)$ の Laplace 変換 $F(s)$ が求まればよい。時間領域境界要素法では、この関数 $f(t)$ は通常、時間領域基本解に相当する。しかしながら、先に述べたように、工学の問題では時間領域基本解は陽な形で求まらないものの、Laplace 変換域でなら求まる問題もいくつか存在する。そのような問題に対しては、この演算子積分法を用いた解法は特に威力を発揮する。以下では、この演算子積分法を用いて次節で述べる時間領域境界積分方程式における畳み積分を評価する。

§2. 弾性波動散乱問題と境界積分方程式

§2.1 弾性波動散乱問題

本節では、時間領域境界積分方程式に演算子積分法を適用する方法を説明するための例として、弾性波動散乱問題を取り上げる。解析の対象がスカラー波動問題等になったとしても、適用方法は同様の手順で実行できる。

さて、以下の定式化では、3次元直交直線座標系 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ に対し、変位は (x_1, x_2) 方向成分のみを考え、全ての物理量は x_3 に依存しないものとした面内波動問題を考える。無限領域 D において入射波 u_i^{in} は、散乱体 $\bar{D}$ の境界表面 S により反射・散乱されるとする。このとき、入射波 u_i^{in} が散乱体 $\bar{D}$ に到達するまで静かな過去を持つとする。すなわち、初期条件 $u_i(\mathbf{x}, t=0) = 0$ 及び $\partial u_i(\mathbf{x}, t=0)/\partial t = 0$ を考慮し、物体力を無視すれば、変位 u_i 、対応する表面力 t_i が満たす支配方程式及び境界条件は、それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) u_{j,ji}(\mathbf{x}, t) &= \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x}, t) \text{ in } D \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ on } S_1, \quad t_i = \bar{t}_i \text{ on } S_2, \quad S_2 = S \setminus S_1 \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 ρ は密度、 λ, μ はラメ定数を表し、 $(\cdot)$ は時間に関する微分を表す。また、 $\bar{u}_i$ 及び $\bar{t}_i$ は与えられた境界条件である。この問題の解は、次の時間領域境界積分方程式を解くこ

とにより求まる.

$$C_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad (9)$$

ただし, 式 (9) において, C_{ij} は境界表面 S に依存する自由項 [1] である. また $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$, $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ はそれぞれ 2 次元弾性波動問題における時間領域基本解および対応する二重層核である. 通常の時間領域境界要素法では, 時間領域境界積分方程式 (9) に対して, 境界上に適切な近似関数を導入し, 時間・空間に関して離散化することで, 境界未知量に関する代数方程式を得ることにより数値解を求めることができる. しかしながら, 先に述べたように, 通常の時間領域境界要素法では, 時間増分が小さい場合の解の安定性に関する問題が生じる. そこで, 以下では, 式 (9) に演算子積分法を適用する方法について解説する.

§2.2 時間・空間方向の離散化

式 (9) の時間領域境界積分方程式を, M 個の区分一定要素で離散化し, 数値的に解くことを考える. 滑らかな境界 S に対して $\mathbf{x} \in D \rightarrow \mathbf{x} \in S$ を考慮すれば, 時間増分 Δt に対して, 次の第 n ステップにおける離散化された時間領域境界積分方程式を得ることができる.

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) = u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^n [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})t_j^{\alpha}(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x})u_j^{\alpha}(k\Delta t)] \quad (10)$$

ただし, 式 (10) において, A_{ij}^m, B_{ij}^m は影響関数である. 影響関数 A_{ij}^m, B_{ij}^m は式 (2) の離散化近似とその重み表現式 (4) を用いた演算子積分法により, それぞれ次のように得ることができる.

$$A_{ij}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (11)$$

$$B_{ij}^m(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{R}^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^{\alpha}, s_l) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_y \quad (12)$$

ただし, s_l は $s_l = \gamma(z_l)/(\Delta t)$ で定義される. 式 (11), (12) は離散フーリエ変換の形で表されていることから, それらの和には高速フーリエ変換を利用することにより計算を高速化することができる. また, 影響関数の積分核は演算子積分法を用いたことで Laplace 変換域での基本解となっていることに注意する. Laplace 変換域における基本解 $\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$

及び二重層核 $\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$ は次のように求めることができる。

$$\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[K_0(s_T r) \delta_{ij} - \frac{1}{s_T^2} \{K_0(s_T r) - K_0(s_L r)\}_{,ij} \right] \quad (13)$$

$$\hat{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = T_{jk}^{nv} \hat{U}_{ki}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, s) \quad (14)$$

