

辞書式順序で最初の極大部分グラフを計算する問題の  
P 完全性と NC アルゴリズム

九州大学理学部基礎情報学研究施設

宮野 悟 (Satoru Miyano)

1. 序。  $P \neq NC$  と予想されているが、このことを信じるならば、ある問題が P 完全であることの証明は、その問題が効率よくは並列化できないことの（数学的意味ではないが）証明を与えるものである。自然な P 完全な問題は、[C1] で初めて報告され、その後いくつかの P 完全な問題が見つかった [AnM1, AnM2, AvM1, AvM2, C2, DLR, DKM, Go, GSS, JL, Ka, La, LW, Lu, Mi1, Mi3, Pl, Re, UG, YD, Yas]。しかしその数はあまり多くはない。その理由はおそらく P 完全性の意義についてあまり理解されていなかったからであろう。並列計算量が意識されていなかった初期のころでは、P 完全な問題は、多項式時間で解くことができるが、 $O((\log n)^k)$  程度の領域では解くことができないという意義があった（ $k$  は定数）。もちろん、 $P \neq DSPACE((\log n)^k)$  を仮定してである。このことは、それ自身大切なことであるが、並列計算量が重要さを増してきている現在、P 完全性は以前とは別の意味で再び注目されている。

辞書式順序で最初の独立集合を計算する問題 (LFMIS) は Cook[C2] により P 完全であることが示され、またそれに類似の問題も議論され [AnM1, AnM2, Lu, Mi1, Mi2, Mi3, Re]、いくつかの問題の P 完全性が証明されている。この論文では、NP 完全性についての [LY, Yann] の結果のようなさらに一般的な P 完全性定理を証明する。

グラフの性質  $\pi$  は、グラフ  $G$  が  $\pi$  を満たす限り、 $G$  のどの部分グラフも  $\pi$  を満たすとき、遺伝的であるという。性質  $\pi$  を満たす辞書式順序で最初の極大部分グラフを求める問題 (the lexicographically first maximal subgraph problem for  $\pi$ , 略して LFMSP( $\pi$ )) とは、次の様な問題である。

Instance: グラフ  $G=(V, E)$ 。ただし  $V=\{1, \dots, n\}$ 。

Problem: 性質  $\pi$  を満たす  $G$  の部分グラフを induce する辞書式順序で最初の  $V$  の極大部分集合  $U$  を計算すること。

性質  $\pi$  が遺伝的で、多項式時間でその性質をもつかどうかをテストできれば、簡単な逐次アルゴリズムで LFMSP( $\pi$ ) を多項式時間で計算できる。この論文では、多項式時間でテスト可能で自明でない遺伝的などんな性質  $\pi$  に対しても、LFMSP( $\pi$ ) が P 完全となることを証明する (定理 5, 6, 7)。

多くの自然な遺伝的性質に対して、LFMSP( $\pi$ ) はグラフの次数を 3 に制限しても P 完全で

ある(表3)。例えば、「サイクルをもたない」、「2部グラフ」、「平面グラフ」などがそうである。しかし例外がある。 $\pi_4$ を「4サイクルをもたない」という性質とすると、 $\text{LFMSP}(\pi_4)$ は次数4のグラフに対しては、P完全であるが、次数3のグラフに対しては、 $\text{LFMSP}(\pi_4)$ は $\text{NC}^2$ にはいることを証明できる(表1)。また、辺の集合に線形順序が入っているとき、頂点のかわりに、辺の集合からinduceされる極大部分グラフを計算することが問題となる。この場合、例えば、辞書式順序で最初の辺の集合からinduceされる極大2部グラフを計算すること(Edge-Induced LFMSP(bipartite))は、 $\text{NC}^2$ でできる(表2)。頂点の集合の場合、この問題はP完全である。また、 $\pi_3$ を「3サイクルをもたない」という性質とすると、Edge-Induced LFMSP( $\pi_3$ )は次数が4のグラフに対して $\text{NC}^2$ アルゴリズムを持つが(表2)、次数が6以上のグラフに対してはP完全となる(表4)。詳細については[Mi1]を見られたい。

