

高次元場の理論の新しい正則化と 繰り込み群

一ノ瀬 祥一

平成 22 年 6 月 13 日

静岡県立大学食品栄養科学部 〒 422-8526 静岡市駿河区谷田 52-1
School of Food and Nutritional Sciences, University of Shizuoka Yada
52-1, Shizuoka 422-8526, Japan
E-mail: ichinose@u-shizuoka-ken.ac.jp

1 はじめに

本研究会は物性理論、情報理論、場の理論、宇宙論等、数理解析の広い分野から参加者が多かったので、表題のテーマに関し専門でない読者を想定して述べる。詳しい内容は参考論文 [1, 2, 3, 4] に記載してあるのでここでは概要を述べる。

高次元（5 次元以上）の場の理論は多くの場合その定義が難しい。最大の困難が繰り込み可能性である。（6 次元 ϕ^3 理論などは結合定数の power-counting からは繰り込み可能であるが、（時空の）境界までも考えると紫外発散を免れることはできない。自由場理論でさえその紫外発散が制御できないことが知られている。）近年、弦理論、ブレーン理論の進展に伴い、高次元場の理論そのものが重要になってきた。 $(\text{string-tension})^{-1} = \alpha' \rightarrow 0$ の極限、即ち場の理論極限（高次元重力理論、高次元超重力理論）だけが、目下、曖昧さなしに議論できるからである。また LHC 実験などにおける物理量（例えば Higgs 質量、電気双曲子モーメント）の高次元モデル計算も緊急性のある課題として重要である。ここでの立場は（局所）場の理論の枠内で、高次元場の量子論を定義できないかという試みである。

2001 年 L. Randall と M.D. Schwartz は 5 次元の AdS_5 時空上で 5D Yang-Mills 理論の場の量子化を試みた [5]。動機は大統一理論におけ

る3つの結合定数の繰り込みフローの振る舞いがワープトモデル (warped model) という5次元理論でどう変更を受けるかを調べるためであった。その解析で場の自由度で積分したあと、場の局所座標である5次元時空点 $(X^M) = (x^\mu, z)$, $[M = 0, 1, 2, 3, 5; \mu = 0, 1, 2, 3]$ に対応して5次元積分が残る。 (x^μ) は我々の住む時空を記述する。 z は余次元座標。) 積分は発散しているので、4次元運動量空間に Cut-Off Λ を導入する。Brane inspired モデルであるので、余次元座標軸上の各点 z の上に4次元時空 (ブレイン) を考えているのである。4次元の繰り込み可能な場合には許される正則化 (regularization) である。しかし5次元理論にたいしては、 Λ^5 の発散が残ることが知られている。彼らのアイデアは各ブレインごとに Λ を変化させている、つまり $\Lambda = \Lambda(z)$ という点である。 $\Lambda(z)$ の関数形は双曲型 $\Lambda(z) \sim 1/z$ を仮定する。(その理由として彼らは holography の原理から導けると argue している。) このことにより、ゲージ結合定数の繰り込み群関数 β を有限に求めたと結論している。「 $\Lambda(z)$ の自然な決め方はないか？」というのが第一の本研究の動機である。

1983年の T. Appelquist and A. Chodos の仕事 [6] が5次元場の量子論の定義の難しさを多くの人に明らかに示した論文である。そこでは本質的に5次元平坦時空での自由場を考えている。余次元方向には周期 l の periodicity を課し問題を明確にする。真空のエネルギーのこの境界条件効果 (Casimir energy) を調べた。その結果はまず、 l に依存しない定数項 (宇宙定数) が Λ^5 で発散していることである。有限パートは有名なポテンシャルで、(1 スカラー場あたり)

$$V_{Cas}(l) = -\frac{3}{32\pi^2} \frac{\zeta(5)}{l^4}, \quad F_{Cas}(l) = -\frac{\partial V}{\partial l} = -\frac{3}{8\pi^2} \frac{\zeta(5)}{l^5}. \quad (1)$$

である。 $\zeta(z)$ はリーマンのツェータ関数である。マイナス符号はこの Casimir force が引力であることを示している。なおこの有限パートのゲージ不変性は文献 [7] に示されている。この結果は大多数に支持されていて、実際、高次元モデルの統一理論を考える時、余次元空間をコンパクト化して取り扱うのであるが、「その余次元サイズが低エネルギー側で (現在可能な測定では観測できないほど) 小さくなっている」とする立場の強い支えになっているのである。第二の動機はこの発散 (宇宙定数) パート問題を解決したいと思うからである。これは高次元場の理論の紫外発散の問題と一般に捉えられている。

2 カシミアエネルギー

演者は Appelquist-Chodos の場合 (つまり 5 次元平坦時空の場合、 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$) でまず調べてみた。5 次元電磁場のカシミアエネルギー E_{Cas} は以下のようになる。

$$E_{Cas}(\Lambda, l) = \int_{\tilde{p} \leq \Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^l dy (F_f^-(\tilde{p}, y) + 4F_f^+(\tilde{p}, y)) \quad ,$$

$$F_f^\mp(\tilde{p}, y) = - \int_{\tilde{p}} d\tilde{k} \frac{\mp \cosh \tilde{k}(2y - l) + \cosh \tilde{k}l}{2 \sinh(\tilde{k}l)} \quad . \quad (2)$$

