

周期倍分岐列の上の平均値に関する一性質

徳島大学医療短大 吉永 哲哉 (Tetsuya Yoshinaga)

徳島大学工学部 川上 博 (Hiroshi Kawakami)

あらまし 非線形力学系において一般的に生じる分岐現象として倍周期連鎖が知られている。この現象は1次元写像の繰り込みによって説明される。

本報告では、周期倍分岐列の上における、ある連続関数の平均値の繰り込みを予想している。また、この性質に起因して、平均値のグラフ、分岐図等に樹状のパターンがみられることを示している。

1. まえがき

力学系のパラメータを変化させたとき、ある周期解の安定性が変化し、2倍の周期の周期解が発生することがある。これは周期倍分岐と呼ばれ、連続系、離散系を問わず、非線形力学系に一般的に生じる現象として知られている。また、周期倍分岐が連鎖的に生じることが多くの系で観察されており、カオスへ至るルートとして最も基本的な現象である。この周期倍分岐の連鎖が生じる原因の本質が力学系を記述する写像の繰り込みにあることを、ファイゲンバウム^{(1), (2)}は区間力学系(1次元写像)に対して説明している。

1次元写像が繰り込みを起こすとき、これを含むある種の関数列に対しても繰り込みの性質がみられるのではないかという予想を出発点として、この結果生じる現象について考察する。本報告の構成は次の通りである。2節では、1次元写像に関する関数列の繰り込みの予想と、結果的に発生する現象について述べる。この現象の微分方程式系への応用例を3節に示

す。

2. 1次元写像に関する繰り込み

この節では、まず、連続関数の自由度を持つ逐次関数列を定義し、これが繰り込まれていると考えられる2つの例を示す。次に、この性質に基づいた現象を考察する。

パラメータ λ を含む1次元写像

$$f_\lambda : I \rightarrow I, \quad I = [-1, 1] \quad (1)$$

を考える。パラメータ変化により、 f_λ には周期倍分岐の連鎖が生じるとする。この f_λ に対し、次の逐次関数列を定義する。

$$\tau_{\lambda^2}^{k+1}(x) = \frac{1}{2} [\tau_{\lambda^2}^k(x) + \tau_{\lambda^2}^k(f_{\lambda^2}^k(x))], \quad x \in I, k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

ただし、 $f_{\lambda^k}(x)$ は f_λ の k 回の繰返し写像を表す。また、 $\tau_{\lambda^1}(x)$ は連続関数とする。

ここで、以下に用いる記号を定義しておく。まず、 $f_{\lambda^2}^m$ に周期倍分岐が生じる λ の値を λ_m と書く。また、そのときの p_m を $\bar{p}_m$ で表す。さらに、記述の簡素化のために $\Psi_m = \tau_{\lambda_m^2}^{m+1}$ とする。

2.1 繰り込み

式(2)に繰り込みの性質がみられる2例を示す。具体的に f_λ が

$$f_\lambda(x) = \lambda(1 - 2x^2) \quad (3)$$

で、 τ_{λ^1} が次の式(4), (5)のいずれかで与えられる2つの場合を考える。

$$\tau_{\lambda^1}(x) = x \quad (4)$$

$$\tau_{\lambda^1}(x) = |x| \quad (5)$$

(a) 例1: $\tau_{\lambda^1}(x) = x$

関数 $\Psi_m(x)$ ($m=1,2,3$) のグラフを図1にあげた。それぞれの関数が $x=0$ の近くで繰り込み則

$$\Psi_{m-1}(x) = \beta_m \cdot \Psi_m(x/\alpha_m) + \gamma_m \quad (6)$$

に従うと考え、 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ を同定した結果が表1である。各パラメータは次により計算した。ただし、繰り込みは $x=0$ の近くで考えているため、 $\bar{p}_k (k=0,1,\dots)$ としては 0 に最も近いものを選んでゐる。

$$\alpha_m = \bar{p}_{m-1} / \bar{p}_m$$

$$\beta_m = \frac{\Psi_{m-1}(\bar{p}_{m-1}) - \Psi_{m-1}(0)}{\Psi_m(\bar{p}_m) - \Psi_m(0)}$$

$$\gamma_m = \Psi_{m-1}(0) - \beta_m \Psi_m(0)$$

なお、 α_m は Feigenbaum の scaling parameter⁽¹⁾ に等しい。表1より

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = -2.50 \\ \eta &= \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m / \alpha_m = 2.00 \end{aligned} \quad (7)$$

であることが推定される。

もし、式(6)および式(7)の仮定が正しければ、十分大きな m に対して

$$\alpha \Psi_{m-1}''(\bar{p}_{m-1}) = \eta \Psi_m''(\bar{p}_m) \quad (8)$$

が成立する。この関係は後で用いられる。

[コメント] 式(2)より、

$$\tau_{\lambda^2}^m(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \tau_{\lambda^1}(f_{\lambda^k}(x)), \quad x \in I$$