## 2. 遺伝的性質とP完全性

定義1. 回路とは、列 $B=(B_1, \dots, B_n)$ とする。ただし、各 $B_i$ は次の(i)-(iv)のうちのどれかである。

- (i)  $B_i = t$  または  $B_i = f$ 。 (ii)  $B_i = \neg B_j$  ( $j < i$ )。
- (iii)  $B_i = B_j \vee B_k$  ( $j, k < i$ )。 (iv)  $B_i = B_j \wedge B_k$  ( $j, k < i$ )。

論理回路値問題 (CVP)とは、各 $i=1, \dots, n$ に対して、値 $\text{value}(B_i)$ を計算する問題である。集合 $S \subseteq \{t, f, \neg, \vee, \wedge\}$ に対して、 $S$ に属する演算のみを許されたCVPを $\text{CVP}[S]$ と記述する。

補題1 [La].  $\text{CVP}[t, f, \vee, \wedge]$ はP完全である。

補題2 [Go].  $\text{CVP}[t, \neg, \wedge]$ は出次数が2の平面回路に制限してもP完全である。

補題3. (1) LFMISは次数が高々3の2部グラフに制限しても、P完全である。

(2) LFMISは次数が高々3の平面グラフに制限しても、P完全である。

補題4. 辞書式順序で最初の次数が高々1の極大部分グラフを計算する問題

(LFMSP(max degree 1))は、次数が高々3の平面2部グラフに制限

しても、P完全である。

[LY], [Y]で使われている用語を準備する。 $H$ を連結グラフとする。頂点 $c$ は、 $H$ から $c$ を取り除くとグラフを二つ以上の連結成分に分けると、関節点とよばれる。そして、その連結成分と $c$ とを結ぶ辺を加えて得られる連結部分グラフを、 $H$ の $c$ についての連結成分という。

連結グラフ $H$ の $\alpha$ 列を定義する。もし $H$ が2連結でないならば、 $c$ を $H$ の関節点とし $H_1, \dots, H_{i(c)}$ を、 $H$ の $c$ についての連結成分とし、 $\alpha_{c,H}=(|H_1|, \dots, |H_{i(c)}|)$ と定義する。ただし、 $|H_i|$ はグラフ $H_i$ の頂点の個数で $|H_1| \geq \dots \geq |H_{i(c)}|$ とする。このとき、グラフ $H$ の $\alpha$ 列( $\alpha_H$ と記述される)は、 $\alpha_H = \min\{\alpha_{c,H} \mid c \text{ は } H \text{ の関節点}\}$ と定義される。ここで、 $\min$ は正整数のソートされたリスト上での辞書式順序についての minimumである。 $H$ が2連結のときは、 $\alpha_H=(|H|)$ とする。頂点 $c_H$ は、 $\alpha_H = \alpha_{c_H,H}$ となる任意の $H$ の頂点とする。必ずしも連結でないグラフ $G$ に対して、 $G_1, \dots, G_t$ をその連結成分とすると、列 $(\alpha_{G_1}, \dots, \alpha_{G_t})$ を $G$ の

$\beta$ 列 ( $\beta_H$ と記述される) とよぶ。ただし,  $\alpha_{G_1} \geq \dots \geq \alpha_{G_t}$  のようにソートされているとする。

完全2部グラフ  $K_{1..n}$  を  $n$  スター, そして,  $n$  スターと  $m$  スターの中心を辺で結んでできるグラフを  $(m, n)$  ダブルスター と呼ぶ。  $D$  をあるグラフの族とする。 独立辺集合 とは, 互いに端点を共有しない辺から構成されるグラフとする。グラフの性質  $\pi$  は,  $D$  に属する無限に多くのグラフが  $\pi$  を満たし, 少なくとも一つの  $D$  のグラフが  $\pi$  を満たさないとき, 自明でない という。

$V$  の二つの部分集合  $V_1, V_2$  は, どの  $u \in V_1, v \in V_2$  に対しても,  $u \langle v$  が成立するとき,  $V_1 \langle V_2$  と書かれる。