ここで $\mp$ は余次元座標 y に関するパリティ成分の寄与を表す。(前節での z はワープトの場合に使う。ここでは余次元座標を y とした。) また $\tilde{p}$ は 4 次元運動量 $(p_a) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ の大きさである。文献 [6] との一致は確認してある [1]。一方、5 次元時空が AdS_5 の (ワープトモデル、バルク曲率 ω 、 $ds^2 = (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2)/\omega^2 z^2$) 自由スカラー場 ((質量) $^2 = -4\omega^2 < 0$) に対し、そのカシミアエネルギーは

$$-E_{Cas}^{\Lambda, \mp}(\omega, T) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \Big|_{\tilde{p} \leq \Lambda} \int_{1/\omega}^{1/T} dz F_w^\mp(\tilde{p}, z), F_w^\mp(\tilde{p}, z) = \frac{1}{(\omega z)^3} \int_{\tilde{p}^2}^\infty \{G_k^\mp(z, z)\} dk^2,$$

$$G_p^\mp(z, z') = \mp \frac{\omega^3}{2} z^2 z'^2 \frac{\{I_0(\frac{\tilde{p}}{\omega})K_0(\tilde{p}z) \mp K_0(\frac{\tilde{p}}{\omega})I_0(\tilde{p}z)\} \{I_0(\frac{\tilde{p}}{T})K_0(\tilde{p}z') \mp K_0(\frac{\tilde{p}}{T})I_0(\tilde{p}z')\}}{I_0(\frac{\tilde{p}}{T})K_0(\frac{\tilde{p}}{\omega}) - K_0(\frac{\tilde{p}}{T})I_0(\frac{\tilde{p}}{\omega})}. \quad (3)$$

となる。ここで I_0 と K_0 は 0 次の変形ベッセル関数である。

以下この 2 つの場合を比較しながら述べる。

3 エネルギーの振る舞い

平坦な場合の積分範囲が図 1 に示されている。 μ, ϵ はそれぞれの座標軸の IR cut-off および UV cut-off である。図中の双曲線より下側が Randall-Schwartz(RS) の取る積分領域である。図 2 は $E_{Cas}(2)$ の被積分関数を示した。中央に谷が y 軸に平行に走っているのがわかる。Cut-Off の効果である。谷の深さは Λ^4 に比例して増大する。また $F(\tilde{p}, y) \equiv F_f^-(\tilde{p}, y) + 4F_f^+(\tilde{p}, y)$ の内 odd parity(-) 成分 $F_f^-(\tilde{p}, y)$ の被積分関数を図 3 に示した。境界付近を除き、ほとんどの領域で -0.5 である。この逆テーブル型の振る舞いは $F_f^+(\tilde{p}, y)$ でも上下が逆になるだけで同じである。これは Casimir energy density が $\tilde{p} \ll \Lambda$ で $\tilde{p}^3$ に比例することを意味する。(5 次元版) Rayleigh-Jeans 領域の振る舞いである。

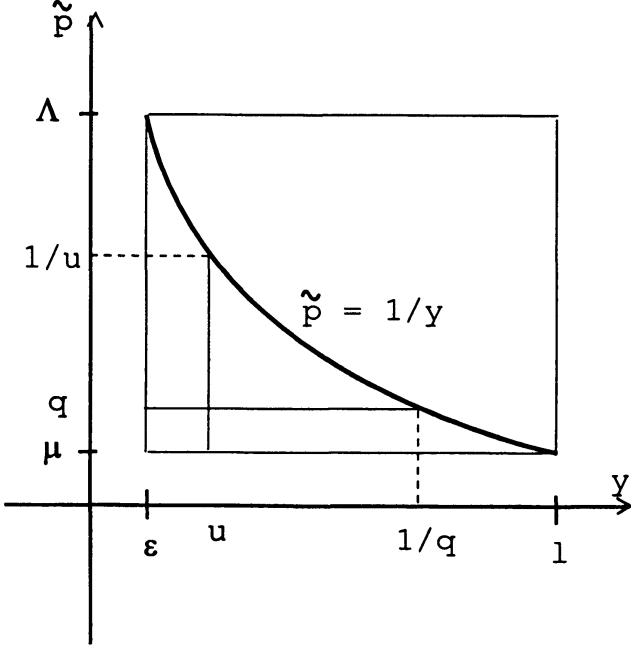


図 1: Space of $(y, \tilde{p})$ for the integration. The hyperbolic curve will be used in Sec.3.

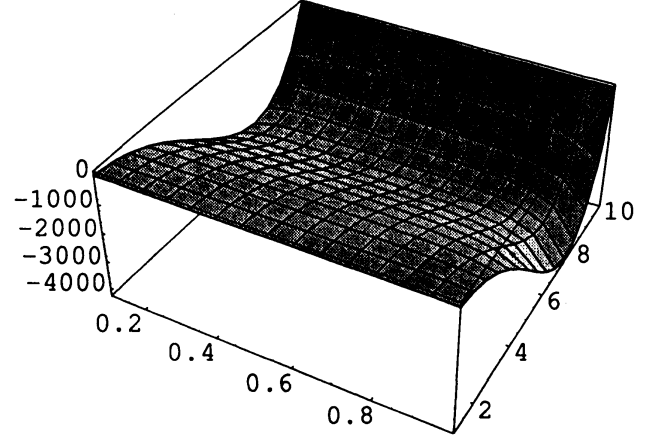


図 2: Behaviour of $\tilde{p}^3 F(\tilde{p}, y)$ in (2). $l = 1$, $\Lambda = 10$, $0.1 \leq y < 1$, $1 \leq \tilde{p} \leq 10$.

$E_{Cas}(\Lambda, l)(2)$ は数値的に求めることができる。

$$E_{Cas}(\Lambda, l) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \left[-0.1249 l \Lambda^5 - (1.41, 0.706, 0.353) \times 10^{-5} l \Lambda^5 \ln(l\Lambda) \right] \quad (4)$$

