

## 矩形ダクト内流れにおける定常進行波解

京都大学大学院 工学研究科 沖野真也 (Shinya Okino)  
京都大学大学院 工学研究科 永田雅人 (Masato Nagata)

### Abstract

A number of travelling wave solutions in a square duct are discovered by a homotopy approach using artificially arranged body forces, following Waleffe, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4140-4143 (1998). Some of them appear at much lower Reynolds number than the transitional regime to turbulence,  $Re_b \sim 1000$ . It is found that most of the solutions presented in this paper have their counterparts in pipe flow listed in Pringle *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**, 457-472 (2009).

### 1 はじめに

円管内流れや正方形ダクト内流れは線形臨界点をもたない。こうした系における乱流への遷移は有限振幅擾乱が引き金となって起き、位相空間において Navier-Stokes 方程式に対する複数の不安定解 (定常進行波解あるいは周期解など) の周りを巡回する状態が乱流であると考えられている。それゆえ、Navier-Stokes 方程式の非線形解に対する理解が乱流遷移現象を解明する上で不可欠である。円管内流れに対する非線形解は数多く求められているのに対し、正方形ダクト内流れに対する解は Wedin *et al.* (2009), Uhlmann *et al.* (2009), Okino *et al.* (2010) の求めた 3 種類の解のみにとどまっている。本論文では、正方形ダクト内流れにおける種々の定常進行波解を効率良く求めるための手法と、その結果得られた 9 種類の定常進行波解について述べる。

### 2 正方形ダクト内流れにおける定常進行波解

平面 Couette 流や円管内流れ、あるいは本論文で対象としている正方形ダクト内流れに代表されるような線形臨界点をもたない流れからは、もちろん解の分岐は起こらない。それゆえに、こうした系における非線形解を求めるためにホモトピー法と呼ばれる手法がしばしば用いられる。これは本来線形安定である流れを不安定化するようなパラメータ (例えば、系全体の回転や温度差など) を加え、一旦分岐解を求めた後に、そのパラメータを零に戻すことで、もともとの系に対する解を得る手法である。しかしながら、何かしらのパラメータを加えたところでホモトピー法が必ずしも成功する保証はない。例えば、Barnes & Kerswell (2000) は円管内流れに回転パラメータを導入することで三次元解を求めたが、回転パラメータを零に戻し、純粋な円管内流れの非線形解へと接続することには失敗している。Waleffe (1998, 2003) は仮想的な体積力を流体層に印加し、縦渦を導入することで、平面 Couette 流と平面 Poiseuille 流に対する非線形解を得ることに成功した。ここでは彼のアプローチに倣って、正方形ダクト内流れに対して仮想的な外力を導入し、非線形解を求めるための手法の定式化を行なう。

正方形断面をもつ無限に長いダクト内における非圧縮粘性流体の運動について考える。正方形の一辺の長さを  $b_*$ 、流体の動粘性係数を  $\nu_*$  とする。まず、Cartesian 座標系  $(x_*, y_*, z_*)$  を設定する。 $x_*$  軸はダクトに沿った方向に、 $y_*, z_*$  軸はダクト断面の辺と平行にとり、正方形の中心に原点をとる。流れは  $x_*$  軸方向の圧力勾配によって駆動される。この問題を長さスケール  $b_*$ 、時間スケール  $b_*^2/\nu_*$ 、速さスケール  $\nu_*/b_*$  を用いて無次元化する。下付の添字  $*$  は有次元量を表し、以後、添字なしは無次元量を表す。流速  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  と圧力  $P$  は、連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

と運動方程式、

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

によって決定される。ここで、 $\mathbf{F}$  は仮想的な体積力であり、ダクト断面における座標に依存する。すなわち、 $\mathbf{F} = (0, F_y(y, z), F_z(y, z))$  と表される。さらに、境界条件としてすべりなし境界条件を課す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad y = \pm 1 \quad \text{and} \quad z = \pm 1. \quad (3)$$

## 2.1 基本解

まず, 基本解として  $(u, v, w) = (U_B(y, z), V_B(y, z), W_B(y, z))$ ,  $P = P_B = -\chi x$  とおく. これらを (2) 式に代入することにより,

$$(V_B \partial_y + W_B \partial_z - \Delta_2) U_B = \chi, \quad (4)$$

$$(V_B \partial_y + W_B \partial_z - \Delta_2) V_B = F_y, \quad (5)$$

$$(V_B \partial_y + W_B \partial_z - \Delta_2) W_B = F_z \quad (6)$$

を得る. 仮想外力を加えない場合における基本解を  $U_{B0}$  とし (すなわち,  $U_{B0}$  はすべりなし境界条件のもとでの  $-\Delta_2 U_{B0} = \chi$  の解), 次のように Reynolds 数を定義する:

$$Re = U_{B0}(0, 0) = \frac{U_{B0*}(0, 0)b_*}{\nu_*}. \quad (7)$$

なお, Reynolds 数は圧力勾配に比例する ( $\chi = 3.3935 Re$ ).

$V_B$  と  $W_B$  は (4) 式とは独立に解くことができる. 連続の式 (1) より,

$$\partial_y V_B + \partial_z W_B = 0 \quad (8)$$

が得られるので, ダクト断面における基本解を表現する流れ関数を導入する:

$$V_B = \partial_z \varphi_B, \quad (9)$$

$$W_B = -\partial_y \varphi_B. \quad (10)$$

流れ関数  $\varphi_B$  を決定する方程式は,  $\partial_y(6) - \partial_z(5)$  によって次の形で得られる.

$$-(\partial_z \varphi_B \partial_y - \partial_y \varphi_B \partial_z - \Delta_2) \Delta_2 \varphi_B = \partial_y F_z - \partial_z F_y \equiv \Omega_x. \quad (11)$$

流れ関数  $\varphi_B$  によって表される, ダクト断面における任意の流れは, (11) によって定義される仮想的な外力  $\Omega_x$  を加えることによって引き起こされる. それゆえに, はじめに  $\varphi_B$  を与え, その後 (4) 式を解くことによって基本解を得る. 流れ関数  $\varphi_B$  は境界条件を考慮し, Dirichlet 条件と Neumann 条件を満たす関数を用いて展開される:

$$\varphi_B = \varepsilon \sum_{m=4}^M \sum_{n=4}^N \varphi_{Bmn} \phi_m(y) \phi_n(z). \quad (12)$$

ここで,  $\phi_m$  は  $m$  次の Chebyshev 多項式  $T_m$  を用いて次のように与えられる.

$$\begin{cases} \phi_{2m} = T_{2m} + (m^2 - 1)T_0 - m^2 T_2, \\ \phi_{2m+1} = T_{2m+1} + \frac{m^2 + m - 2}{2} T_1 - \frac{m^2 + m}{2} T_3, \end{cases} \quad (13)$$

その一例を以下に記す.

$$\phi_5(y) = 16y(1 - y^2)^2, \quad (14)$$

$$\phi_7(y) = 16y(1 + 4y^2)(1 - y^2)^2. \quad (15)$$

なお, 展開係数  $\varphi_{Bmn}$  は次のように規格化しておく.

$$\sum_{m=4}^M \sum_{n=4}^N |\varphi_{Bmn}| = 1. \quad (16)$$

また, (12) 式中のパラメータ  $\varepsilon$  を縦渦の強さと呼ぶことにする. 流れ関数の代表例と, その結果生じる基本解を Figure 1, 2 に示す. Figure 1, 2 によって表される仮想外力によって, それぞれ 4 つ渦と 8 つ渦の基本解が誘起される. なお, これらは流れ方向に依存しない二次元流である.