定理5.  $\pi$  は次の性質を満たすとする。

(i) 平面2部グラフの上で自明でない。(ii) 遺伝的である。

(iii) 任意の独立辺集合を満たす。

(iv) 多項式時間でテスト可能である。

このとき,  $\text{LFMSP}(\pi)$  は, 平面2部グラフに制限しても,  $P$  完全である。

証明.  $\pi$  は自明でないので,  $\beta_J = \min\{\beta_G \mid G \text{ は } \pi \text{ を満たさない平面2部グラフ}\}$  となる平面2部グラフ  $J$  がある。  $J_1, \dots, J_t$  を  $J$  の連結成分とする。ただし,  $\alpha_{J_1} \geq \dots \geq \alpha_{J_t}$  とする。即ち,  $J$  の  $\beta$  列は,  $(\alpha_{J_1}, \dots, \alpha_{J_t})$  となる。  $c = c_J$  とし,  $I_0$  を  $c$  についての  $J_1$  の連結成分で最大のものとする (図1(a)斜線部分)。(ii)と(iii)より, 任意の独立集合は  $\pi$  を満たす。よって  $I_0$  は少なくとも一つの辺を含んでいる。

1.  $I_0$  がただ一つの辺からなるグラフではないとき: 補題3(1)の結果から, 平面グラフに制限されたLFMISからのリダクションを行う。グラフ  $I_0$  は, 二つ以上の辺をもつ連結な平面2部グラフであるので,  $c$  とは異なる頂点  $d$  で,  $c$  と  $d$  との距離は偶数でかつこの二つの頂点は  $J$  の平面レイアウトにおいて同一面にあるものがある。  $I_1$  を  $J_1$  から  $c$  以外の  $I_0$  を取り除いてできるグラフとしよう。

平面グラフ  $G = (V, E)$  に対して,  $G' = (V', E')$  を次のように定義する (図1(b), (c))。各  $G$  の頂点  $u$  に  $I_1$  のコピーを,  $c$  と  $u$  を同一視して張り付ける。次に, 各辺  $\{u, v\} \in E$  を, 今度は  $I_0$  のコピーの頂点  $c, d$  と  $u, v$  をそれぞれ同一視して置き換える。  $G'$  はこのようにしてできたグラフに  $J_2, \dots, J_t$  を付け加えたものである。頂点  $d$  の選び方により,  $G'$  は平面2部グラフであることがわかる。さらに, グラフ  $J$  の定義により, 任意の  $G$  の独立集合  $U$  に対して, 集合  $(V' - V) \cup U$  から induce されるグラフの  $\beta$  列は  $\beta_J$  よりも小さい。また, 各辺  $\{u, v\} \in E$  に対して,  $(V' - V) \cup \{u, v\}$  から induce されるグラフは  $\pi$  を満たさない。このことから,  $V'$  上には  $V' - V \langle V$  を満たすように線形順序が定義されるものとする。  $V$  上の順序は  $G$  に与えられている順序とする。この順序のもとでは, まず  $V' - V$  のすべての頂点がとられ, その後,  $G$  の辞書式順序で最初の独立集合に対応する  $G'$  の頂点を選ばれる。このように,  $\pi$  を満たす部分グラフを induce する辞書式順序で最初の極大な頂点の集合  $U'$  は,  $U' = (V' - V) \cup U_0$  となる。ただし,  $U_0$  は  $G$  の辞書式順序で最初の独立集合である。

2.  $I_0$  がただ一つの辺からなるグラフのとき: 平面2部グラフに制限されたLFMSP(max degree 1)からのリダクションを与える (補題4)。  $I_0$  は, 単に一つの辺

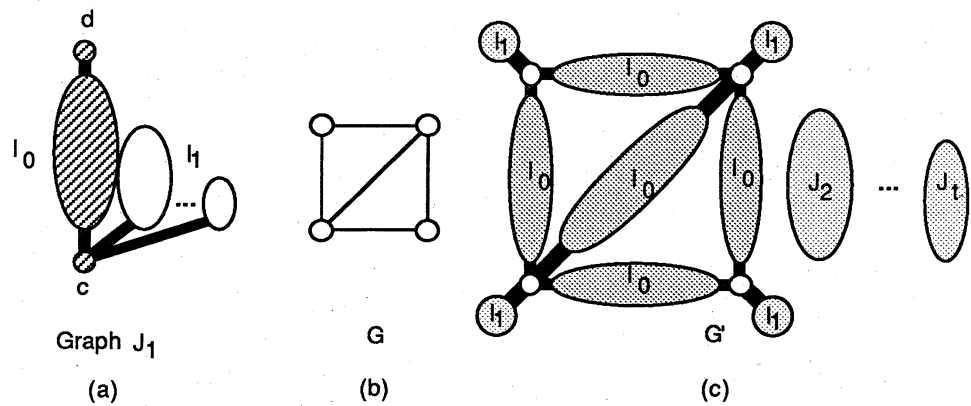


図 1.