ただし $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり, K_n は n 次の第二種修正ベッセル関数, 作用素 $T_{jk}^{nv}[1]$ は点 $\mathbf{y}$ に作用するものとする。また, 式 (13) 中の s_L, s_T はそれぞれ表記を簡単にするために, 縦波, 横波の波速 c_L, c_T で除した値 $s_L = \gamma(z)/(c_L \Delta t)$, $s_T = \gamma(z)/(c_T \Delta t)$ とした。 μ はせん断弾性定数, δ_{ij} はクロネッカーデルタである。これより, 式 (10) を書き直せば,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} u_i(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M [B_{ij}^0(\mathbf{x}) u_j^\alpha(n\Delta t) - A_{ij}^0(\mathbf{x}) t_j^\alpha(n\Delta t)] \\ &= u_i^{\text{in}}(\mathbf{x}, n\Delta t) + \sum_{\alpha=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} [A_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}) t_j^\alpha(k\Delta t) - B_{ij}^{n-k}(\mathbf{x}) u_j^\alpha(k\Delta t)] \end{aligned} \quad (15)$$

となる。よって, 第 n ステップ以前の境界値 u_i^α, t_i^α が全て求まっていれば, 式 (15) の右辺は既知となり, 第 n ステップにおける境界値を決定することができる。つまり, $n = 1$ から始めて, 順番に境界未知量を決定することができる。一方, 解くべき問題の規模が大きい場合, すなわち M が大きい場合には, 式 (15) を逐次的に解いていく上での計算時間・記憶容量を抑える工夫が必要である。その場合は高速多重極法等の方法を用いて対応するが, ここではその詳細は省略する。

§3. 数値解析例

以下, 数値解析例を示す。数値解析例は, 前節における弾性波動問題に限らず, 様々な問題に対して行った結果をまとめておく。詳細は, それぞれの箇所で示す文献等を参照されたい。なお, 以下の全ての解析結果は区分一定要素を用いて積分方程式を離散化していることに注意されたい。

§3.1 2次元スカラー波動の多重散乱解析

まず, 2次元スカラー波動の多重散乱解析結果を示す。解析モデルは図1に示すように, 半径 a の500個の空洞群による入射スカラー波の散乱問題である。それぞれの空洞は72個の境界要素に分割した。よって, 全要素数は36000である。また時間方向に対しては総時間ステップ数を128とし, 時間増分はスカラー波の波速 c を用いて $c\Delta t/a = 1.0$ と

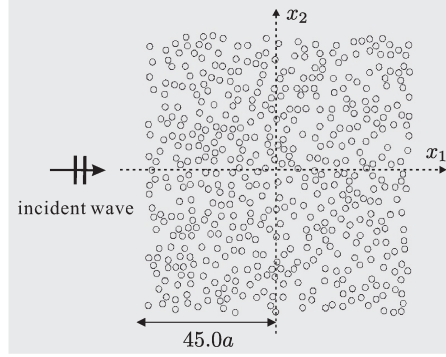


図 1 空洞群による 2 次元スカラー波動の多重散乱解析モデル.

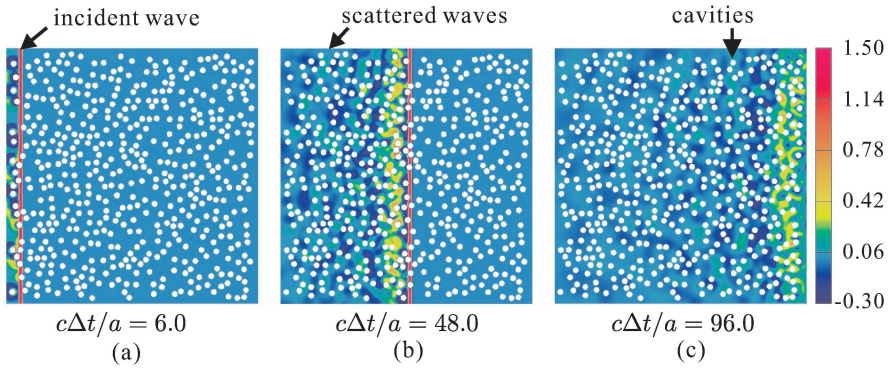


図 2 空洞群による 2 次元スカラー波動の多重散乱解析結果.

した. この時, 全未知数は $36000 \times 128 = 4608000$ である. 図 2(a)-(c) はそれぞれ時刻 $c\Delta t/a = 6.0, 48.0, 96.0$ における空洞群周辺のスカラー波動場を示している. 入射波は平面波を与えている. 時刻 $c\Delta t/a = 6.0$ において入射波は図 1 における左側の空洞により散乱される. 入射波の波面は時間と共に x_1 方向に進行しながら, 空洞群により散乱され, 散乱波が周辺の空洞群によりさらに散乱されながら伝搬している様子を確認することができる. なお, 本解析は, 未知数の数が多いため積分核に依存しない高速多重極法 [9] を適用し, 計算時間や記憶容量の削減を図りつつ, 計算を行っている.