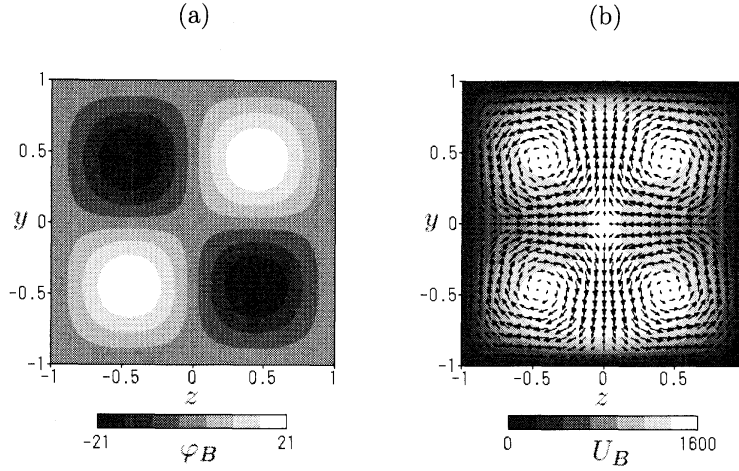


Figure 1: (a) The basic stream function  $\varphi_B = \varepsilon \phi_5(y) \phi_5(z)$  with  $\varepsilon = 1$  represented by the grey scale. (b) The laminar solution for  $Re = 3000$  with  $\varepsilon = 0.266$ . The grey scale shows the streamwise velocity  $U_B$ .

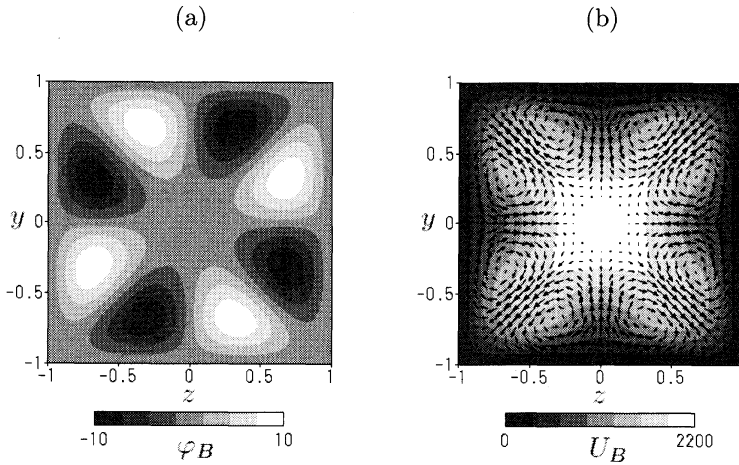


Figure 2: Same as figure 2. (a)  $\varphi_B = \varepsilon (\phi_5(y) \phi_7(z) - \phi_7(y) \phi_5(z)) / 2$  with  $\varepsilon = 1$ . (b) The laminar solution for  $Re = 3000$  with  $\varepsilon = 0.191$ .

## 2.2 線形安定性解析

本節では、前節に記した要領で人工的に作られた縦渦をもつ基本流の線形安定性解析の手法について述べる。まず、基本流  $U_B = (U_B, V_B, W_B)$ ,  $P_B$  に対し、擾乱  $\hat{u}$ ,  $\hat{p}$  を加える:

$$\mathbf{u} = U_B + \hat{\mathbf{u}}, \quad (17)$$

$$P = P_B + \hat{p}. \quad (18)$$

これらを支配方程式に代入することにより、擾乱は次の方程式に従うことがわかる。

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (19)$$

$$\partial_t \hat{\mathbf{u}} + (U_B \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) U_B + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} = -\nabla \hat{p} + \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}. \quad (20)$$

ここで,  $e_z \cdot \nabla \times (20)$  と  $e_y \cdot \nabla \times (20)$  の非線形項を無視することによって次を得る.

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_t + (U_B \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_y V_B \right] \partial_x - \partial_{yy}^2 U_B \Big] \hat{v} \\ & - \left[ \partial_t + (U_B \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_y V_B \right] \partial_y + \partial_y W_B \partial_z \Big] \hat{u} \\ & + \left( \partial_y U_B \partial_z - \partial_z U_B \partial_y - \partial_{yz}^2 U_B + \partial_z V_B \partial_x \right) \hat{w} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_t + (U_B \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_z W_B \right] \partial_x - \partial_{zz}^2 U_B \Big] \hat{w} \\ & - \left[ \partial_t + (U_B \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_z W_B \right] \partial_z + \partial_z V_B \partial_y \Big] \hat{u} \\ & + \left( \partial_z U_B \partial_y - \partial_y U_B \partial_z - \partial_{yz}^2 U_B + \partial_y W_B \partial_x \right) \hat{v} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

次に, (19) 式を  $\hat{u}$  について解く.

$$\hat{u} = -\partial_x^{-1} (\partial_y \hat{v} + \partial_z \hat{w}). \quad (23)$$

ここで,  $\partial_x^{-1}$  は  $x$  に関する積分を表す. (21), (22) 式中の  $V_B, W_B, \hat{u}$  は (9), (10), (23) 式によって消去する. ダクト断面における擾乱  $\hat{v}, \hat{w}$  を次のようにノーマルモードの形で展開する:

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \begin{pmatrix} v_1(y, z) \\ w_1(y, z) \end{pmatrix} \exp[i\alpha(x - ct)]. \quad (24)$$

ここで, 複素位相速度は  $c$  で表され, その虚部に波数  $\alpha$  を乗じたものが擾乱の成長率にあたる.  $v_1$  と  $w_1$  を境界条件を満たすような適当な関数で展開したのち, (24) 式を (21), (22) 式へと代入する. Galerkin 射影を施すことによって固有値を  $c$  とするような一般化固有値問題を得る.

### 2.3 非線形解析

線形安定性解析によって得られた臨界点から分岐する三次元解は次に示す手法によって得られる. まず, 擾乱  $\hat{u}, \hat{p}$  を平均部分と変動部分に分解する.

$$\hat{u}(x, y, z, t) = \bar{U}(y, z, t) + \tilde{u}(x, y, z, t), \quad (25)$$

$$\hat{p}(x, y, z, t) = \bar{P}(y, z, t) + \tilde{p}(x, y, z, t). \quad (26)$$

ここで, 圧力勾配一定条件により,  $\nabla \bar{P} = 0$  であることに注意せよ. 平均流  $\bar{U}$  は  $\bar{U} = (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) = \int_0^{2\pi/\alpha} \mathbf{u} \, dx$  によって与えられ, 平均流と外力を加えない場合の基本流の差を次のように定義しておく:  $\mathbf{U}' = (U', V', W') = \bar{\mathbf{U}} - U_{B0} \mathbf{e}_x$ . 続いて, (25), (26) 式を (19), (20) 式に代入することによって次を得る.

$$\partial_y V' + \partial_z W' + \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\mathbf{U}' + \tilde{\mathbf{u}}) + (\mathbf{U}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \\ = -\nabla \tilde{p} + \Delta_2 \mathbf{U}' + \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (28)$$