であるので、 $J_1$ は、スターである。したがって、 $J_2, \dots, J_t$ もスターである。 $J_1$ が  $r$ 個の辺をもっているとしよう。任意の独立辺集合は  $\pi$  を満たすので、 $r \geq 2$ である。定義より、任意有限個の  $(r-1)$  スターと  $J_2, \dots, J_t$  からなるグラフの  $\beta$  列は  $\beta_J$  よりも小さい。よって、そのグラフは  $\pi$  を満たす。このことから、次の二つのことを満たす整数  $q, k, p$  が存在することがわかる。

- (1) 任意有限個の  $(r-2, q-1)$  ダブルスターと  $k-1$  個の  $(r-2, q)$  ダブルスターと  $J_2, \dots, J_t$  から構成されるグラフは  $\pi$  を満たす。
- (2)  $p$  個の  $(r-2, q-1)$  ダブルスターと  $k$  個の  $(r-2, q)$  ダブルスターと  $J_2, \dots, J_t$  から構成されるグラフは  $\pi$  を満たさない。

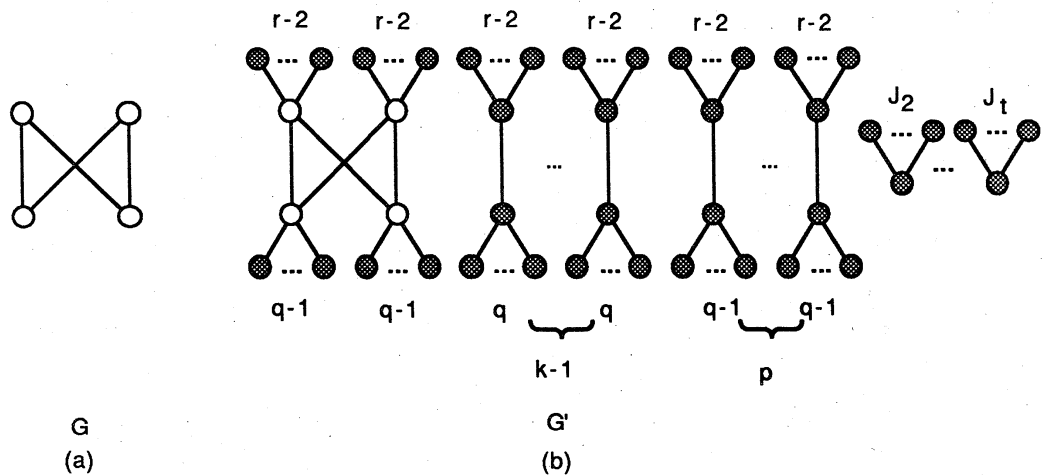


図 2.

平面 2 部グラフ  $G=(V, E)$  をとる。ここで、 $V$  は  $V=N \cup M$  のように分割されているとする。このとき、グラフ  $G'=(V', E')$  を次のように構成する (図 2)。  $N$  の各頂点  $u$  に対して、 $(r-2)$  スターのコピーを、 $u$  とその中心を同一視して張り付ける。同様に、 $M$  の各頂点  $u$  に対して、 $(q-1)$  スターのコピーを、 $u$  とその中心を同一視して張り付ける。次に、 $J_2, \dots, J_t$  と  $k-1$  個の  $(r-2, q)$  ダブルスターと  $p$  個の  $(r-2, q-1)$  ダブルスターを付け加える。明らかに、このグラフ