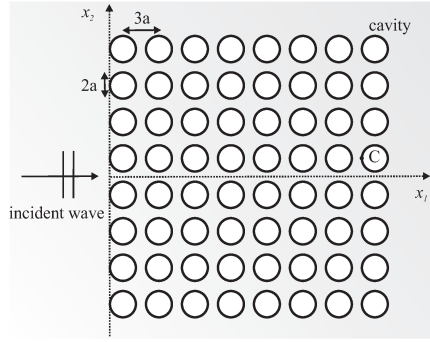


図 3 空洞群による 2 次元弾性波動および粘弾性波動の多重散乱解析モデル。

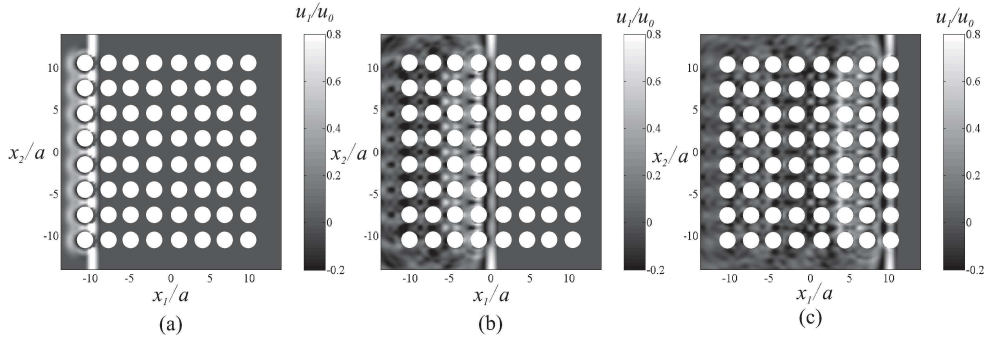


図 4 空洞群による 2 次元弾性波動の多重散乱解析結果。

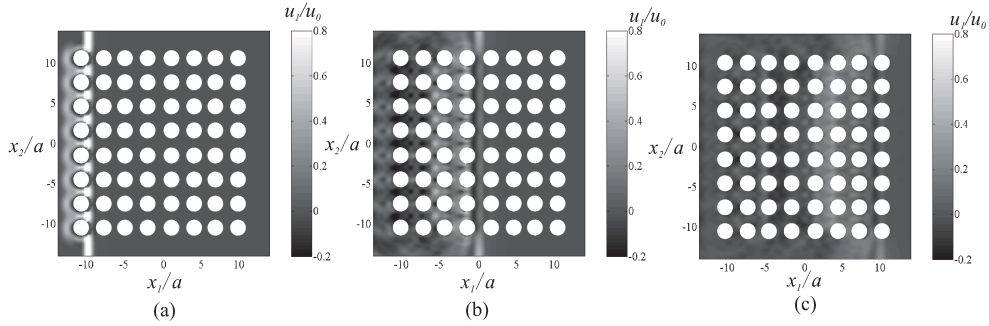


図 5 空洞群による 2 次元粘弾性波動の多重散乱解析結果。

§3.2 2次元弾性および粘弾性波動の多重散乱解析

構造材料内部の欠陥を検出するための方法として、超音波非破壊評価法が知られている。超音波非破壊評価法とは、構造材料内部に超音波を入射させ、入射超音波と欠陥の相互作用で発生する散乱超音波を受信することで、欠陥の有無のみならず、形状や位置等を推定する方法である。このとき、超音波は固体材料中では弾性波の性質を示すため、解くべき問題は入射弾性波動の欠陥による散乱問題となる。ここでは、その弾性波動散乱問題を解析した例 [6, 10] と、比較のために粘弾性波動問題を解析した例 [11] を示す。この場合の解析モデルは図 3 に示すような弾性体（または粘弾性体）中の 8×8 の空洞群による入射波の散乱問題であり、空洞の半径は a とし、 x_1, x_2 方向の空洞の配置間隔は $3a$ であるとした。また、弾性波動問題に対して、入射波は x_1 方向の正の向きに伝搬する平面波とし、次式で与えた。

$$u_i^{\text{in}}(x, t) = u_0 \delta_{i1} [1 - \cos^* [\pi(c_L t - x_1 - 11.5a)/a]] / 2, \\ \text{ただし} \quad \begin{cases} \cos^* [\alpha] = \cos [\alpha], & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ \cos^* [\alpha] = 1, & \text{for otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

ここで u_0 は入射波の振幅を表す。なお、粘弾性波動問題の場合、式 (16) を粘弾性体用に修正 [12] したものをを用いることに注意する。解析結果を図 4 に示す。図 4(a)-(c) はそれぞれ空洞による入射弾性波動の散乱問題を解析し、その水平変位 u_1/u_0 をプロットした結果であり、それぞれ $t/T_0 = 1.25, 6.25, 11.25$ における結果を示している。ただし T_0 は入射波が 1 つの空洞を通過するのに要する時間である。比較のため、粘弾性波動問題における同様の結果も図 5(a)-(c) に示してある。図 4(a)-(c) より、通常の弾性波動を扱う場合、入射波の大きさ u_1/u_0 は減衰を伴うことなく伝搬し、弾性体中の空洞によって散乱されている様子を確認することができる。一方、図 5(a)-(c) の粘弾性波動問題に対する結果に注目すると、入射波は時間と共に減衰していることがわかる。また、空洞群と入射波の相互作用により発生した散乱波にも粘弾性効果が生じていることを確認することができる。