さらに,  $e_z \cdot \nabla \times (28)$ ,  $e_y \cdot \nabla \times (28)$  によって

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_t + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_y V' \right] \partial_x - \partial_{yy}^2 \bar{U} \Big] \tilde{v} \\ & - \left[ \partial_t + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_y V' \right] \partial_y + \partial_y W' \partial_z \Big] \tilde{u} \\ & + \left( \partial_y \bar{U} \partial_z - \partial_z \bar{U} \partial_y - \partial_{yz}^2 \bar{U} + \partial_z V' \partial_x \right) \tilde{w} \\ & - (\partial_t - \Delta_2) \partial_y U' - \partial_y (\mathbf{U}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}\} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \partial_t + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_z W' \right] \partial_x - \partial_{zz}^2 \bar{U} \Big] \tilde{w} \\ & - \left[ \partial_t + (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) - \nabla^2 + \partial_z W' \right] \partial_z + \partial_z V' \partial_y \Big] \tilde{u} \\ & + \left( \partial_z \bar{U} \partial_y - \partial_y \bar{U} \partial_z - \partial_{yz}^2 \bar{U} + \partial_y W' \partial_x \right) \tilde{v} \\ & - (\partial_t - \Delta_2) \partial_z U' - \partial_z (\mathbf{U}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{U}} - \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}\} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる。また (27) 式の流れ方向平均をとることによって次を得る。

$$\partial_y V' + \partial_z W' = 0. \quad (31)$$

ここで、ダクト断面における流れ関数  $\varphi'$  を導入する:

$$V' = \partial_z \varphi', \quad (32)$$

$$W' = -\partial_y \varphi'. \quad (33)$$

続いて,  $\mathbf{e}_x \cdot (28)$  and  $\mathbf{e}_x \cdot \nabla \times (28)$  の流れ方向平均をとって,

$$\partial_t U' + (\partial_z \varphi' \partial_y - \partial_y \varphi' \partial_z) \bar{U} - \Delta_2 U' + \partial_y \bar{u} \bar{v} + \partial_z \bar{u} \bar{w} = 0, \quad (34)$$

$$-(\partial_t + \partial_z \varphi' \partial_y - \partial_y \varphi' \partial_z - \Delta_2) \Delta_2 \varphi' + (\partial_{yy}^2 - \partial_{zz}^2) \bar{v} \bar{w} + \partial_{yz}^2 \overline{\tilde{w}^2 - \tilde{v}^2} = \Omega_x \quad (35)$$

を得る。ここで、オーバーラインは流れ方向平均を表す:  $\bar{\cdot} \equiv \alpha / (2\pi) \int_0^{2\pi/\alpha} \cdot dx$ 。さらに, (27) 式を (31) 式に代入し,  $\tilde{u}$  について解く:

$$\tilde{u} = -\partial_x^{-1} (\partial_y \tilde{v} + \partial_z \tilde{w}). \quad (36)$$

各変数に対する境界条件は,

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \partial_y \tilde{v} = U' = \varphi' = \partial_y \varphi' = \partial_z \varphi' = 0 \quad \text{at } y = \pm 1, \quad (37)$$

$$\tilde{v} = \tilde{w} = \partial_z \tilde{w} = U' = \varphi' = \partial_y \varphi' = \partial_z \varphi' = 0 \quad \text{at } z = \pm 1 \quad (38)$$

のようになる。ここで、非線形解の型として定常進行波解を仮定する。変動部分,  $\tilde{v}, \tilde{w}$ , は流れ方向に関する Fourier 級数によって次のように展開される:

$$\begin{pmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \sum_{\substack{l=-L \\ l \neq 0}}^L \begin{pmatrix} v_l(y, z) \\ w_l(y, z) \end{pmatrix} \exp[i l \alpha (x - ct)]. \quad (39)$$

全ての変数は、ダクト断面に関して関数  $\phi_m$  と  $\psi_n$  を用いて展開される。

$$\begin{pmatrix} v_l \\ w_l \\ U' \\ \varphi' \end{pmatrix} = \sum_{m=2}^M \sum_{n=2}^N \begin{pmatrix} v_{lmn} \phi_m(y) \psi_n(z) \\ w_{lmn} \psi_m(y) \phi_n(z) \\ U_{mn} \psi_m(y) \psi_n(z) \\ \varphi_{mn} \phi_m(y) \phi_n(z) \end{pmatrix}. \quad (40)$$

ここで,  $\psi_n$  は Dirichlet 条件を満たす関数で,  $n$  次の Chebyshev 多項式を用いて, 次式で与えられる。

$$\begin{cases} \psi_{2n} = T_{2n} - T_0, \\ \psi_{2n+1} = T_{2n+1} - T_1. \end{cases} \quad (41)$$

定常進行波の位相を決定するために,

$$\Im[v_{252}] = 0. \quad (42)$$

とおく。最後に,  $V', W', \tilde{u}$  を (32), (33), (36) 式を用いて消去したのち, (29), (30), (34), (35), (42) 式に Galrekin 射影を施すことにより, 二次の代数方程式を得る:

$$A_{ij} x_j + B_{ijk} x_j x_k = 0, \quad x_j = (v_{lmn}, w_{lmn}, U_{mn}, \varphi_{mn}, c)^T. \quad (43)$$

これを Newton-Raphson 法を用いて解く。Newton 反復の初期推定として, 臨界点における固有関数を用いる。解の非線形性 (あるいは三次元性) の尺度として擾乱の変動成分のエネルギーを次のように定義する。

$$E_{3D} = \frac{\alpha}{8\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^2}{2} dx dy dz. \quad (44)$$

また, もうひとつの非線形性の尺度としてバルク Reynolds 数を定義する:

$$Re_b = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \bar{U}(y, z) dy dz. \quad (45)$$

Table 1: Travelling wave solutions in square duct flow with their minimum values of the bulk Reynolds number and the Reynolds number.

| Solution       | $\min Re_b(Re, \alpha)$             | $\min Re(\alpha)$        |
|----------------|-------------------------------------|--------------------------|
| $\nu 1$ (WBN)  | 598 ( $Re = 1968, \alpha = 0.85$ )  | 1952 ( $\alpha = 0.87$ ) |
| $\mu 1$ (ONWB) | 332 ( $Re = 836, \alpha = 1.14$ )   | 828 ( $\alpha = 1.13$ )  |
| $\nu 2$ (UKP)  | 455 ( $Re = 1579, \alpha = 0.90$ )  | 1535 ( $\alpha = 0.88$ ) |
| $\sigma 2$     | 498 ( $Re = 1627, \alpha = 1.10$ )  | 1607 ( $\alpha = 1.08$ ) |
| $\sigma 4a$    | 1081 ( $Re = 4308, \alpha = 3.06$ ) | 4287 ( $\alpha = 3.11$ ) |
| $\sigma 4b$    | 1011 ( $Re = 2726, \alpha = 3.20$ ) | 2714 ( $\alpha = 3.12$ ) |
| $\mu 2$        | 903 ( $Re = 3285, \alpha = 2.35$ )  | 3138 ( $\alpha = 2.27$ ) |
| $\zeta 2$      | 624 ( $Re = 2313, \alpha = 1.20$ )  | 2179 ( $\alpha = 1.16$ ) |
| $\delta 2$     | 670 ( $Re = 2225, \alpha = 1.32$ )  | 2187 ( $\alpha = 1.21$ ) |