は平面2部グラフである。 $V'$ 上の順序は $V'-V \setminus V$ をみだし、 $V$ 上では $G$ での順序に従う。(1)と遺伝性により、 $V'-V$ の全ての頂点は選ばれる。次に、 $V$ の頂点について考える。 $V$ の頂点 $u$ の選択を決定するとしよう。もし $u$ が高々一つのすでに選択された $V$ の頂点に隣接しているならば、(1)により $u$ を取ることができる。しかし、 $u$ が二つ以上のすでに選択された $V$ の頂点に隣接しているときは、 $u$ を取ることはできないことを示そう。もし $u$ が $(q-1)$ スターの中心ならば、 $u$ を取ると、 $k$ 個の $(r-2, q)$ ダブルスターができることになる。(2)より、これは $\pi$ を満たさなくなる。 $u$ が $(r-2)$ スターの中心ならば、 $r$ スターを作り出すことになる。グラフ $J$ の選び方により、 $u$ を加えると $\pi$ を満たさなくなる。このように、 $U$ を次数が1のグラフをinduceする辞書式順序で最初の極大部分集合とすると、 $\pi$ を満たす部分グラフをinduceするような辞書式順序で最初の頂点の部分集合 $U'$ は、 $U' = (V' - V) \cup U$ となる。

以上の議論により、 $\text{LFMSP}(\pi)$ がP完全となることがわかる。□

次の二つの定理の証明は略する。

定理6.  $\pi$ を多項式時間でテスト可能な(2部グラフ上で、平面グラフ上で)自明でない遺伝的性質とする。このとき、 $\text{LFMSP}(\pi)$ は、(2部グラフに制限しても、平面グラフに制限しても)P完全である。

定理7.  $\pi$ を多項式時間でテスト可能な有向グラフ上で自明でない遺伝的性質とする。このとき、 $\text{LFMSP}(\pi)$ は、P完全である。

### 3. $\text{NC}^2$ の問題

この節では、二つのトピックを扱う。まず、表1に書かれている辞書式順序で最初の長さ $k$ のサイクルをもたない極大部分グラフを計算する問題( $\text{LFMSP}(k\text{-cycle free})$ )が $\text{NC}^2$ にはいることを示す。次に、表2の、辞書式順序で最初の辺からinduceされる極大部分グラフを計算する問題( $\text{Edge-Induced LFMSP}(\pi)$ )も $\text{NC}^2$ にはいることを示す。

| 性質      | 次数 |
|---------|----|
| 3サイクル無し | 3  |
| 4サイクル無し | 3  |

$\text{LFMSP}(k\text{-cycle free}) \in \text{NC}^2$

| 性質      | グラフの制限 |
|---------|--------|
| サイクル無し  | 無し     |
| 2部グラフ   | 無し     |
| 3サイクル無し | 次数4    |
| 4サイクル無し | 次数3    |

表1.

$\text{Edge-Induced LFMSP}(\pi) \in \text{NC}^2$

表2.

補題8. 次数2のグラフに制限したLFMISは $\text{NC}^2$ にはいる。

定理9. 次数3のグラフに対して, 4サイクルをもたない辞書式順序で最初の極大部分グラフを  $NC^2$  で計算できる ( $LFMSP(4\text{-cycle free}) \in NC^2$ ) 。

証明.  $G=(V, E)$  を次数が高々3のグラフとする。Gの4サイクルの接続を解析するために, 次のように定義されるグラフ  $G^*=(V^*, E^*)$  を考える。

$$V^* = \{C : C \subseteq V, |C|=4, \text{ Cのinduceする部分グラフは4サイクルを含む}\},$$

$$E^* = \{(C, D) : C \cap D \neq \emptyset\}.$$

グラフの連結成分の計算は  $NC^2$  でできるので,  $G^*$  の各連結成分について, 辞書式順序で最初の4サイクルをもたない極大部分グラフを  $NC^2$  で計算できることを示せばよい。CをGの4サイクルとしよう。図2の(1a)-(6a) ((2e)を除く) に, Cの近傍が  $G^*$  における次数 (これを  $\deg^+(C)$  と記述する) によって分類されている。ただし, 黒く塗られている頂点はサイクルC上の頂点を表し, 不必要な辺は除かれている。グラフの次数が3であることを考慮すると, (3a), (4a)-(6a) の場合には, 辺および頂点を付加しても, 白い頂点を共有するが黒い頂点は含まないような4サイクルは存在しない。(3b) の場合では, ただ一つそのような可能性があるが, それは(4b)に表されている。このように,  $\deg^+(C) \geq 3$  となる4サイクルについては, グラフ  $G^*$  のCを含む連結成分から得られるGの部分グラフは, (3a) から(6a)までの6つのタイプのどれかとなることがわかる。 $\deg^+(C)=2$  の場合, (2a) から(2d) の4つのタイプがある。(2a) と(2d) の場合には, 白い頂点を含むがサイクルCには触れないような4サイクルは存在しない。(2b) の場合には, その可能性がただ一つあるが, それは(2d) の場合である。 $\deg^+(C)=1$  のときは, (1a) しかない。 $\deg^+(C)=0$  場合は自明である。