Λ^5 で発散している点は文献 [6] と一致している。 $\Lambda^5 \ln(\Lambda)$ の発散も現れている。RS 領域に限ると、

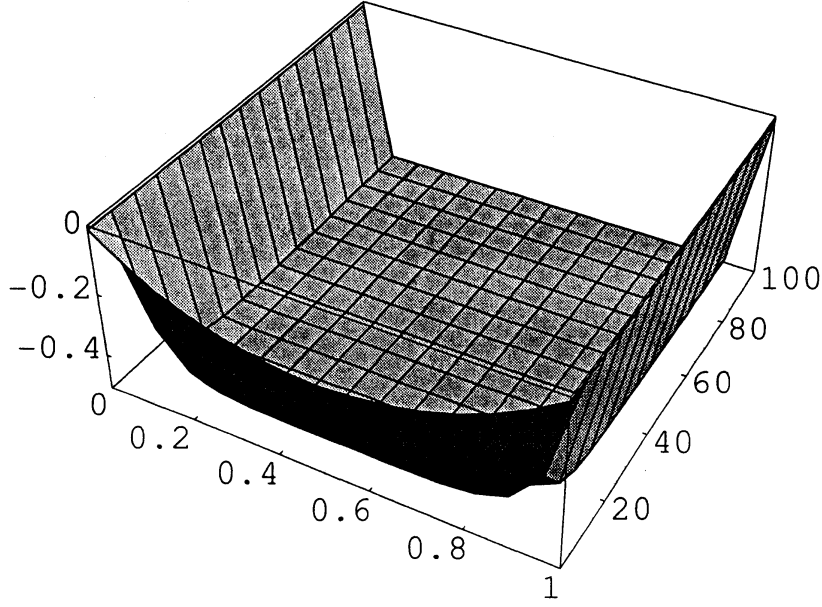
$$E_{Cas}^{RS} = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_{1/l}^{\Lambda} dq \int_{1/\Lambda}^{1/q} dy q^3 F(q, y) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} [-8.93814 \times 10^{-2} \Lambda^4] \quad (5)$$

となり、発散の程度は Λ^4 と多少ゆるやかになる。

ワープトモデルでの場合は似たようになる。図 4 が積分領域である。 z 軸の UV 側の端点が $1/\omega$ である。 $\tilde{p}$ 軸の IR 側の端点は $\mu = \Lambda T/\omega$ と取った。図 5 に $E_{Cas}^-(3)$ の被積分関数の振る舞いが示されている。前例と同じく、谷が余座標軸 z に沿って走っている。 z 軸の UV 側端点 ($1/\omega$) 近傍で壁面ができていた点が図 2 と異なる。warped の場合は拵がりのパラメータ ω があるおかげで、余軸上の UV 領域は regularization 不要である。図 3 に対応する振る舞いが図 6 に示されている。 $E_{Cas}^-(3)$ を数値的に求めると

$$E_{Cas}^{\Lambda,-}(\omega, T) = \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \times \left[-0.0250 \frac{\Lambda^5}{T} \right] \quad (6)$$

図 3: Behaviour of the integrand of $F^-(2)$. $l = 1, \Lambda = 100, 0 \leq y \leq l = 1, 1 \leq \tilde{k} \leq \Lambda = 100$. The flat plane locates at the height -0.5.



であり、 $\Lambda^5 \ln(\Lambda/T)$ の項は出ない。RS 領域に限ると、

$$\begin{aligned}
 E_{Cas}^{-RS}(\omega, T) &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_{\mu}^{\Lambda} dq \int_{1/\omega}^{\Lambda/\omega q} dz q^3 F^-(q, z) \\
 &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{\Lambda^5}{\omega} \left\{ -1.58 \times 10^{-2} - 1.69 \times 10^{-4} \ln \frac{\Lambda}{\omega} \right\}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

となり、発散の程度は領域を限らない場合と変わらない。 $(\omega \rightarrow \Lambda$ の極限で平坦の場合 (5) とほぼ一致。但し、本研究では基本的に $T \ll \omega \ll \Lambda$ を仮定している。)

4 積分領域を限る 2つの超曲面と球格子正則化

積分領域を限ることにより紫外発散の singularity を取り除くことは良いアイデアであるが、RS 領域は発散の singularity を除くには不十分である。また領域を限ることの根拠が不明である。そこで一つの可能性として演者らは文献 [8] で以下の提案をした。5次元空間での積分領域は図7にあるように2つの超局面 (4次元) UV-surface と IR-surface に挟まれる

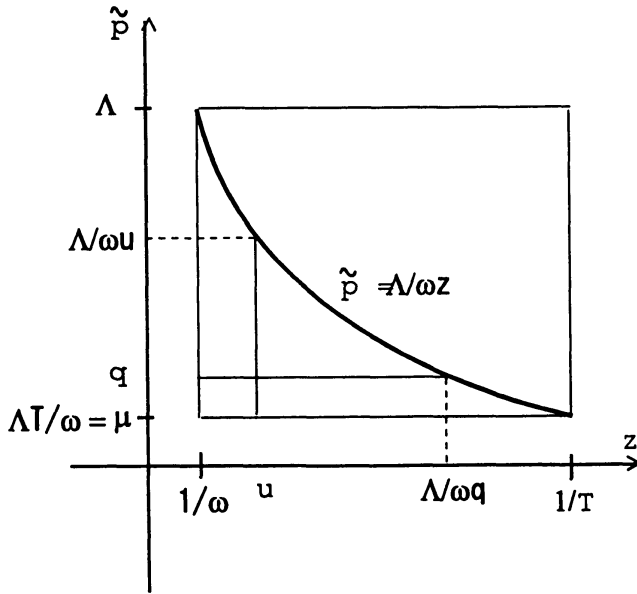


図 4: Space of $(z, \tilde{p})$ for the integration. The hyperbolic curve will be used in Sec.3.

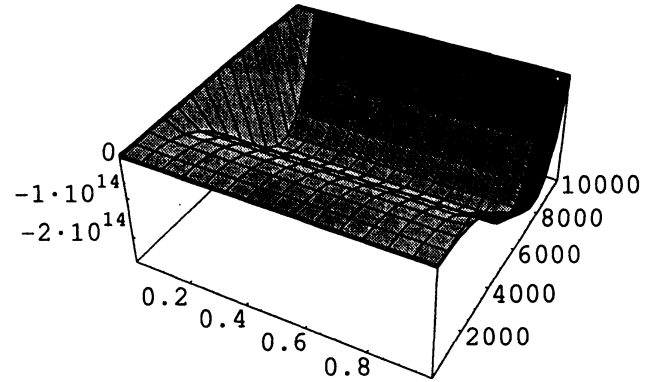


図 5: Behaviour of $(-1/2)\tilde{p}^3 F^-(\tilde{p}, z)$ in (3). $T = 1, \omega = 10^4, \Lambda = 10^4$. $1.0001/\omega \leq z < 0.9999/T, \Lambda T/\omega \leq \tilde{p} \leq \Lambda$.