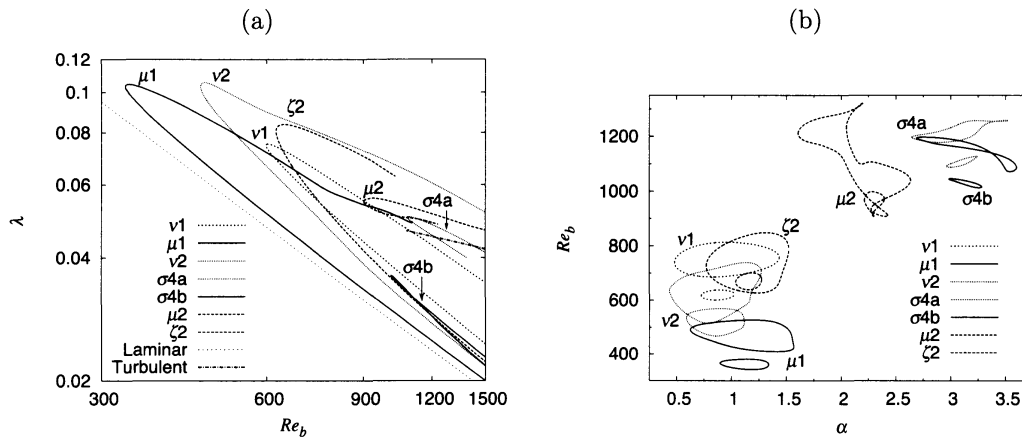


Figure 3: (a) The skin friction  $\lambda$  against the bulk Reynolds number for the travelling waves in square duct flow. The laminar state is represented by  $\lambda = 28.45/Re_b$ . The turbulent state obeys the empirical formula by Jones (1976):  $\lambda^{-1/2} = 2 \log_{10}(2.25 Re_b \lambda^{1/2}) - 0.8$ . (b) The existence domains of the travelling wave solutions. The Reynolds numbers of the solutions are 2000 and 2400 for  $\nu 1$ , 900 and 1200 for  $\mu 1$ , 1700 and 2000 for  $\nu 2$ , 4400 and 5000 for  $\sigma 4a$ , 2750 and 3000 for  $\sigma 4b$ , 3200 and 3400 for  $\mu 2$ , 2200 and 2400 for  $\zeta 2$ . The domains become larger as the Reynolds number increases.

## 2.4 結果

以上に述べた方法によって、9種類の定常進行波解を得ることに成功した。そのうちの3つは既に他の著者ら (Wedin *et al.* 2009; Uhlmann *et al.* 2010; Okino *et al.* 2010) によって報告されている解である。その他の6つの解は新たに発見された解である。ここでは、非線形解に空間的対称性を課している (symmetry I, II, III. Okino *et al.* 2010 の (3.2) 式を見よ.)。我々の得た全ての定常進行波解は、最小の Reynolds 数、バルク Reynolds 数と共に、Table 1 にまとめられている。Figure 3 (a) と (b) はそれぞれ解の管摩擦係数と存在領域を示す。管摩擦係数  $\lambda$  は  $\lambda = 4\chi/Re_b^2$  によって定義される。Figure 3 (a) では、バルク Reynolds 数を最小にするような波数をもつ解を選んでいく。Figure 3 (b) は、遷移領域 ( $Re_b \sim 1000$ ) よりもかなり小さい Reynolds 数にて現れる解は波数がおおよそ1のときに最小の Reynolds 数をとることを示している。以下では、対称性によって解を分類し、各々の解の特徴について簡単に述べる。詳細については Okino (2011) を参照せよ。

## 2.5 Symmetry I

Okino *et al.* (2010) 中の (3.2) 式で表される symmetry I を課した非線形解は次の空間的対称性をもつ。  $y$  軸に関する shift-and-reflect symmetry,

$$\mathbf{S} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ w \end{pmatrix} \left( \xi + \frac{\pi}{\alpha}, -y, z \right), \quad (46)$$

$z$  軸に関する mirror symmetry,

$$\mathbf{Z} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ -w \end{pmatrix} (\xi, y, -z). \quad (47)$$

対称性  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{Z}$  との組み合わせは shift-and-rotate symmetry を表す:

$$\mathbf{\Omega} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \end{pmatrix} \left( \xi + \frac{\pi}{\alpha}, -y, -z \right). \quad (48)$$

まず, 流れ関数を  $\varphi_B = \varepsilon \phi_5(y) \phi_5(z)$ ,  $\varphi_B = \varepsilon (\phi_5(y) \phi_7(z) - \phi_7(y) \phi_5(z))/2$  (Figure 1, 2 を見よ.) と選ぶことによって, それぞれ Wedin *et al.* (2009) と Okino *et al.* (2010) の解を再現することに成功した. Wedin *et al.* (2009) の解は円管内における解 N1 に, Okino *et al.* (2010) の解は M1 に対応すると考えられているため, それぞれ  $\nu_1, \mu_1$  と名付ける. 円管内流れにおける解の名称は Pringle *et al.* (2009) に従っている. Figure 4(a) は, 流れ関数を  $\varphi_B = \varepsilon \phi_5(y) \phi_5(z)$  と選んだときの擾乱の成長率を示す. パラメータは  $\alpha = 0.85$ ,  $Re = 2500$  であり, 横軸には縦渦の強さをとっている.  $\varepsilon \sim 0.285$  における黒丸は線形臨界点を表し, ここから解の分岐が起こる. Figure 4(b) は縦渦の強さに対する擾乱の変動成分のエネルギーを示し, 解の分岐の様子を表している. 非線形解は  $\varepsilon = 0.285$  (図中の黒丸) の線形臨界点から亜臨界的に分岐し,  $\varepsilon = 0$  の直線と交差している. 白丸で表される交点は, 何ら外力を加えない場合における Navier-Stokes 方程式の解に相当する. 分岐線は  $\varepsilon = -0.275$  において転回し, 再び  $\varepsilon = 0$  の直線と交差する. このようにして求められた二つの非線形解が  $\nu_1$  の lower branch と upper branch である.

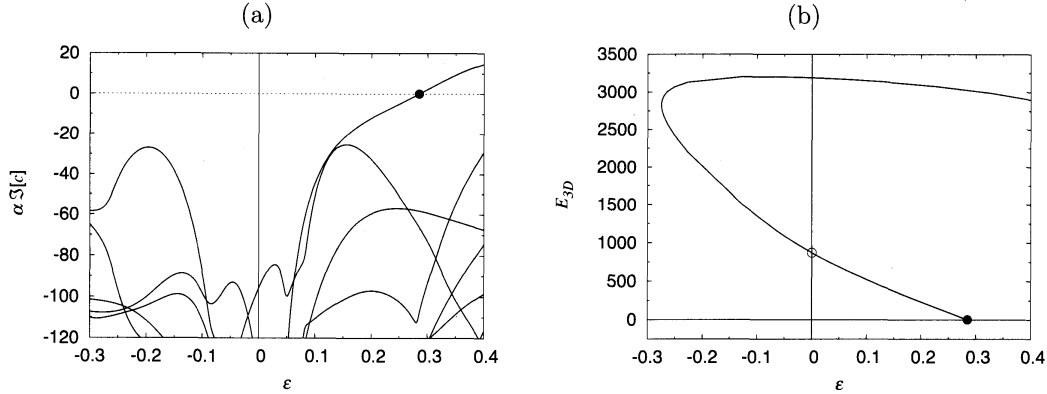


Figure 4: (a) The growth rate of the perturbations,  $\alpha \Im[c]$ , with  $\alpha = 0.85$  at  $Re = 2500$ . (b) The bifurcation diagram of the solution  $\nu_1$  with  $\alpha = 0.85$  at  $Re = 2500$ . The bifurcation point is indicated by the closed circle.