以上のことから, (1a) と(2c) の場合を除いて, その4サイクルを含む  $G^*$  における連結成分の大きさは, 限定サイズであることがわかる。従って, 対応するGの部分グラフについて, 辞書式順序で最初の4サイクルをもたない極大部分グラフを計算することは  $NC^2$  でできる。そこで, (1a) と(2c) の場合を考える。これらの場合,  $G^*$  の連結成分に対応するGの部分グラフは, いくらでも大きくなり得る。しかし, それは(2e)の形をしている。ただし,  $t \geq 4$  で(1a) の場合は除かれている。さらに, (2e) は,  $t \geq 5$  のとき, 辺  $\{a_1, a_t\}, \{b_1, b_t\}$  が付け加えられ,  $t \geq 4$  のとき, 辺  $\{a_1, b_t\}, \{b_1, a_t\}$  が付け加えられている場合も表しているとする。(2e) の形のグラフに対しては, 辞書式順序で最初の4サイクルをもたない極大部分グラフを  $NC^2$  で計算できることを示そう。まず, 頂点  $a_i$  と  $b_i$  ( $i=1, \dots, t$ ) を考えよう。頂点  $a_i$  を含む4サイクルは頂点  $b_i$  を含み, また逆も成立するので,  $t \geq 5$  のとき,  $a_i$  と  $b_i$  のうち, 順序の小さいほうはつねに選ぶことができる。そこで次のように定義される次数が高々2のグラフ  $G'=(V', E')$  を考える。

$$V' = \{c_i : c_i = \max\{a_i, b_i\}, i=1, \dots, t\},$$

$$E' = \{(c_i, c_{i+1}) : c_i \text{ と } c_{i+1} \text{ は同じ4サイクル上にある。ただし, } c_{t+1}=c_1\}.$$

$U'$  を  $G'$  の辞書式順序で最初の独立集合とする。 $W' = \{\min\{a_i, b_i\} : i=1, \dots, t\}$  とする。

このとき, 集合  $U' \cup W'$  が求める頂点の集合となることがわかる。補題8より,  $U'$  を  $NC^2$  で計算できる。このようにして,  $G^*$  の各連結成分に対して, 求めるべき辞書式順序で最初の頂点の集合を  $NC^2$  で計算できる。□

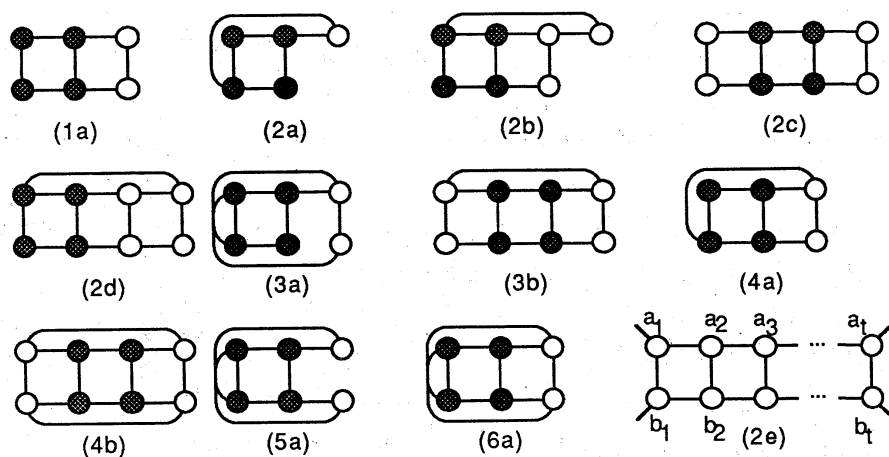


図 3.