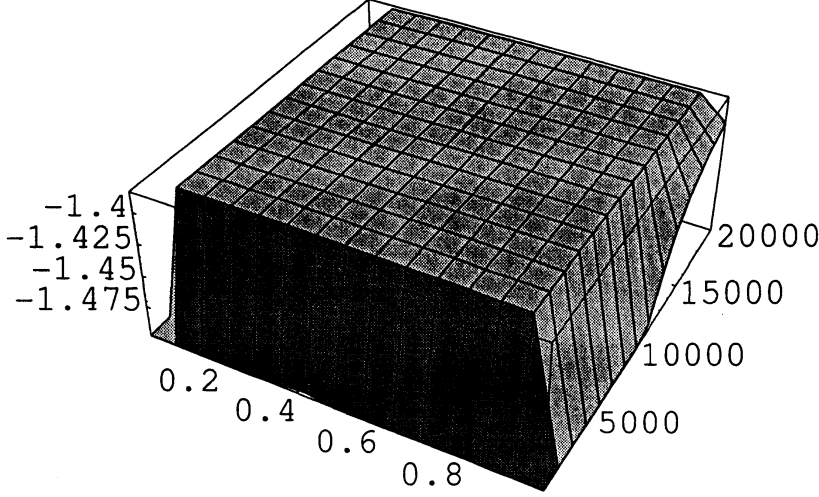
領域に限られる。ここでそれらの超局面の定義は

$$B_{UV} : \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} = r_{UV}(y) \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{\Lambda} < y < l \quad ,$$

$$B_{IR} : \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2} = r_{IR}(y) \quad , \quad \epsilon = \frac{1}{\Lambda} < y < l \quad , \quad (8)$$

である。 $(x^a (a = 1, 2, 3, 4))$ は $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ を Euclid 化したものである。) ここで $r_{UV}(y), r_{IR}(y)$ は超局面の形を表し、バルク (5次元空間) のメトリックと最小局面原理で決まるものである。その状況を繰り込み群の解釈が成り立つように表示したものが図8である。縦軸は 4D momentum の代わりに 4D coordinate で示してある。余次元軸 y 上の各点には 4D 空間 ("ブレイン") があるが、その 4D 空間は半径 $r_{UV}(y)$ の 4D ball が半径 $r_{IR}(y)$ の 4D ball の領域中で sphere lattice 構造を成している regularized space であることがわかる。図のような場合は y 軸の UV 側 ($y = \epsilon$) から IR 側 ($y = l$) に沿い、密から疎へと coarse graining していると解釈できる。UV 境界面 B_{UV} を stereographic に表示したものが図9である。上記のような振る舞いの trajectory、 $r_{IR}(y)$ および $r_{UV}(y)$ 、が存在することは数値的にすでに確かめられている [1]。Runge-Kutta 法を使い minimal surface 条件の微分方程式を解いた。平坦の場合で説明したがワープトの場合でも同じようになる。例えば、積分領域は図 10 になる。

図 6: Behavior of $\ln |\frac{1}{2}\mathcal{F}^-(\tilde{k}, z)| = \ln |\tilde{k} G_k^-(z, z)/(\omega z)^3|$. $\omega = 10^4, T = 1, \Lambda = 2 \times 10^4$. $1.0001/\omega \leq z \leq 0.9999/T$. $\Lambda T/\omega \leq \tilde{k} \leq \Lambda$. Note $\ln |(1/2) \times (1/2)| \approx -1.39$.



5 重み、 $W(\tilde{p}, y)$ or $W(\tilde{p}, z)$ 、の導入

次のアイデアは積分領域を限るかわりに重み (weight)、 W 、を導入する方法である。すなわち、5次元空間での積分 measure $d^4p dy$ を $W(\tilde{p}, y)d^4p dy$ に変更するのである。 $W(\tilde{p}, y)$ 導入を正当化する理由は最小面積原理を使い後から議論する。ここでは $W(\tilde{p}, y)$ の damping factor を適当ないくつかのものに仮定して、とりあえず物理量 (カシミアエネルギー) が発散しないようになっているかどうかを調べてみる。次の2つ重みを考えてみる。

$$W(\tilde{p}, y) = \begin{cases} (N_1)^{-1} e^{-(1/2)l^2\tilde{p}^2 - (1/2)y^2/l^2} \equiv W_1(\tilde{p}, y), & N_1 = 1.557/8\pi^2 & \text{elliptic suppression} \\ (N_2)^{-1} e^{-\tilde{p}y} \equiv W_2(\tilde{p}, y), & N_2 = 2(l\Lambda)^3/8\pi^2 & \text{hyperbolic suppression} \end{cases} \quad (9)$$

楕円型 (W_1) と双曲型 (W_2) の damping である。 N_1, N_2 は normalization constants である。双曲型はその分布が両軸 ($\tilde{p}$ 軸、 y 軸) の遠方まで広がっているため $N_2 \propto (l\Lambda)^3$ である。Randall-Schwartz の領域制限を模していると想定される。