先に述べたように、従来の時間領域境界要素法では、時間領域基本解を陽な形で求めることができないことが原因で、時間領域の粘弾性波動問題を直接に解析することはできなかった。しかしながら、演算子積分法を適用することで、そのような問題も解析することが可能となったことは注目に値する。

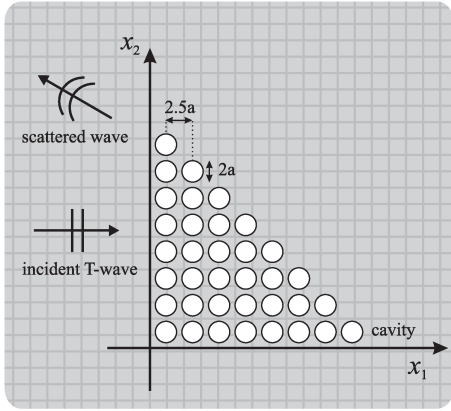


図 6 2次元飽和多孔質弾性体中の空洞群による入射波の散乱解析モデル.

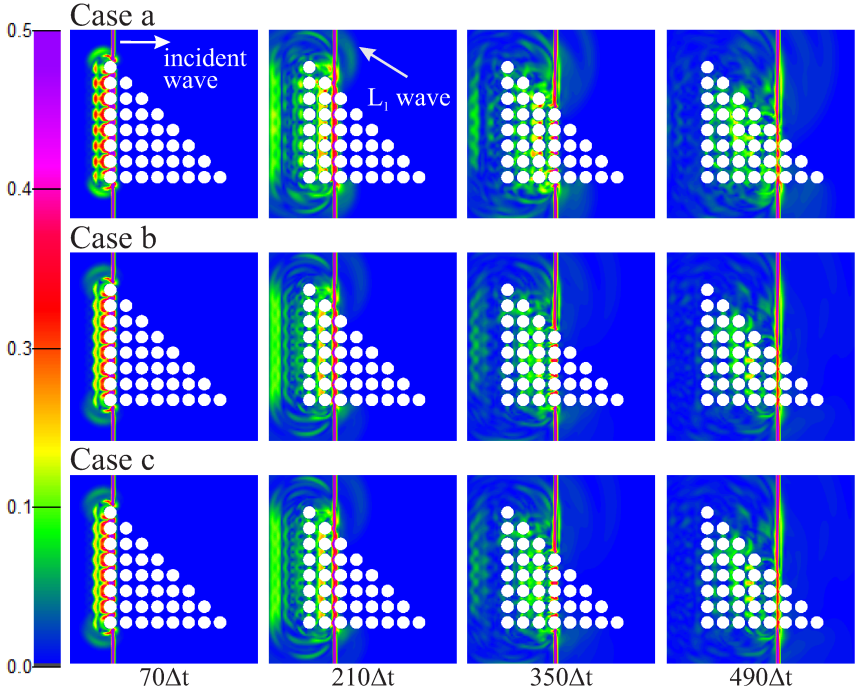


図 7 2次元飽和多孔質弾性体中の空洞群による入射波による固体変位 $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ の散乱波動場.