同様の考えで、次の定理も証明できる。

定理 10. 次数 3 のグラフに対して、3 サイクルをもたない辞書式順序で最初の極大部分グラフを  $NC^2$  で計算できる ( $LFMSP(3\text{-cycle free}) \in NC^2$ )。

グラフ  $G=(V, E)$  の辺の集合  $E$  に  $E=\{e_1 \langle e_2 \langle \dots \langle e_m\}$  のように線形順序が与えられているとき、性質  $\pi$  をもつ部分グラフを induce する辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算すること (Edge-Induced  $LFMSP(\pi)$ ) を考える。[AH], [WAN] では、「edge-deletion 問題」について、一般的な NP 完全性定理が証明されているが、頂点の代わりに辺を扱った場合、P 完全性について、定理 5, 6, 7 のようなことがいえるかはわかっていない。しかし、いくつかの問題は効率よく並列計算できる。

補題 11 [C2]. Minimum Spanning Tree 問題は  $NC^2$  で計算できる。

系 12. サイクル無しの部分グラフ (森) を induce する辞書式順序で最初の極大な辺の集合を  $NC^2$  で計算できる ( $Edge\text{-}Induced\ LFMSP(\text{forest}) \in NC^2$ )。

定理 13. 2 部グラフを induce する辞書式順序で最初の極大な辺の集合を  $NC^2$  で計算できる ( $Edge\text{-}Induced\ LFMSP(\text{bipartite}) \in NC^2$ )。

証明. グラフ  $G=(V, E)$  が与えられたとき、まず森を induce する辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算する (系 12)。次に、この森の頂点に 0 または 1 を割り当て、bipartition を行う。頂点  $u$  に割り当てられたラベルを  $label(u)$  と記述する。最後に、森に入っていない各辺  $e=\{u, v\}$  に対して、もし  $label(u) \neq label(v)$  ならば、辺  $e$  を森に加える。このようにして得られる部分グラフがもつめる極大な 2 部グラフである。□

次の定理は、定理9と同様のアイディアで証明できるが、分類はさらに複雑である（証明は[Mi1]を参照）。

定理14.

- (1) 次数が4のグラフに対して、3サイクル無しの部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を $NC^2$ で計算できる。
- (2) 次数が3のグラフに対して、4サイクル無しの部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を $NC^2$ で計算できる。

#### 4. Optimal Degree Constraints

定理5の証明の中で構成されたグラフの次数は一般にはとても大きい。しかし、個々の性質について具体的にリダクションを与えることにより、表3に示されている性質の場合、グラフの次数を3もしくは4に制限してもP完全であることを示すことができる。そして、その次数は、(11)と(12)の場合を除いて最適である。

| No.  | 性質                               | 制限      | 次数 |
|------|----------------------------------|---------|----|
| (1)  | 独立集合                             | P または B | 3  |
| (2)  | 最大次数1                            | P B     | 3  |
| (3)  | 3サイクル無し                          |         | 4  |
| (4)  | 4サイクル無し                          | P B     | 4  |
| (5)  | kサイクル無し ( $k \geq 5$ )           | P       | 3  |
| (6)  | 平面グラフ                            | B       | 3  |
| (7)  | 2部グラフ                            | P       | 3  |
| (8)  | Outerplanar                      | P B     | 3  |
| (9)  | Intervalグラフ                      | P B     | 3  |
| (10) | Edge グラフ                         | P B     | 3  |
| (11) | サイクル無し                           | P B     | 4  |
| (12) | Nonseparating<br>Independent set | P B     | 4  |

P : Planar, B : Bipartite

表3.

一方、kサイクルをもたない部分グラフをinduceする辞書式順序で最初の極大な辺の集合を計算する問題（Edge-Induced LFMSP(k-cycle free)）については、表4のそれぞれの場合にP完全になることを証明できる。

| k サイクル     | 次数 | 次数 (平面グラフ) |
|------------|----|------------|
| 3          | 6  | 7          |
| 4          | 4  | 5          |
| 5          | 4  | 4          |
| 6          | 3  | 4          |
| $k \geq 7$ | 3  | 3          |

P 完全な Edge-Induced LFMSP( $k$ -cycle free)

表 4.

