

浅水波の大振幅孤立波解について

横浜国大・工 渡辺慎介 (Shinsuke Watamabe)
姜 波

奈良女子大 加古富志雄 (Fujio Kako)

浅水波の大振幅孤立波解を求める摂動論には大きく分けて、二通りの方法がある。一つは、発展方程式の高次近似による方法であり、もう一つは定常波解を高次近似する方法である。これから二つの摂動法はともに、小振幅波解から出発して高次解を逐次求めてゆくことが多い。

発展方程式による方法は、逐次摂動法の高次近似としてその方法論は確立している。逐次摂動法の高次近似は、高次の摂動方程式に現われる永年項を孤立波の速度に繰り込むことにより、解を順次求める方法である。しかし、この方法には時間変数と空間変数が含まれているため、取り扱いが複雑である。

定常波解を求める方法は、波形を適当な関数で展開し、その係数を決定してゆく。関数としては、Fourier 級数を用いる場合と、 $\operatorname{sech}^{2j} x$, ($j=1, 2, \dots, n$) を用いる場合がある。

孤立波が $\text{sech}^2 x$ の形で表わされるから、後者の展開のえが収束が良いであろうと予想される。しかしながら、 $\text{sech}^{2j} x$ で展開する根拠は必ずしも明確ではない。そこで、本報告では逐減摂動法の高次近似の精神を取り入れた方法により、そうして展開法の正当性を示すと同時に、簡単な場合について解を具体的に示すことにする。

§1. 浅水波の定常波解

深さ h の流体の表面を伝わる浅水波の運動を、非粘性・二次元渦なしの仮定のもとで考える。水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。 $y=0$ は運動のないときの水面の位置とする。距離を h 、速度を $\sqrt{gh}$ (g は重力加速度)、速度ポテンシャルを $\sqrt{gh^3}$ で規格化する。基礎方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial y^2} = 0, \quad -1 \leq y < \eta. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = 0, \quad y = -1 \text{ において.} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \left. \begin{array}{l} y = \eta \text{ に} \\ \text{おいて} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right)^2 \right\} + \eta = 0 \quad \left. \begin{array}{l} y = \eta \text{ に} \\ \text{おいて} \end{array} \right\} \quad (4)$$

である。ここで、 $\bar{\Phi}$ と η はそれぞれ規格化された速度ポテンシャルと波高を表わす。速度 c で進む浅水波を考える。小さ

パラメータ ε を導入し、次の変数変換と展開をする。

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - ct)$$

$$\eta = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \varepsilon^3 \eta_3 + \dots$$

$$\Phi = \varepsilon^{1/2} \Phi_1 + \varepsilon^{3/2} \Phi_2 + \varepsilon^{5/2} \Phi_3 + \dots$$

$$c = 1 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \dots$$

(1) と (2) の境界条件のもとで η について解くと

$$\Phi_1 = \Phi_1(\xi)$$

$$\Phi_2 = -\frac{(y+1)^2}{2} \cdot \frac{d^2 \Phi_1}{d\xi^2} + f_1$$

$$\Phi_3 = \frac{(y+1)^4}{4!} \cdot \frac{d^4 \Phi_1}{d\xi^4} - \frac{(y+1)^2}{2} \cdot \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + f_2$$

$$\Phi_4 = -\frac{(y+1)^6}{6!} \cdot \frac{d^6 \Phi_1}{d\xi^6} + \frac{(y+1)^4}{4!} \cdot \frac{d^4 f_1}{d\xi^4} - \frac{(y+1)^2}{2} \cdot \frac{d^2 f_2}{d\xi^2} + f_3$$

⋮

が得られる。 $\Phi_1, f_1, f_2, f_3, \dots$ は ξ のみの関数で、 y には依存しない。これらを用いて、(3) と (4) を書き改める。

(3), (4) で ε の最低次の方程式は

$$\frac{d\Phi_1}{d\xi} = \eta_1$$

であり、次のオーダ-の式は

$$-\eta_1^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} + c_1 \eta_1 + \eta_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2} - \frac{df_1}{d\xi} - c_1 \eta_1 + \eta_2 = 0$$