## 2.6 Symmetry II

Okino *et al.* (2010) 中の (3.2) 式で表される symmetry II を課した非線形解は次の空間的対称性をもつ。  $y$  軸に関する shift-and-reflect symmetry,

$$\mathbf{S} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ w \end{pmatrix} \left( \xi + \frac{\pi}{\alpha}, -y, z \right),$$

断面における  $180^\circ$  の rotate symmetry,

$$\mathbf{R}_2 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \end{pmatrix} (\xi, -y, -z). \quad (49)$$

対称性  $\mathbf{S}$  と  $\mathbf{R}_2$  の組み合わせは  $z$  軸に関する shift-and-reflect symmetry を表す:

$$\mathbf{S}' : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ -w \end{pmatrix} \left( \xi + \frac{\pi}{\alpha}, y, -z \right). \quad (50)$$

### 2.6.1 $\nu 2$

流れ関数を  $\varphi_B = \varepsilon(\phi_5(y)\phi_7(z) - \phi_7(y)\phi_5(z))/2$  と選ぶことによって Uhlmann *et al.* (2010) の解を再現することに成功した。円管内流れにおける解 N2 との対応から、以後この解を  $\nu 2$  と呼ぶ。解ベクトルの係数を吟味することにより、解  $\nu 2$  は対角線に関する対称性をもつことがわかった: diagonal symmetry,

$$\mathbf{D} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \end{pmatrix} (\xi, z, y). \quad (51)$$

### 2.6.2 $\sigma 2$

円管内流れにおける非線形解 S2 に対応する解を得た。ここではこれを  $\sigma 2$  と名付ける。  $\nu 2$  の対称性  $\mathbf{D}$  を破る pitchfork 分岐によって  $\sigma 2$  は現れる。  $\sigma 2$  の平均流は 4 つ渦のパターンを示し (Figure 5 の左上図), これは Uhlmann *et al.* (2007) による遷移領域における DNS の結果と非常によく似たパターンである。

### 2.6.3 $\sigma 4$

円管内流れにおける解 S4 に対応する 2 種類の解が得られた。これらを  $\sigma 4a$  と  $\sigma 4b$  と呼ぶ。非線形解  $\sigma 4a$  と  $\sigma 4b$  は  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{S}'$ ,  $\mathbf{R}_2$  に加えて,  $90^\circ$  の rotate symmetry を有する。

$$\mathbf{R}_4 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ w \\ -v \end{pmatrix} (\xi, -z, y). \quad (52)$$

$\sigma 4a$ ,  $4b$  の平均流は対角線に関して対称な 16 個渦のパターンをもつ (Figure 6, 7 の左上図)。それぞれの象限において、壁近傍に 2 つの大きい渦とダクトの中心付近に 2 つの小さい渦が見られる。二つの解の違いは  $\sigma 4a$  はダクトの角に向かう流れをもつのに対し、 $\sigma 4b$  は逆向きの流れをもつことである。両者の瞬時場の様子もよく似ており、 $\sigma 4a$  を  $45^\circ$  回転させれば、本質的に  $\sigma 4b$  と同じ動きである。

### 2.6.4 $\mu 2$

円管内流れの解 M2 に相当する解を  $\mu 2$  と名付けた。Figure 8 は  $\mu 2$  の流れ場を示す。  $\mu 2$  の平均流は 16 個渦パターンであり、 $\sigma 4a$  の平均流と非常によく似ている。しかしながら、 $\mu 2$  は対角線に関する対称性  $\mathbf{D}$  をもつため、その瞬時場は  $\sigma 4a$  とは異なる。



## 2.7 Symmetry III

Okino *et al.* (2010) 中の (3.2) 式で表される symmetry III を課した非線形解は次の空間的対称性をもつ。  $z$  軸に関する mirror symmetry,

$$\mathbf{Z} : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \\ -w \end{pmatrix} (\xi, y, -z),$$

$y$  軸に関する mirror symmetry,

$$\mathbf{Z}' : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ w \end{pmatrix} (\xi, -y, z). \quad (53)$$

対称性  $\mathbf{Z}$  と  $\mathbf{Z}'$  との組み合わせは rotate symmetry を表す:

$$\mathbf{R}_2 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \end{pmatrix} (\xi, -y, -z).$$

### 2.7.1 $\zeta 2$

円管内流れにおける非線形解  $\mathbf{Z}2$  と類似の流れ場をもつ解を  $\zeta 2$  と呼ぶことにする。解  $\zeta 2$  は  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}'$ ,  $\mathbf{R}_2$  以外にも次に定義される対称性  $\Omega_2$  をもつ:

$$\Omega_2 : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (\xi, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ w \\ -v \end{pmatrix} \left( \xi + \frac{\pi}{\alpha}, -z, y \right). \quad (54)$$

対称性  $\Omega_2$  は流れ方向への半波長シフトとダクト断面における  $90^\circ$  の回転を表す。  $\zeta 2$  の平均流は対角線に関して対称な 8 つ渦構造をもつが、流れはダクトの角から中心部へと向かう (Figure 9 を見よ)。正方形ダクト内流れにおける解  $\zeta 2$  と円管内流れにおける解  $\mathbf{Z}2$  の流れ場はよく似ているものの、  $\zeta 2$  は乱流遷移域よりもはるかに低い Reynolds 数にて現れるという点で、  $\mathbf{Z}2$  とは異なっている。

### 2.7.2 $\delta 2$

$\zeta 2$  より対称性  $\Omega_2$  を破ることにより出現する解が得られた。これを  $\delta 2$  と名付け、その流れ場の様子を Figure 10 に示す。

## 3 結論

Waleffe (1998, 2003) と同様の手法を用いて、正方形ダクト内流れにおける非線形解を数多く求めることに成功した。解  $\nu 1$ ,  $\mu 1$ ,  $\nu 2$ ,  $\sigma 2$ ,  $\zeta 2$ ,  $\delta 2$  は遷移領域,  $Re_b \sim 1000$  よりもずっと小さい Reynolds 数にて出現し、それらの管摩擦係数は十分に発達した乱流状態よりも大きい値をとることが分かった (Table 1 や Figure 3a を見よ)。これらの解が最小の Reynolds 数をとるとき、波数の値がほぼ 1 であるということは興味深い結果である (Table 1 や Figure 3 を参照)。さらに我々は遷移領域にて現れる解  $\sigma 4a$ ,  $\sigma 4b$ ,  $\mu 2$  を得た。これらの解は他の解に比べ、幾分大きい波数領域にて出現し、流れ場の様子も複雑である。Table 2 に示されるように、ほとんどの解は円管内流れの解 (例えば, Pringle *et al.* 2009 を見よ) との対応付けがなされる。(円管内流れの解の動画は <http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/367/1888/457/suppl/DC1> にて見ることができる。) 正方形ダクト内流れの解と円管内流れの解との類似性は、断面形状の異なる二種類の流れが共通の機構を通じて乱流へと遷移することを示唆している。

Table 2: The symmetries of the travelling wave solutions in square duct flow and their counterpart in pipe flow. The nomenclature of the solutions in pipe flow is based on Pringle *et al.* (2009).