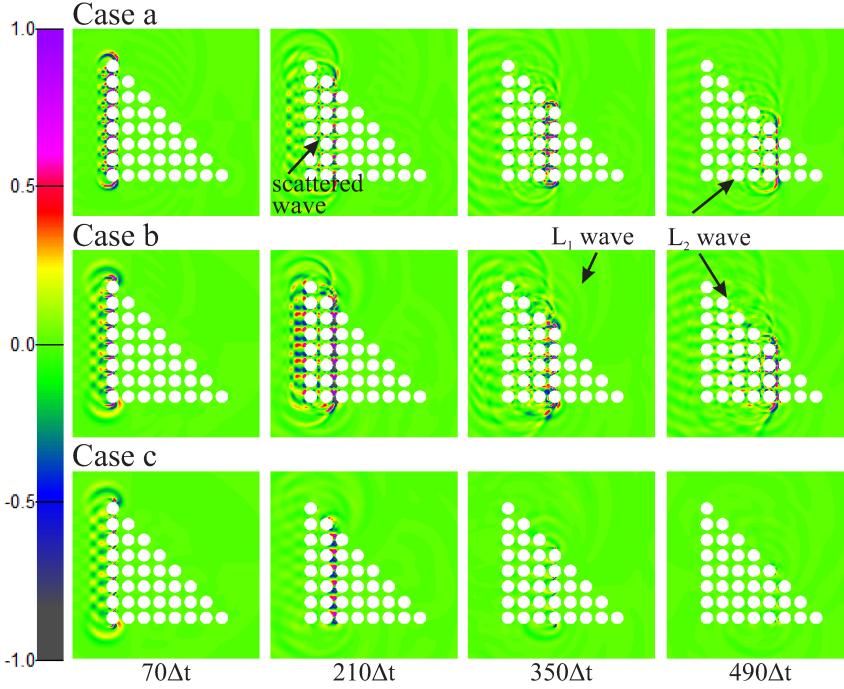


図 8 2次元飽和多孔質弾性体中の空洞群による入射波による流体圧力 p の散乱波動場。

§3.3 飽和多孔質弾性波動問題への応用

先に示したように、粘弾性波動問題では閉じた形の時間領域基本解を得ることができない。そのため演算子積分時間領域境界要素法は有効な手段となったが、同様に威力を発揮する問題として、例えば飽和多孔質弾性波動問題が挙げられる。飽和多孔質弾性波動問題とは、古くは Biot[13] により提案された力学モデルであり、固体中の間隙を流体が飽和した状態での弾性波動伝搬・散乱問題について論じるものである。ここでは、飽和多孔質弾性波動問題に対して演算子積分時間領域境界要素法を適用した数値解析例 [14, 15] を示す。

図 6 に示すような、飽和多孔質弾性体中の 36 個のマクロ空洞群による波動散乱解析を考える。空洞の半径は a とし、空洞間の間隔は $2.5a$ であり、1 つの空洞は 72 個の境界要素で離散化した。また総時間ステップ数を 512 とした。そのため、本解析における全境界要素数は 72×36 (空洞 1 つ当りの要素数 $\times$ 空洞の数) $= 2,342$ 、トータル未知数は $2,342 \times 512 \times 3$ (全境界要素数 $\times$ 総時間ステップ数 $\times$ 1 要素当りの未知数) $= 3,735,552$ で

ある。なお、飽和多孔質弾性波動問題では、本解析のような2次元解析の場合、固体中の弾性波の変位 u_1 , u_2 と流体圧力 p の合計3つの境界未知量を考える必要がある。

図7,8は、それぞれ2次元飽和多孔質弾性体中のマクロ空洞群周辺における入射波による固体変位 $\sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ と流体圧力 p を示している。ただし、それぞれの図における Case a,b,c は

- a. 連成が弱く散逸がない場合 ($\alpha = 0.21$, $b = 0$)
- b. 連成が強く散逸がない場合 ($\alpha = 1$, $b = 0$)
- c. 連成が強く散逸がある場合 ($\alpha = 1$, $b = 10$)

の場合の結果を示していることに注意されたい。ここで α は Biot の有効応力定数で固体と流体の連成の強さを表している。また b は散逸の影響を示すパラメータである。なお、入射波として平面横波 (T-wave) を与えた。飽和多孔質弾性波動問題では T 波は速い縦波の L_1 波、遅い縦波の L_2 波とは連成することなく独立に伝搬できる。そのため、図7では入射平面 T 波の存在をはっきりと確認することができるが、流体圧力を表している図8では、入射 T 波に対応する波動や入射 T 波に付随する L_1 , L_2 波を確認できない。また、入射平面 T 波自体には、連成の影響が含まれないため、その伝搬速度は図7の Case.a,b,c で大きな違いは生じない。しかしながら、入射 T 波は各空洞群により散乱されることにより、モード変換が生じる。よって図8において、流体圧力成分 p の影響は、入射 T 波が空洞によって散乱された後に確認することができる。また、図8における Case.b の連成が強く散逸がない場合では、圧力波が顕著に発生し、空洞群により散乱されながら伝搬する様子を確認できる。一方、図8における Case.a では連成が弱いものの、散逸の影響はないため、空洞群同士で散乱された波動が空洞群の間で増幅されやや大きい値を示している。Case.c の散逸が大きい場合は、空洞群で多重散乱されるものの、散逸の影響が上回り、逆に流体圧力波の振幅は小さいものとなっている。一方、図7の固体変位については図8と同様に、Case.a,b,c 毎にさほど大きな違いは見られず、連成効果の影響は流体圧力に大きく表れている。このように飽和多孔質弾性波動問題も演算子積分時間領域境界要素法により解析できるようになってきた。

§3.4 異方性弾性波動解析と逆散乱解析への応用

近年、CFRP(Carbon Fiber Reinforced Plastic) やオステナイト系鋼材等の異方性材料に対して如何に精度良く超音波非破壊評価法を実施できるかが重要課題となっている。一般的に、これらは、優れた力学特性を示すことが知られているが音響異方性を示すため、超

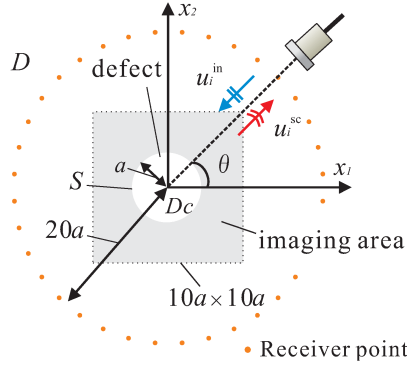


図 9 異方性弾性波動問題における順解析・逆散乱解析モデル.