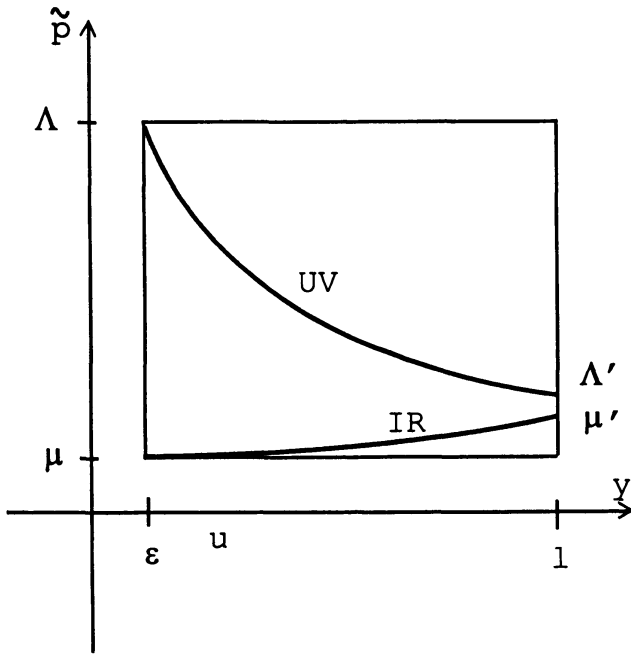


図 7: Space of $(\tilde{p}, y)$ for the integration (present proposal).

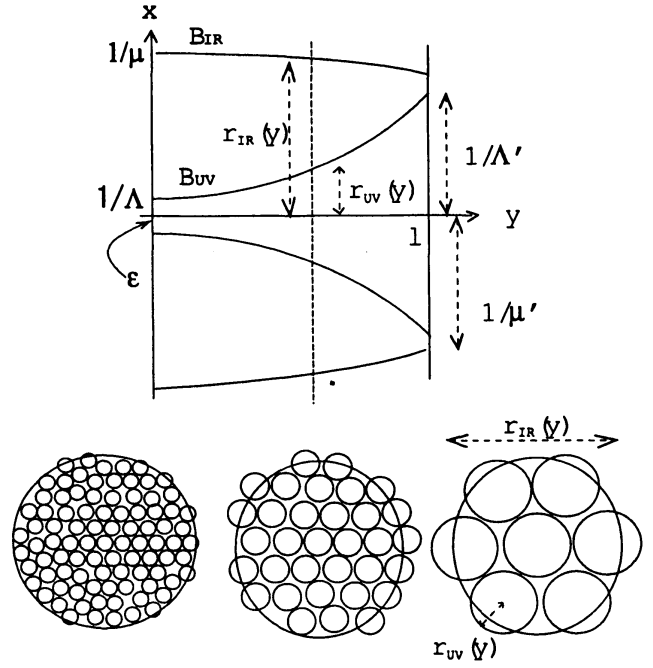


図 8: Regularization Surface B_{IR} and B_{UV} in the 5D coordinate space (x^μ, y) , Flow of Coarse Graining (Renormalization) and Sphere Lattice Regularization.

図 11 は平坦の場合のエネルギー密度分布 図 2 で W_1 の重みを入れた場合の分布である。谷の深さ、位置、形が変化している。平坦の場合で、重みを入れてカシミアエネルギーを数値的に求めると、

$$E_{Cas}^W = \begin{cases} -(2.500, 2.501, 2.501) \frac{\Lambda}{l^3} + (-0.142, 1.09, 1.13) \times 10^{-4} \frac{\Lambda \ln(l\Lambda)}{l^3} & \text{for } W_1 \\ -(6.0392, 6.0394, 6.03945) \times 10^{-2} \frac{\Lambda}{l^3} - (24.7, 2.79, 1.60) \times 10^{-8} \frac{\Lambda \ln(l\Lambda)}{l^3} & \text{for } W_2 \end{cases} \quad (10)$$

3 重項はデータの不安定さを示し、使用した l, Λ の領域が十分大きくなかったことによる。本来は同一になるべきである。 W_2 の場合の結果は、 N_2 も考慮することにより、(5) と consistent である。特に $\ln(l\Lambda)$ 項は使用した計算精度では消えている。

ワープトの場合を重み付で扱うと以下のようなになる。重みは

$$W(\tilde{p}, z) = \begin{cases} (N_1)^{-1} e^{-(1/2)\tilde{p}^2/\omega^2 - (1/2)z^2 T^2} \equiv W_1(\tilde{p}, z), & N_1 = 1.711/8\pi^2 & \text{elliptic suppr.} \\ (N_2)^{-1} e^{-\tilde{p}zT/\omega} \equiv W_2(\tilde{p}, z), & N_2 = 2\frac{\omega^3}{T^3}/8\pi^2 & \text{hyperbolic suppr.1} \end{cases} \quad (11)$$

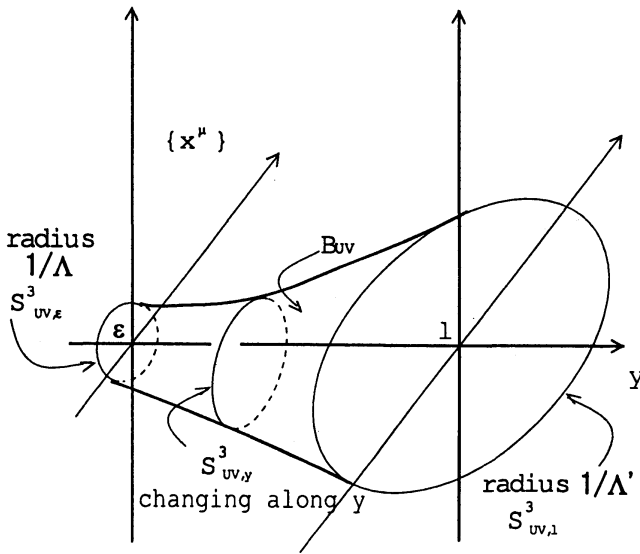


図 9: UV regularization surface in 5D coordinate space.