| Solution       | Symmetry | Transformation                                         | Solution in pipe flow |
|----------------|----------|--------------------------------------------------------|-----------------------|
| $\nu 1$ (WBN)  | I        | $\mathbf{S}, \mathbf{Z}, \Omega$                       | N1                    |
| $\mu 1$ (ONWB) | I        | $\mathbf{S}, \mathbf{Z}, \Omega$                       | M1                    |
| $\nu 2$ (UKP)  | II       | $\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}' + \mathbf{D}$   | N2                    |
| $\sigma 2$     | II       | $\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}'$                | S2                    |
| $\sigma 4a$    | II       | $\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}' + \mathbf{R}_4$ | S4                    |
| $\sigma 4b$    | II       | $\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}' + \mathbf{R}_4$ | S4                    |
| $\mu 2$        | II       | $\mathbf{S}, \mathbf{R}_2, \mathbf{S}' + \mathbf{D}$   | M2                    |
| $\zeta 2$      | III      | $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}', \mathbf{R}_2 + \Omega_2$     | unknown               |
| $\delta 2$     | III      | $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}', \mathbf{R}_2$                | unknown               |

## References

- BARNES, D. B. & KERSWELL, R. R. 2000 New result in rotating Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **417**, 103-126.
- JONES, O. C. 1976 An improvement in the calculation of turbulent friction in rectangular ducts. *ASME J. Fluids Engng* **98**, 173-181.
- OKINO, S., NAGATA, M., WEDIN, H. & BOTTARO, A. 2010 A new nonlinear vortex state in square-duct flow. *J. Fluid Mech.* **657**, 413-429.
- OKINO, S. 2011 Nonlinear travelling wave solutions in square duct flow. PhD Thesis, Kyoto University.
- PRINGLE, C. C. T., DUGUET, Y. & KERSWELL, R. R. 2009 Highly symmetric travelling waves in pipe flow. *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**, 457-472.
- UHLMANN, M., PINELLI, A., KAWAHARA, G. & SEKIMOTO, A. 2007 Marginally turbulent flow in a square duct. *J. Fluid Mech.* **588**, 153-162.
- UHLMANN, M., KAWAHARA, G. & PINELLI, A. 2010 Travelling-waves consistent with turbulence-driven secondary flow in a square duct. *Phys. Fluids* **22**, 084102.
- WALEFFE, F. 1998 Three-dimensional coherent states in plane shear flows. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4140-4143.
- WALEFFE, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. Fluids* **15**, 1517-1534.
- WEDIN, H., BOTTARO, A. & NAGATA, M. 2009 Three-dimensional traveling waves in a square duct. *Phys. Rev. E* **79**, 065305.

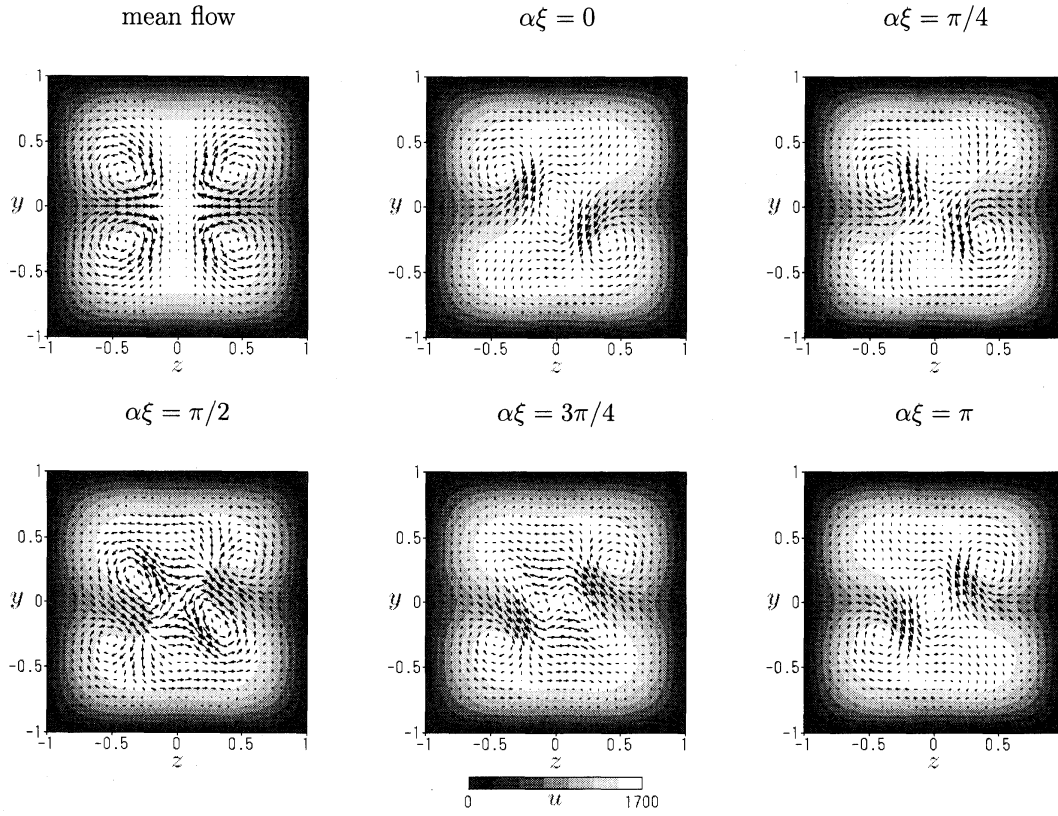


Figure 5: Mean flow  $\bar{U}$  (top-left) and images of the total flows  $u$  along  $\xi$  of  $\sigma_2$  with  $\alpha = 2.0$  at  $Re_i = 2750$  ( $Re_b = 1053$ ).

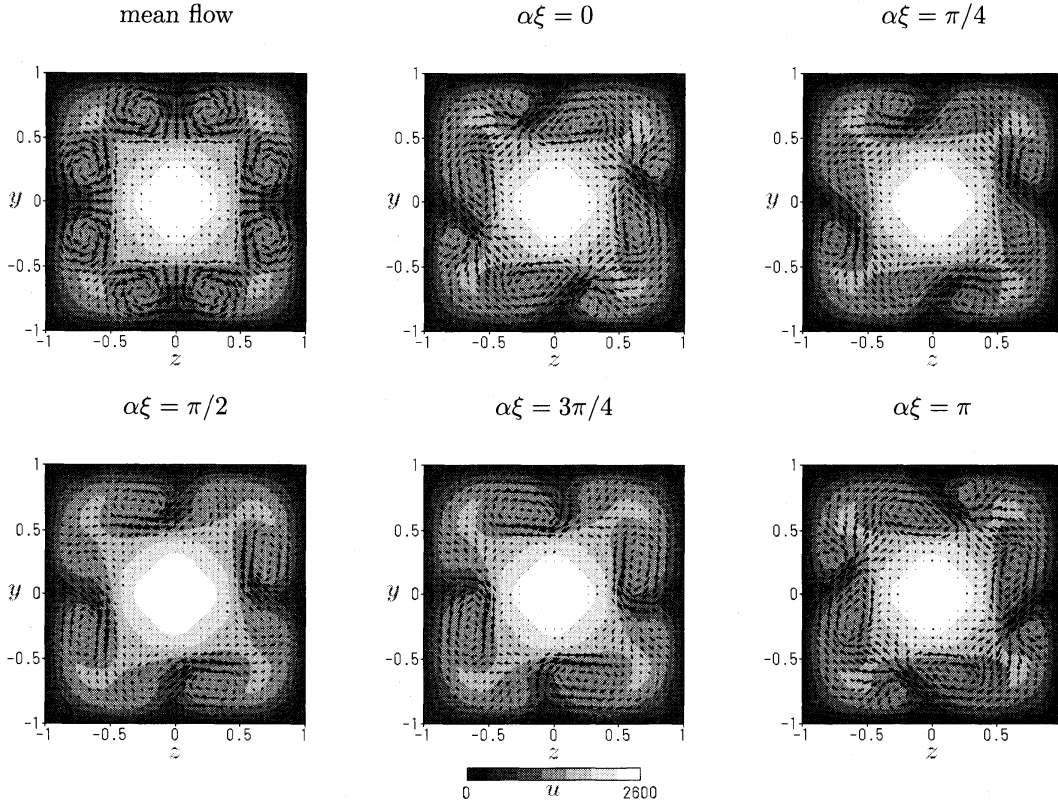


Figure 6: Same as figure 5 for  $\sigma_{4a}$  with  $\alpha = 3.2$  at  $Re = 5000$  ( $Re_b = 1262$ ).