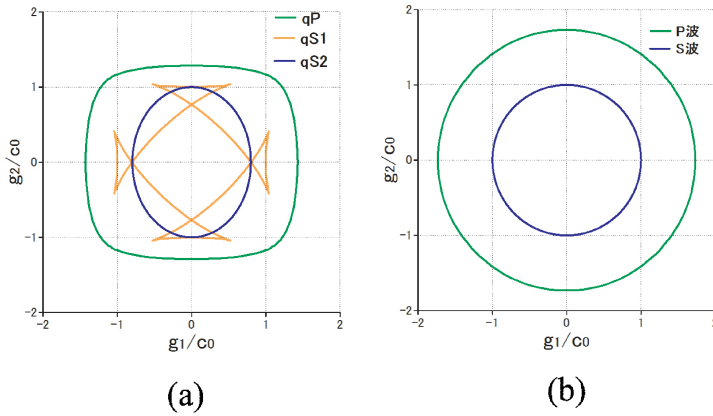


図 10 群速度曲線.

音波は等方には伝搬しない. よって, 鋼等の等方性材料に対する超音波非破壊評価法を直接このような異方性材料に適用した場合, 超音波の振舞が全く異なるため, 検査精度の低下を招くことが知られている. そこで, 最後に, 演算子積分法をオステナイト系鋼材の弾性波動散乱解析へ適用した例と, その結果を用いた欠陥形状再構成結果を示す.

解析モデルは図 9 に示す通りであり, 原点から角度 $(5 + 10i)^\circ (i = 0, \dots, 35)$ の合計 36 方向から平面波を入射させる. その時発生する原点中心, 半径 a の散乱波を空洞周辺で計測し (ここでは数値計算で散乱波を求める), その計測散乱波を用いて欠陥形状を再構成することを試みる. なお, 超音波の受信位置は送信方向と同一とし, 原点から $20a$ 離れた 36

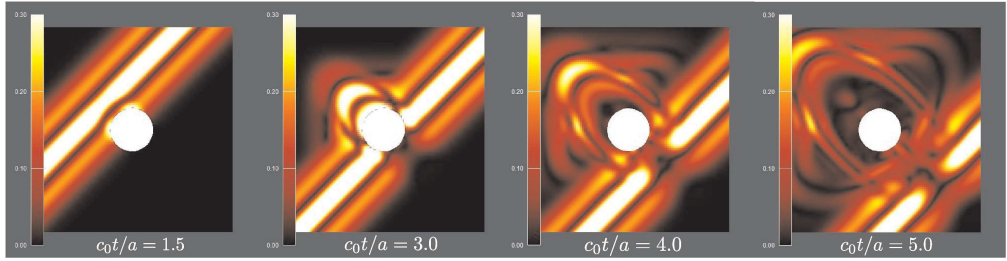


図 11 オステナイト系鋼材中の空洞による入射波の散乱解析結果.

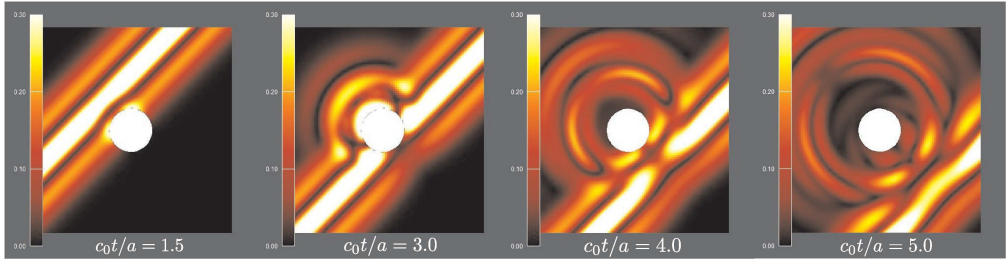


図 12 等方性鋼材中の空洞による入射波の散乱解析結果.

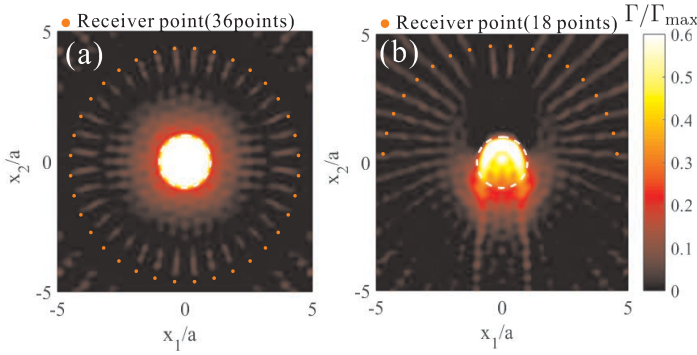


図 13 オステナイト系鋼材中の空洞の再構成結果.