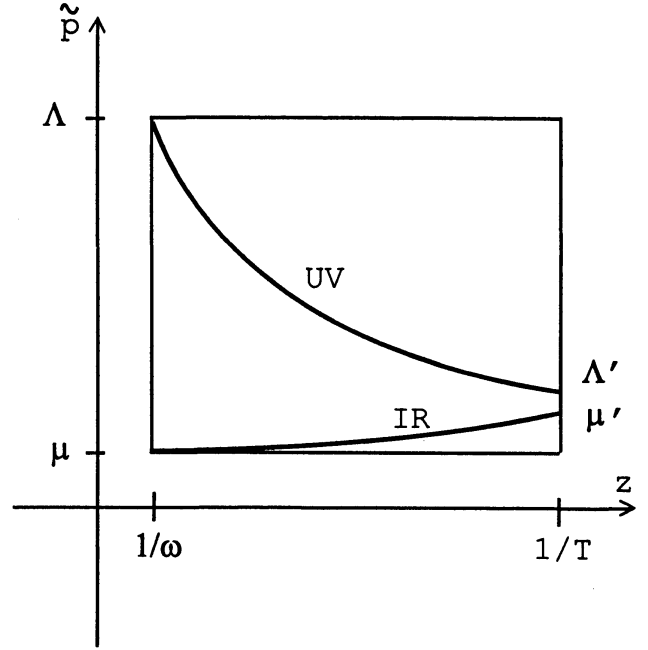


図 10: Space of $(\tilde{p}, z)$ for the integration (present proposal).

と楕円型、双曲型に取る。図 12 は図 5 で W_1 重みをつけた場合である。(正確には双方で共通の ω, Λ をとるべき。) 谷の位置と形が変わっている。カシミアエネルギーを求めると

$$-E_{Cas}^W = \begin{cases} \frac{\omega^4}{T} \Lambda \times 1.2 \left\{ 1 + 0.11 \ln \frac{\Lambda}{\omega} - 0.10 \ln \frac{\Lambda}{T} \right\} & \text{for } W_1 \\ \frac{T^2}{\omega^2} \Lambda^4 \times 0.062 \left\{ 1 + 0.03 \ln \frac{\Lambda}{\omega} - 0.08 \ln \frac{\Lambda}{T} \right\} & \text{for } W_2 \end{cases} \quad (12)$$

となる。双曲型の結果は RS 領域制限の (7) とくらべ、発散はややゆるやかになっている ($\Lambda^5 \rightarrow \Lambda^4$)、 $\ln(\Lambda/T)$ の項が現れている点が新しい。

10 数種類の重みについて調べた結果、双曲型 W_2 を除き振る舞いはほぼ同じであることがわかった。従い平坦の場合は

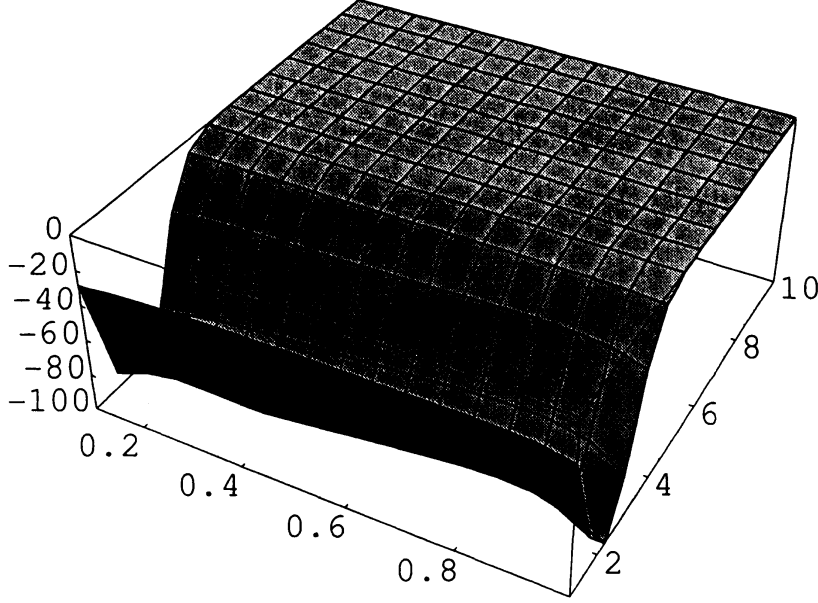
$$E_{Cas}^W / \Lambda l = -\frac{\alpha}{l^4} (1 - 4c \ln(l\Lambda)) \quad (13)$$

とまとめ、ワープトの場合は

$$E_{Cas}^W / \Lambda T^{-1} = -\alpha \omega^4 (1 - 4c \ln(\Lambda/\omega) - 4c' \ln(\Lambda/T)) \quad , \quad (14)$$

となる。パラメータ α, c, c' は重みの取り方による。因子 Λl および ΛT^{-1} は長方形積分区間の面積であり、規格化定数である。これらの結果は適当な重みをつければ、5次元カシミアエネルギーは対数発散まで抑える

図 11: Behaviour of $\tilde{p}^3 W_1(\tilde{p}, y) F(\tilde{p}, y)$ (elliptic suppression). $\Lambda = 10$, $l = 1$. $1/\Lambda \leq y \leq 0.99999l$, $1/l \leq \tilde{p} \leq \Lambda$.