とほる。最後の2式の差をとり、 ξ について積分すると、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ で $\eta_1 \rightarrow 0$ とほる解として、1次の解

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= 2c_1 \operatorname{sech}^2 b\xi \\ b &= \sqrt{\frac{3c_1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が求められる。また、

$$\frac{d\eta_1}{d\xi} = -\eta_1^2 + \frac{1}{3} \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2} + c_1 \eta_1 + \eta_2$$

ξ の次のオーダーの方程式を整理すると

$$\mathcal{L}\eta_2 = F_2(\eta_1) \quad (6)$$

とほる。ここで、演算子 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = -3\eta_1 - \frac{1}{3} \frac{d^2}{d\xi^2} + 2c_1 \quad (7)$$

である。(6)の左辺のオーダーあるいはランク(rank)を見る。 ξ についての展開式から、 η_1 あるいは c_1 のランク ≤ 1 とすると、 ξ 微分のランクは $\frac{1}{2}$ 、 η_2 と c_2 は2、 η_3 と c_3 は3とほる。したがって、 $\mathcal{L}\eta_2$ のランクは3である。(6)の右辺、 $F_2(\eta_1)$ のランクも3でなければならぬ。ランクが3の項は、係数に c_1 を含まない項として

$$\eta_1^3, \quad \eta_1 \cdot \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2}, \quad \frac{d^4 \eta_1}{d\xi^4}$$

係数に C_1 を含む項として

$$C_1 \eta_1^2, \quad C_1 \frac{d^2 \eta_1}{d\xi^2}$$

係数に C_1^2 と C_2 を含む項として

$$C_1^2 \eta_1, \quad C_2 \eta_1$$

がある。ここで、 η_1 は (5) に示されている通り C_1 に比例し、さらに、 η_1 を ξ に関して 2 階微分するたびに $b^2 (= \frac{3}{2} C_1)$ が係数に現われるから、 $C_2 \eta_1$ 以外の項はすべて C_1^3 に比例する。

(5) の η_1 を用いると、(6) の右辺は

$$F_2(\eta_1) = \alpha_2 \operatorname{sech}^2 b\xi + \alpha_4 \operatorname{sech}^4 b\xi + \alpha_6 \operatorname{sech}^6 b\xi \quad (8)$$

によって表わされる。 α_2 は C_1^3 と C_1, C_2 の関数、 α_4 と α_6 は C_1^3 の関数である。

一方、(6) の右辺を 0 とおいた同次方程式、 $\gamma \eta_2 = 0$ 、を満たす解の 1 つは $\tanh b\xi \cdot \operatorname{sech}^2 b\xi$ である。他の解は表現が複雑であり、かつ、発散する解であるので、ここでは書かない。これから、(6) の右辺を表わす (8) には、永年項が含まれていないことがわかる。(6) の解は

$$\eta_2 = \beta_2 \operatorname{sech}^2 b\xi + \beta_4 \operatorname{sech}^4 b\xi \quad (9)$$

と書いて求めることができる。なぜなら、一般に

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \operatorname{sech}^{2n} b\xi &= 4n^2 b^2 \operatorname{sech}^{2n} b\xi \\ &\quad - (4n^2 + 2n) b^2 \operatorname{sech}^{2(n+1)} b\xi \end{aligned}$$

が成り立ち、(9)の η_2 を使って(6)の左辺、 $\mathcal{L}\eta_2$ 、を計算すると右辺(8)と同じ項が現われ、係数 β_2, β_4 を決定できるからである。(7)の演算子 $\mathcal{L}$ に対して、左辺の $\operatorname{sech}^2 b\xi$ の係数は0になる。したがって、 C_2 は C_1^2 によって表わされる。このようにして求めた解は

$$\left. \begin{aligned} \eta_2 &= C_1^2 \operatorname{sech}^2 b\xi \cdot (3 \operatorname{sech}^2 b\xi + 2) \\ C_2 &= \frac{19}{10} C_1^2 \end{aligned} \right\} (10)$$