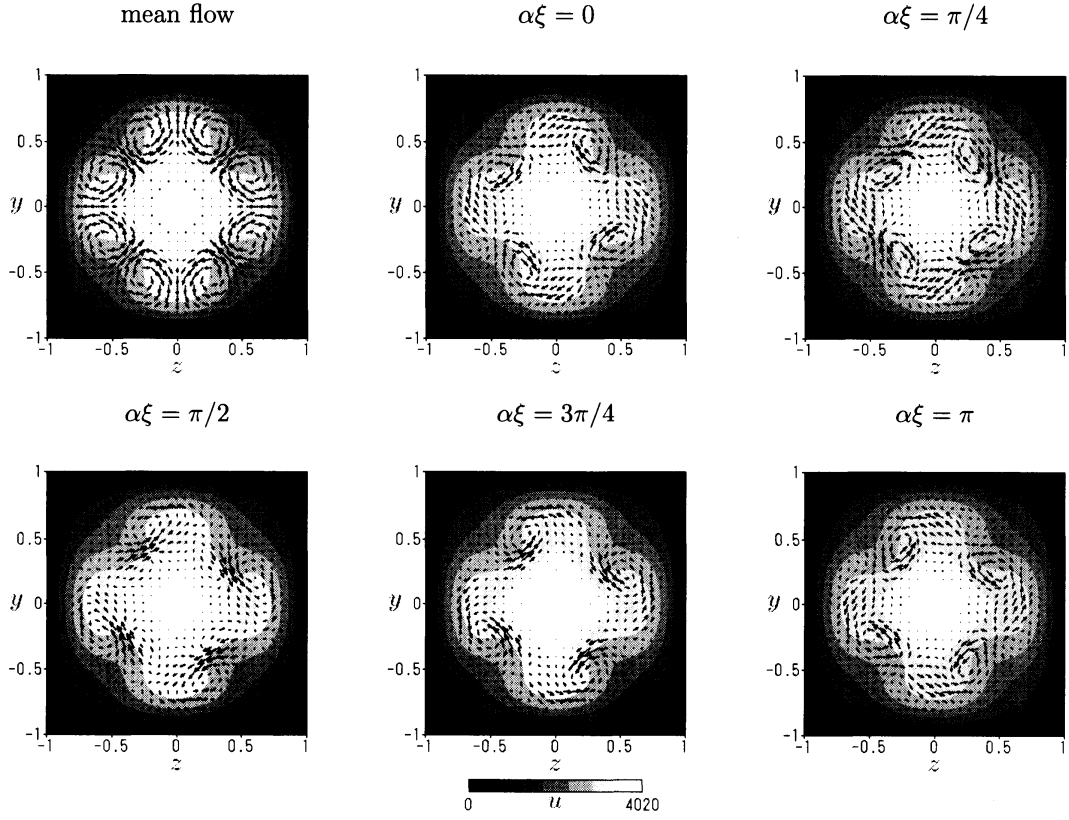


Figure 7: Same as figure 5 for  $\sigma 4b$  with  $\alpha = 3.2$  at  $Re = 5000$  ( $Re_b = 2025$ ).

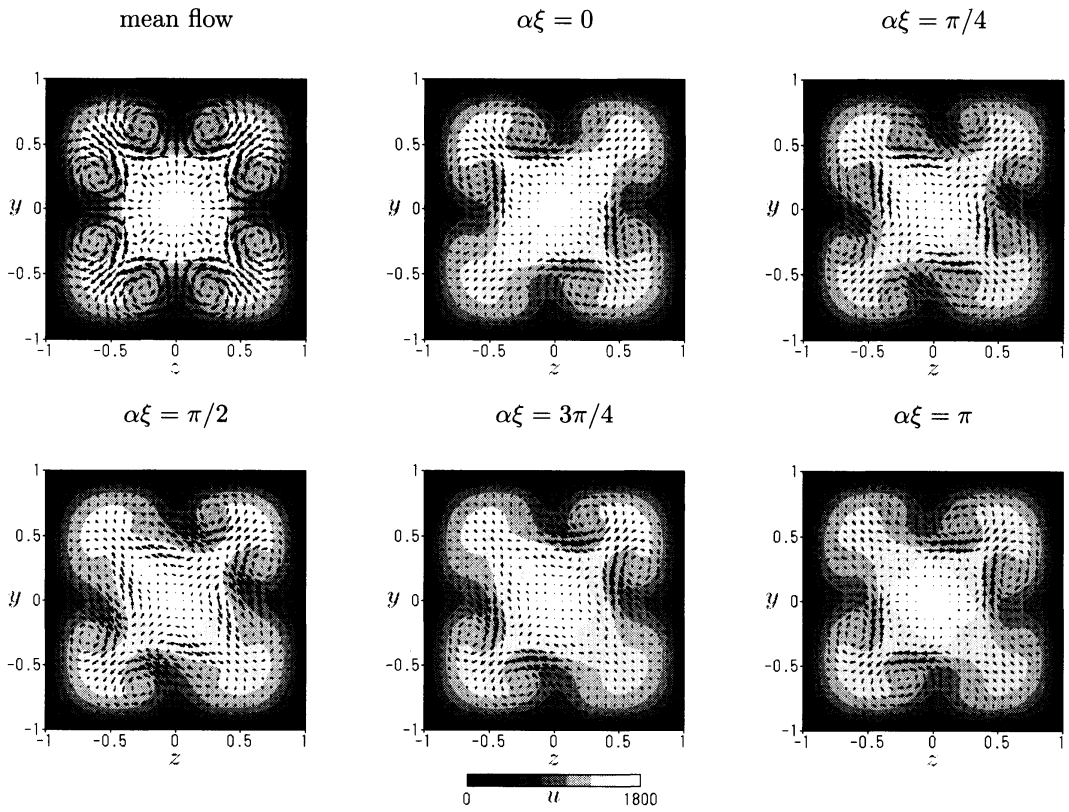


Figure 8: Same as figure 5 for  $\mu 2$  with  $\alpha = 2.5$  at  $Re = 3300$  ( $Re_b = 989$ ).