ことができることを示している。それは境界パラメター l, ω の繰り込みを通じ、有限の値を与えたことになる。Sec.8 参照。

6 重みの導入の意味 (1): 最小面積原理

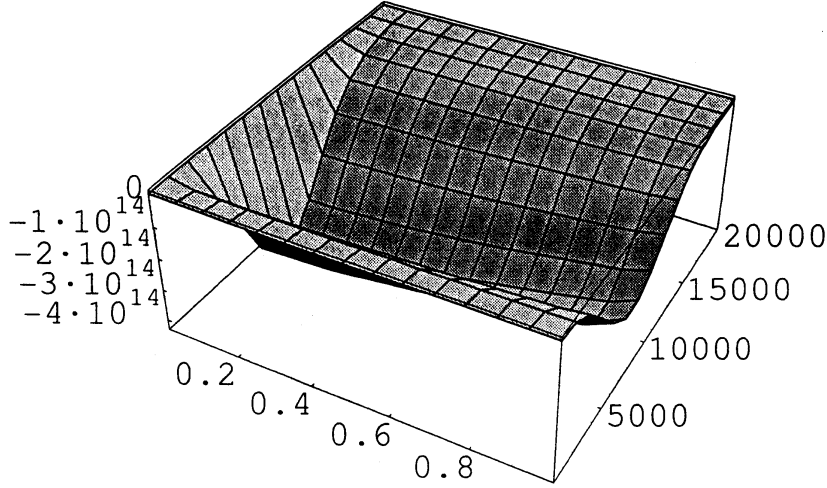
文献 [8] において、重み W の決め方につき、以下の考えを提出した。ワープトの場合で述べると、重みは

$$\begin{aligned} -E_{Cas}^W(\omega, T) &= \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \int_{1/\omega}^{1/T} dz W(\tilde{p}, z) F^\mp(\tilde{p}, z) \\ &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int d\tilde{p} \int_{1/\omega}^{1/T} dz \tilde{p}^3 W(\tilde{p}, z) F^\mp(\tilde{p}, z), \end{aligned} \quad (15)$$

のように現れる。積分領域は図 10 の長方形領域である。これを以下のような経路積分で表す。

$$\begin{aligned} -E_{Cas}^W(\omega, T) &= \int \mathcal{D}\tilde{p}(z) \int_{1/\omega}^{1/T} dz S[\tilde{p}(z), z], \\ S[\tilde{p}(z), z] &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \tilde{p}(z)^3 W(\tilde{p}(z), z) F^\mp(\tilde{p}(z), z). \end{aligned} \quad (16)$$

図 12: Behavior of $(-N_1/2)\tilde{p}^3 W_1(\tilde{p}, z)F^-(\tilde{p}, z)$ (elliptic suppression). $\Lambda = 20000$, $\omega = 5000$, $T = 1$. $1.0001/\omega \leq z \leq 0.9999/T$, $\mu = \Lambda T/\omega \leq \tilde{p} \leq \Lambda$.



経路 $\{\tilde{p}(z)|\omega^{-1} < z < T^{-1}\}$ はすべての可能な道筋について足しあげる。上記の経路積分では $S[\tilde{p}(z), z]$ の極値、 $\delta S = 0$ 、を与える経路が主要な寄与をする。

$$\text{Dominant Path } \tilde{p}_W(z) : \quad \frac{d\tilde{p}}{dz} = \frac{-\frac{\partial \ln(WF)}{\partial z}}{\frac{3}{\tilde{p}} + \frac{\partial \ln(WF)}{\partial \tilde{p}}} \quad (17)$$

この解、主要経路 $\tilde{p}_W(z)$ は $W(\tilde{p}, z)$ により決定されることがわかる。具体例は図 11、図 5 での谷底の曲線である。

他方この $\tilde{p}_W(z)$ とは独立に決まる経路がある。それが最小曲面カーブ $r_g(z)$ で以下の最小曲面条件を満たす。

$$\text{Minimal Surface Curve } r_g(z) : \quad 3 + \frac{4}{z}r'r - \frac{r''r}{r'^2 + 1} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\omega} \leq z \leq \frac{1}{T} \quad (18)$$

この微分方程式は超曲面 ((8) で一般の r にしたもの) の面積 A を最小にする (*minimal area principle*: $\delta A = 0$) ことから得られる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\delta_{ab} + \frac{x^a x^b}{(rr')^2}) \frac{dx^a dx^b}{\omega^2 z^2} \equiv g_{ab}(x) dx^a dx^b, \\ A &= \int \sqrt{\det g_{ab}} d^4 x = \int_{1/\omega}^{1/T} \frac{1}{\omega^4 z^4} \sqrt{r'^2 + 1} r^3 dz. \end{aligned} \quad (19)$$

従い $r_g(z)$ は *induced geometry* $g_{ab}(x)$ により決まる。ここで W を定義するものとして、以下の要請をする [1]。

$$\tilde{p}_W(z) = \tilde{p}_g(z) \quad , \quad (20)$$

ここで $\tilde{p}_g \equiv 1/r_g$ とする。

結局、5D バルクに渡る積分の measure $d^4p_E dz W(\tilde{p}, z)$ を (バルク、induced) geometry により定義したことになる。

7 重みの導入の意味 (2): 時空のゆらぎ

前節の考えをより直接的に、より自然に取り入れる処方としてカシミアエネルギーを、高次元の場合には、以下のように新たに定義する。

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_{Cas}(\omega, T, \Lambda) &\equiv \int_{1/\Lambda}^{1/\mu} d\rho \int r(1/\omega) \prod_{a,z} \mathcal{D}x^a(z) \times \\ &\quad = r(1/T) \\ &\quad = \rho \\ F\left(\frac{1}{r}, z\right) &\exp \left[-\frac{1}{2\alpha'} \int_{1/\omega}^{1/T} \frac{1}{\omega^4 z^4} \sqrt{r'^2 + 1} r^3 dz \right], \end{aligned} \quad (21)$$

ここで $\mu = \Lambda T/\omega$ 、また極限 $\Lambda T^{-1} \rightarrow \infty$ を取る。 $1/2\alpha'$ は弦 (表面) 張力パラメータ (string (surface) tension parameter) である。(注意: α' の次元は $[\text{Length}]^4$ 。) $F(\tilde{p}, z)$ はバルクでの物質場 (ここでは自由場、EM 場。重力場以外の場。) の量子効果である。