点とし、パルスエコー法を想定している。ただし、解析対象とする弾性体は、オステナイト系鋼材であり、比較のため等方性鋼材の場合についても解析を実施する。

参考までに、オステナイト系鋼材および等方性鋼材に対する群速度曲線の例をそれぞれ図 10(a),(b) に示す。ただし、図 10(a),(b) の群速度曲線は、それぞれ鉛直方向の qS2 波、

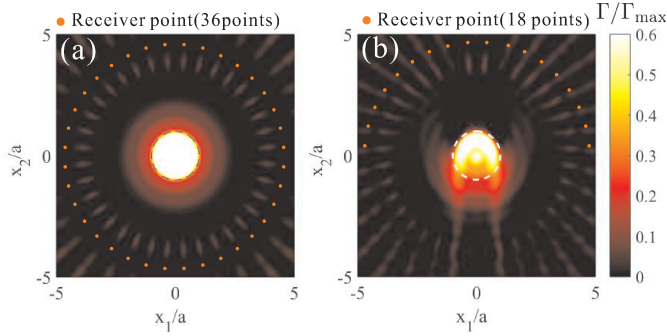


図 14 等方性鋼材中の空洞の再構成結果.

S 波で無次元化されていることに注意されたい. 図 10(b) の等方性鋼材の場合, P 波と S 波が存在し, それらは同心円状に伝搬する. しかしながら, 図 10(a) のオステナイト系鋼材の場合は等方性の P 波に対応する擬似 P 波 (qP 波), S 波に対応する 2 つの擬似 S 波 (qS1, qS2 波) が存在することがわかる. 特に qP 波の波面は四角形状に近く, qS2 波は楕円状に伝搬する. また qS1 波は x_1, x_2 方向で波面がクロスする現象が見られることが興味深い.

以上の群速度曲線の考察を踏まえ, 演算子積分時間領域境界要素法を用いた順解析の一例を図 11, 12 に示す. 図 11, 12 はそれぞれ入射平面 qP 波の伝搬方向が 315° である場合のオステナイト系鋼材および等方性鋼材中の空洞周辺周りの面内変位場 $|\mathbf{u}|$ を示している. 図 11 より, オステナイト系鋼材の場合, 散乱 qP 波は図 10(a) の群速度曲線に従い, 四角形状に伝搬していることが見て取れる. 入射波が空洞に当たった全面に大きな散乱波を確認することができる. 一方, 等方性鋼材の場合は図 12 の群速度曲線に従い, 散乱波は同心円状に伝搬している様子を確認することができる.

最後に, 順解析の結果を利用した逆散乱解析結果を示す. 2 次元異方性弾性波動問題における Born 近似を適用した場合の欠陥形状は, 文献 [16] の定式化を面内問題に拡張することで得られる次式左辺の特性関数 Γ をプロットすることで求まる.

$$\begin{aligned}
 \Gamma(\mathbf{y}) = & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{iC_{66}}{d_j F(\omega)} \sqrt{\frac{|\mathbf{x}| |f''(\varphi^s)|}{2\pi^3 k_0}} \\
 & \times \left(\frac{f(\varphi^s)}{c_0} + \frac{1}{c^{\text{in}}(\psi)} \right) \frac{\tilde{u}_i^{\text{sc}}(\mathbf{x}, \omega)}{\hat{Q}_{ij}(\varphi^s) \text{sgn}(\cos(\varphi^s - \psi)) S^3(\varphi^s)} \\
 & \times \exp \left[-ik_0 |\mathbf{x}| f(\varphi^s) + i(k_0 f(\varphi^s) + k) \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} - i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(f''(\varphi^s)) \right] d\omega d\psi \quad (17)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$F(\omega) = -u_0 \frac{\sqrt{2\pi}\omega^2 \exp(i\omega t_s)}{2 \exp(\omega^2/\omega_p^2)\omega_p^3}, \quad S(\varphi) = \frac{c_0}{c(\varphi)},$$

$$f(\varphi) = S(\varphi)|\cos(\varphi - \psi)|, \quad \hat{Q}_{ij}(\varphi) = C_{ikpl}\hat{x}_k n_l P_{pj}(\varphi) \quad (18)$$

である. ここで $()'$ は微分を表し, φ^s は $f'(\varphi) = 0$ を満たす解である. また, $C_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, \dots, 6)$ は弾性定数 C_{ikpl} のフオークト表記, c_0 は密度 ρ を用いて計算される $c_0 = \sqrt{C_{66}/\rho}$ なる弾性波速度, k_0 は周波数 ω を用いて計算できる対応する波数であり $k_0 = \omega/c_0$ で表される. ψ , $c^{\text{in}}(\psi)$, d_j はそれぞれ入射角, 入射波の波速, 振動方向ベクトルの j 方向成分であり, 波数 k は $k = \omega/c^{\text{in}}(\psi)$ である. sgn は符号関数, n_l は単位円周ベクトル $\mathbf{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ の l 方向成分, $\hat{x}_k$ は単位位置ベクトル $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}| = (\cos \psi, \sin \psi)$ の k 方向成分である. また, $c(\varphi)$ は qP 波の波速を表し, P_{pj} は, 散乱 qP 波の振動方向ベクトルの i 方向成分を E_i とし, $P_{pj} = E_p E_j$ で与えられる. u_0 は入射波振幅, ω_p , t_s はそれぞれ中心角周波数, ピーク時刻である. 式 (17) を精度良く計算することで欠陥形状および位置を再構成することができる.