#### 参考文献

- [AnM1] Anderson, R. and Mayr, E.W., Parallelism and greedy algorithm, STAN-CS-841003, April 1984.
- [AnM2] Anderson, R. and Mayr, E.W., Parallelism and the maximal path problem, Inf. Process. Lett. 24 (1987) 121-126.
- [AH] Asano, T. and Hirata, T., Edge-deletion and edge-contraction problems, Proc. 14th ACM STOC (1982) 245-254.
- [AvM1] Avenhaus, J. and Madlener, K., The Nielsen reduction and P-complete problems in free groups, Theoret. Comput. Sci. 32 (1984) 61-76.
- [AvM2] Avenhaus, J. and Madlener, K., On the complexity of intersection and conjugacy problems in free groups, Theoret. Comput. Sci. 32 (1984) 279-295.
- [C1] Cook, S.A., An observation on time-storage trade off, J. Comput. System Sci. 9 (1974) 308-316.
- [C2] A taxonomy of problems with fast parallel algorithms, Inform. Contr. 64 (1985) 2-22.
- [DLR] Dobkin, D., Lipton, R.J. and Reiss, S., Linear programming is log-space hard for P, Inf. Process. Lett. 8 (1979) 96-97.
- [DKM] Dwork, D., Kanellakis, P.C. and Michell, J.C., On the sequential nature of unification, J. Logic Programming 1 (1984) 35-50.
- [Go] Goldschlager, L.M., The monotone and planar circuit value problems are log space complete for P, SIGACT News 9 (1977) 25-29.
- [GSS] Goldschlager, L.M., Shaw, R.E. and Staples, J., The maximum flow problem is log-space complete for P, Theoret. Comput. Sci. 21 (1982) 105-111.
- [JL] Jones, N.D. and Laaser, W.T., Complete problems for deterministic polynomial time, Theoret. Comput. Sci. 3 (1977) 105-117.

- [Ka] Kasif, S., On the parallel complexity of some constraint satisfaction problems, Proc. AAAI-86 (1986) 349-353.
- [La] Ladner, R.E., The circuit value problem is log-space complete for P, SIGACT News 7 (1975) 18-20.
- [LW] Lengauer, T. and K.W. Wagner, The correlation between the complexities of the non-hierarchical and hierarchical versions of graph problems, Proc. STACS 87 (1987) 100-113.
- [LY] Lewis, J.M. and Yannakakis, M., The node deletion problems for hereditary properties is NP-complete, J. Comput. System Sci. 20 (1980) 219-230.
- [Lu] Luby, M., A simple parallel algorithm for the maximal independent set problem, Proc. 17th ACM STOC (1985) 1-10.
- [Ma] Martel, C.U., Lower bounds on parallel algorithms for finding the first maximal independent set, Inf. Process. Lett. 22 (1986) 81-85.
- [Mi1] Miyano, S., The lexicographically first maximal subgraph problems: P-completeness and NC algorithms, Proc. 14th ICALP (1987) 425-434.
- [Mi2] Miyano, S., A parallelizable lexicographically first maximal edge-induced subgraph problem, to appear in Inf. Process. Lett.
- [Mi3] Miyano, S.,  $\Delta^P_2$ -complete lexicographically first maximal subgraph problems, submitted for publication.
- [Pl] Plaisted, D.A., Complete problems in the first-order predicate calculus, J. Comput. System Sci. 29 (1984) 8-35.
- [Re] Reif, J.H., Depth-first search is inherently sequential, Inf. Process. Lett. 20 (1985) 229-234.
- [UG] Ullman, J.D. and Gelder, A., Parallel complexity of logical query programs, 27th IEEE FOCS (1986) 438-454.
- [WAN] Watanabe, T., Ae, T. and Nakamura, A., On the removal of forbidden graphs by edge-deletion or by edge-contraction, Discrete Appl. Math. 3 (1981) 151-153.
- [YD] Yamasaki, S. and Doshita, S., The satisfiability problems for some classes of extended Horn sets in the propositional logic, Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. of Japan, E 65 (1982) 390-396.
- [Yan] Yannakakis, M., Node-deletion problems on bipartite graphs, SIAM J. Comput. 10 (1981) 310-327.
- [Yas] Yasuura, H., On parallel computational complexity of unification, Proc. FGCS 84 (1984) 235-243.