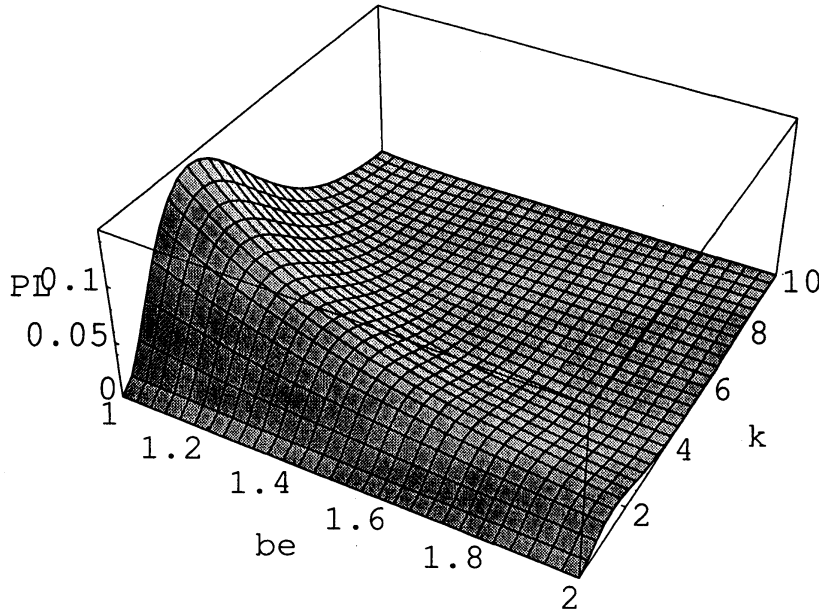
上記のカシミアエネルギーの表式をみると、4D 座標 x^a が量子統計力学の演算子の役割を演じていることがわかる。その時、余次元座標 z は逆温度パラメータになっている。時間、空間の座標がゆらいでいるという描像が浮かぶ。

上記積分を数値的または解析的に直接評価し同様な結果がでることを期待する。

8 おわりに

図 13 にプランク分布を逆温度軸も入れてステレオグラフィカルに描いた。これは図 11、図 12 と似ている。大きな差は符号だけの違いである。前節で余次元座標が逆温度軸になっていたことと対応している。

図 13: Graph of Planck's radiation formula. $\mathcal{P}(\beta, k) = \frac{1}{(ch)^3} \frac{1}{\pi^2} k^3 / (e^{\beta k} - 1)$ ($1 \leq \beta \leq 2$, $0.01 \leq k \leq 10$).



式 (14) に現れる対数発散は通常の場合の理論でおなじみである。以下のように境界パラメーター (warp factor) ω に繰り込まれる。

$$\frac{E_{Cas}^W}{\Lambda T^{-1}} = -\alpha \omega^4 \left(1 - 4c \ln\left(\frac{\Lambda}{\omega}\right) - 4c' \ln\left(\frac{\Lambda}{T}\right) \right) = -\alpha (\omega_r)^4 ,$$

$$\omega_r = \omega \sqrt[4]{1 - 4c \ln\left(\frac{\Lambda}{\omega}\right) - 4c' \ln\left(\frac{\Lambda}{T}\right)} . \quad (22)$$

Local counterterms は不用である。ここが余次元モデルで従来考えられて来たことと大きく異なる点である。通例の coupling(g) の繰り込みでは c, c' は g による。しかし今の場合は pure number である。場と境界の相互作用を反映している。 c, c' が十分小さい時には

$$|c| \ll 1, |c'| \ll 1, \quad \omega_r = \omega (1 - c \ln(\Lambda/\omega) - c' \ln(\Lambda/T)) ,$$

$$\beta \equiv \frac{\partial}{\partial(\ln \Lambda)} \ln \frac{\omega_r}{\omega} = -c - c' . \quad (23)$$

繰り込み群の β 関数である。 $c + c'$ の符号により、 ω は漸近自由になったりその逆になったりする。(宇宙論に適応すると、これが宇宙項が低エネルギー側での増減傾向を決める。) 平坦時空の場合 (13) も同様に、境界パラメーター (periodicity) l の繰り込みになる。

Sec.7 で述べたように、ここで提出した高次元量子化法は時空座標の揺らぎの picture を与える。ストリング理論では時空座標が不確定性関係を持つことが知られている [10]。

References

参考文献

- [1] S. Ichinose, *Prog. Theor. Phys.* **121**(2009)727, ArXiv:0801.3064v8[hep-th].
- [2] S. Ichinose, "Casimir Energy of 5D Warped System and Sphere Lattice Regularization", ArXiv:0812.1263[hep-th], US-08-03.
- [3] S. Ichinose, *Int. Jour. Mod. Phys.* **23A**(2008)2245-2248, Proc. of Int. Conf. on Prog. of String Theory and Quantum Field Theory (Dec.7-10,2007,Osaka City Univ.,Japan), arXiv:/0804.0945
- [4] S. Ichinose, "Casimir Energy of the Universe and New Regularization of Higher Dimensional Quantum Field Theories", First Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity (09.9.14-18, Kolymbari, Crete, Greece), to appear in the proceedings. ArXiv:1001.0222[hep-th].
- [5] L. Randall and M.D. Schwartz, *JHEP* **0111** (2001) 003, hep-th/0108114
- [6] T. Appelquist and A. Chodos, *Phys.Rev.* **D28**(1983)772
T. Appelquist and A. Chodos, *Phys.Rev.Lett.* **50**(1983)141
- [7] S. Ichinose, *Phys.Lett.* **152B**(1985),56
- [8] S. Ichinose and A. Murayama, *Phys.Rev.* **D76**(2007)065008, hep-th/0703228
- [9] S. Ichinose and A. Murayama, *Nucl.Phys.* **B710**(2005)255, hep-th/0401011

- [10] T. Yoneya, *Duality and Indeterminacy Principle in String Theory* in "Wandering in the Fields", eds. K. Kawarabayashi and A. Ukawa (World Scientific,1987), p.419
T. Yoneya, *String Theory and Quantum Gravity* in "Quantum String Theory", eds. N. Kawamoto and T. Kugo (Springer,1988), p.23
T. Yoneya, *Prog.Theor.Phys.***103**(2000)1081