再構成結果を図 13, 14 に示す. 図 13, 図 14 はそれぞれオステナイト系鋼材および等方性鋼材中の空洞欠陥を再構成した結果である. ただし, それぞれの図において (a) は合計 36 点の全周方向 ($0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$), (b) は合計 18 点の半周方向 ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) での散乱波形を用いて式 (17) の逆散乱解析を行った結果を示している.

図 13(a) のオステナイト系鋼材, 図 14(a) の等方性鋼材を対象としたいずれの場合においても, 全周方向で得られた散乱波形を用いて逆散乱解析を行った場合は, 空洞の形状をはっきりと再構成できていることがわかる. 一方, 入射超音波の送信方向を半周方向に限定した場合は, 図 13(b), 図 14(b) より, いずれの場合に対しても散乱波が直接当る空洞面のみを再構成できていることがわかる. これらより, 異方性の影響を考慮した逆散乱解析が正しく実行できていることがわかる.

§4. おわりに

演算子積分時間領域境界要素法について簡単に説明した. 超音波非破壊評価法の数値シミュレーションに資する波動解析へ, 演算子積分時間領域境界要素法を適用した例を示し, 演算子積分時間領域境界要素法の有効性を示した. 今後は, 大規模波動問題への対応等を積極的に検討していく予定である.

謝辞

本研究成果の一部は、京都大学学術情報メディアセンターにおけるスーパーコンピュータ共同研究制度（若手・女性研究者奨励枠）を利用して行われました。

参考文献

- [1] 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, (2000), 京都大学学術出版会.
- [2] Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I, *Numer. Math.*, **52** (1988), pp.129-145.
- [3] Rokhlin, V. : Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60** (1985), pp.187-207.
- [4] Greengard, L. and Rokhlin, V. : A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.*, **73** (1987), pp.325-348.
- [5] Bebendorf, M. : Hierarchical Matrices: A Means to efficiently solve elliptic boundary value problems, (2008), Springer-Verlag.
- [6] 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一: 演算子積分法および高速多重極法を用いた新しい二次元時間領域動弾性境界要素法について, 応用力学論文集, 土木学会, vol.11, (2008), pp.193-200.
- [7] 伊海田明宏・斎藤隆泰・廣瀬壮一: ACA による演算子積分時間領域境界要素法の効率化, 計算数理工学論文集, vol.13, (2013), pp.127-132.
- [8] 数値積分法の基礎と応用, 日本機械学会編, (2003), コロナ社.
- [9] 斎藤隆泰・増村佳大・廣瀬壮一: 2次元波動伝搬問題に対する積分核に依存しない演算子積分時間領域高速多重極境界要素法, 計算数理工学論文集, vol.13, (2013), pp.121-126.
- [10] 斎藤隆泰・廣瀬壮一・福井卓雄・石田貴之: 三次元スカラー波動および弾性波動問題における演算子積分時間領域境界要素法, 応用力学論文集, 土木学会, vol.10, (2007), pp.217-224.
- [11] 斎藤隆泰・石田貴之・福井卓雄・廣瀬壮一: 粘弾性面外波動問題における演算子積分時間領域境界要素法および高速多重極法の適用, 計算工学論文集, 原稿番号 No.20080011, (2008).
- [12] Saitoh, T., Hirose, S. and Fukui, T. : Convolution quadrature boundary ele-

- ment method and acceleration by fast multipole method in 2-D viscoelastic wave propagation, *Theor. Appl. Mech. Japan*, **57** (2009), pp.385-393.
- [13] Biot, M.A. : Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range, *J. Acoust. Soc. Am*, Vol.28, (1956), pp.168-178.
- [14] 斎藤隆泰・近澤文香・廣瀬壮一：演算子積分時間領域境界要素法を用いた飽和多孔質弾性体における大規模波動散乱解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), vol.68, (2012), pp.187-197.
- [15] Saitoh, T., Chikazawa, F. and Hirose, S. : Convolution quadrature time-domain boundary element method for 2-D fluid-saturated porous media, *Appl. math. model.*, **38** (2014), pp.3724-3740.
- [16] 斎藤隆泰・稲垣祐生・下田瑞斗：異方性弾性体中の欠陥に対する 2 次元逆散乱解析, 非破壊検査, vol.66, No.2, (2017), pp.84-89.