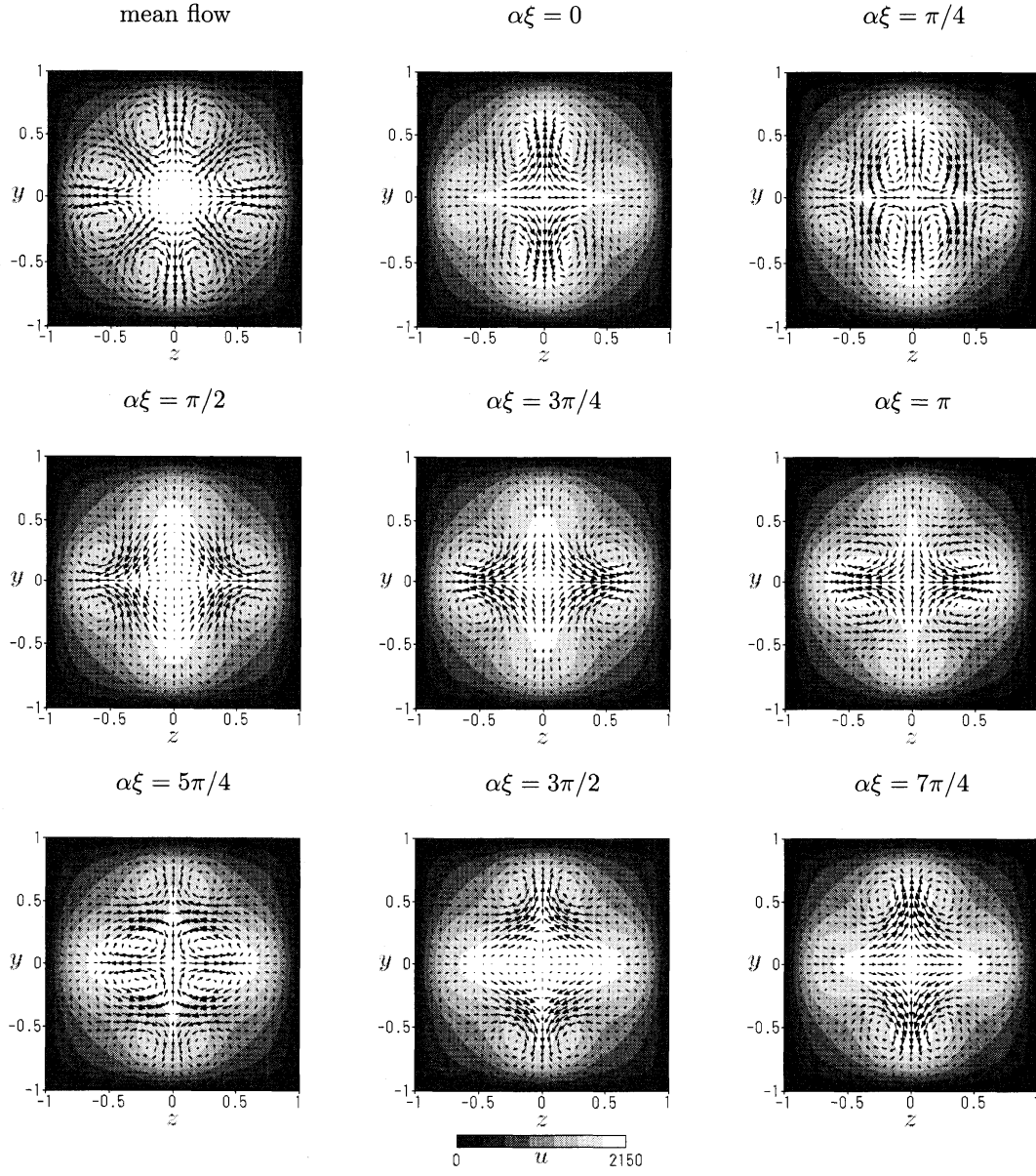


Figure 9: Same as figure 5 for  $\zeta_2$  with  $\alpha = 1.0$  at  $Re = 3000$  ( $Re_b = 1151$ ).

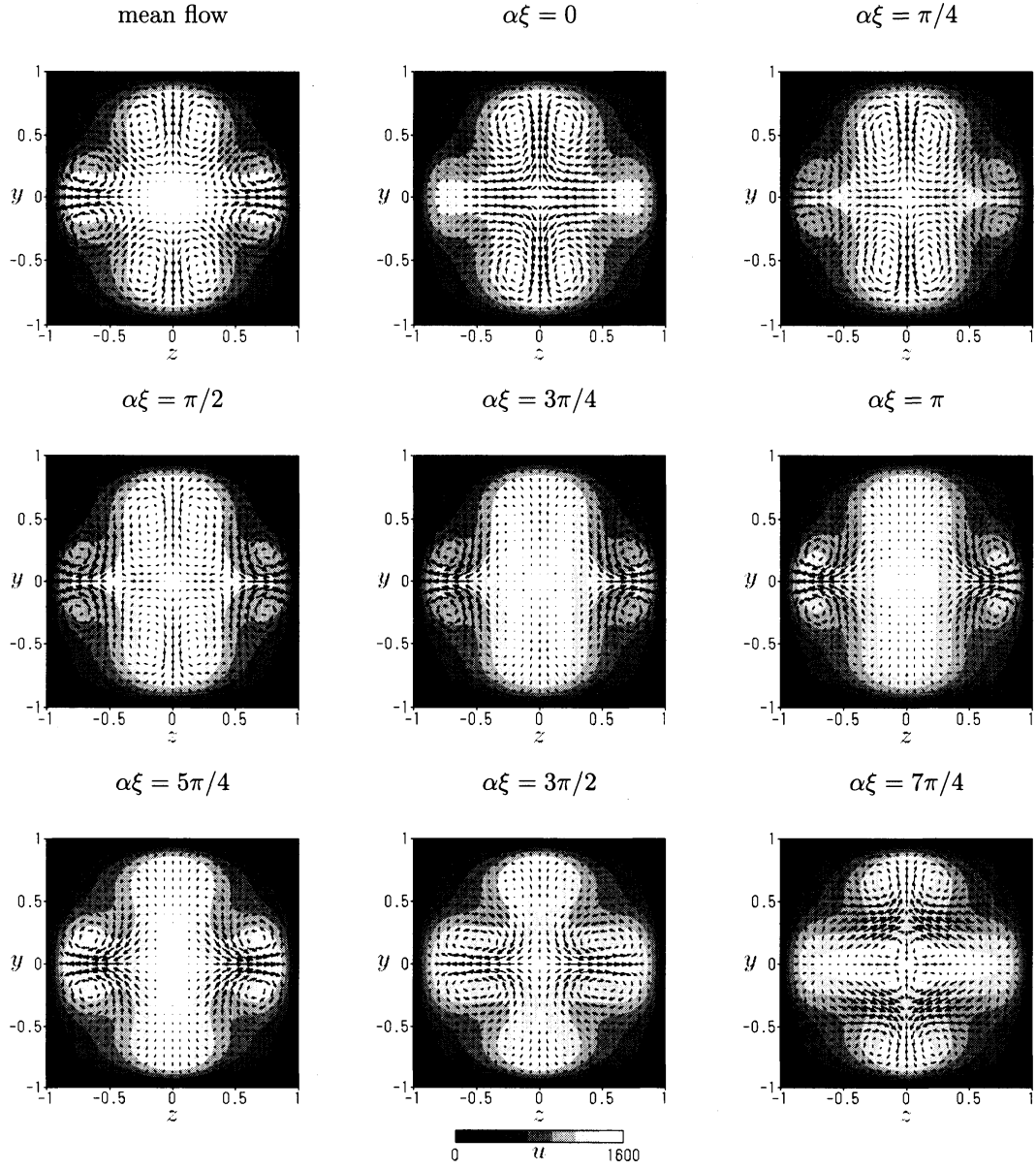


Figure 10: Same as figure 5 for  $\delta 2$  with  $\alpha = 1.0$  at  $Re = 3000$  ( $Re_b = 894$ ).