である。これと同時に、 f_1 、つまり、 Φ_2 を決めることができる。これは、 η_2 と Φ_2 を η_1 を使って表わすことができることを意味している。

さて、 $n-1$ 次までの解が求められたとしよう。 n 次の振動解は

$$\mathcal{L}\eta_n = F_n(\eta_1) \quad (11)$$

と解けば求められる。両辺のランクは $n+1$ である。(11)の右辺に含まれる項は一般に

$$c_1^i \eta_1^j \cdot \frac{d^k \eta_1}{d\xi^k} \cdot \frac{d^l \eta_1}{d\xi^l} \text{ および } c_n \eta_1$$

である。もちろん、(3)(4)から(11)の左辺を計算すると、 $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{n-1}$ および $c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$ が含まれるが、それらは2次の解(10)と同じように、すべて η_1 と c_1 で表わされると仮定している。ランクが $n+1$ になるためには、

$$i + j + \frac{1}{2}(k + l) = n + 1$$

でなければならぬ。したがって、 k と l はともに偶数または奇数でなければならぬ。このとき、上式は $\operatorname{sech}^2 b\xi$ の整数乗で書くことができる。中乗の次数の最も高い項は、

$$i = k = l = 0, j = n + 1 \text{ の場合で、 } c_1^{n+1} \operatorname{sech}^{2(n+1)} b\xi$$

に比例する。こうして、(11)の左辺は $c_1^{n+1} \operatorname{sech}^2 b\xi, c_1^{n+1} \operatorname{sech}^4 b\xi, \dots, c_1^{n+1} \operatorname{sech}^{2(n+1)} b\xi$ および $c_1 c_n \operatorname{sech}^2 b\xi$ の線形結合で表わされる。このとき、解 η_n は

$$\eta_n = \gamma_2 \operatorname{sech}^2 b\xi + \gamma_4 \operatorname{sech}^4 b\xi + \dots + \gamma_{2n} \operatorname{sech}^{2n} b\xi$$

と書き、(11)の左辺に代入すると、 $\operatorname{sech}^2 b\xi$ から $\operatorname{sech}^{2(n+1)} b\xi$ に比例する項が現われるから、 $n+1$ 個の係数、 $\gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n}, c_n$ は決定できる。

$n=2$ のとき、解(10)が成立する。したがって、任意の次

数の模動解は $\text{sech}^{2p} b \xi$, ($p = 1, 2, \dots, n$) の線形結合で表現できる。

§2. 具体的な解

3次の解

$$\eta_3 = \frac{c_1^3}{10} \text{sech}^2 b \xi \cdot (101 \text{sech}^4 b \xi - \text{sech}^2 b \xi + 30)$$

$$c_3 = \frac{55}{14} c_1^3$$

4次の解

$$\eta_4 = \frac{c_1^4}{2625} \text{sech}^2 b \xi \cdot (364707 \text{sech}^6 b \xi + 8624 \text{sech}^4 b \xi + 69146 \text{sech}^2 b \xi - 71692)$$

$$c_4 = \frac{11813}{1400} c_1^4$$

5次の解

$$\eta_5 = \frac{c_1^5}{36750} \text{sech}^2 b \xi \cdot (19977255 \text{sech}^8 b \xi - 2660037 \text{sech}^6 b \xi + 6685465 \text{sech}^4 b \xi + 1216213 \text{sech}^2 b \xi - 10211414)$$

$$c_5 = \frac{57159}{3080} c_1^5$$

§3. まとめ

ここで述べた方法を逐減摂動法の高次近似と比べると次のようになる。

- (1). 演算子(7) は線形化された $K-dV$ 演算子に相当する。
- (2). 波の速度 c の ε 展開において、 $c_2, c_3, \dots$ が繰り込み定数に当たる。

この方法で二層流体における孤立波の高次近似解も求められる。結果は非常に複雑になるので、別の機会に発表した。