が成り立つ。したがって、 $\tau_{\lambda^1}(x) = x$ のとき、

$$(\tau_{\lambda^2}^m)'(0) = \frac{1}{2^m} (\tau_{\lambda^1})'(0) = \frac{1}{2^m}$$

$$\therefore \Psi_{m-1}'(0) = 2 \Psi_m'(0)$$

となつて、 $\eta=2.00$ の推定結果が妥当であることがわかる。 $\square$

(b) 例2: $\tau_\lambda(x) = |x|$

図2は関数列 $\Psi_m(m=1,2,3)$ のグラフである。上の(a)と同様に、繰り込み則として

$$\Psi_{m-1}(x) = \tilde{\beta}_m \cdot \Psi_m(x/\alpha_m) + \tilde{\gamma}_m \quad (9)$$

を仮定する。パラメータの同定結果を表2に示す。これより

$$\tilde{\eta} = \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{\beta}_m / \alpha_m = -2.00 \quad (10)$$

が推定される。

2.2 樹状パターン

連続関数 τ_λ^1 の時間平均は一般に次式で定義される。

$$\varphi_\lambda(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tau_\lambda^1(f_\lambda^k(x)), \quad x \in I \quad (11)$$

初期値 x を周期点に限定したとき、周期倍分岐過程では

$$\varphi_\lambda(p_m) = \tau_\lambda^{2^k}(p_m), \quad k \geq m \quad (12)$$

が成立する。

[コメント] 式(11)で、

$$\tau_\lambda(x) = \ln |f_\lambda'(x)|$$

のとき、 φ_λ は離散系に対するリアプノフ指数の定義を与える。 $\square$

ここで、再び具体例で考える。図3,4はそれぞれ、 $\tau_\lambda^1(x)$ が x および $|x|$ のときのパラメータ λ に対する $\varphi_\lambda(p_m)$ のグラフである。図では $m=1, 2, 3$ の場合しか示していないが、数値的に $m=8$ まで次のような規則的パターンが確認されている。すなわち、それぞれの $\varphi_\lambda(p_m)$ のグラフを木の枝とみて枝の先端に(λ の増加する向きに)向かってたどっていったとき、図3の場

合、左右交互に分かれて、一方、図4の場合には片側のみから分枝して伸びている。ここでは、前者を交互樹状パターン、後者を片側樹状パターンと呼ぶ。

2.1節で述べた Ψ_m の繰り込みが事実であれば、樹状パターンは必然的に生じる現象であることを示したのが次の命題である。

〔命題〕 写像 $f_{\lambda^2}^m$ にはパラメータ λ_m および周期点 $\bar{p}_m$ において周期倍分岐が生じるとする。さらに、次の条件を仮定する：

$$(1) (f_{\lambda_m^2}^{m+1})'''(\bar{p}_m) \neq 0$$

$$(2) \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} (f_{\lambda^2}^{m+1})'(\bar{p}_m) \right|_{\lambda=\lambda_m} \neq 0, \quad m = 0, 1, \dots$$

このとき、 $\varphi_{\lambda}(p_m)$ のグラフが交互（片側）樹状パターンを形成するための必要十分条件は、

$$\Psi_{m-1}''(\bar{p}_{m-1}) \cdot \Psi_m''(\bar{p}_m) < 0 \quad (> 0), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

を満たすことである。

証明は付録に示してある。

$\tau_{\lambda^1}(x) = x$ のとき、式(8)において $\alpha \eta < 0$ であるから交互樹状パターン

を形成する。 $\tau_{\lambda^1}(x) = |x|$ のときには、式(10)および $\alpha \tilde{\eta} > 0$ の関係より、片側樹状パターンとなることがわかる。

ところで、図5は $\tau_{\lambda^1}(x) = x^2$ の、図6は $\tau_{\lambda^1}(x) = x^3$ のときの平均値 $\varphi_{\lambda}(p_m)$ のグラフである。交互樹状パターンになっている。これらの例から、広いクラスの τ_{λ^1} に対して交互樹状パターンが生じるのではないかと予想される。

3. 微分方程式系にみられる樹状パターン

この節では、微分方程式で表される系（自律系および非自律系）に生じる樹状パターンの例を示す。

図7に示した電気回路^{(3), (4)}を考える。電圧制御型抵抗 G の特性は

$$i_g = g(v) = -v + v^3/3$$

で与えられ、電流源 $j(t)$ は

$$j(t) = J \cos(\nu t)$$

と仮定する。図中の記号を用いて、回路方程式は次式となる。

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = E_1 - R_1 i_1 - v, \quad (13-a)$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = E_2 - R_2 i_2 - v, \quad (13-b)$$

$$C \frac{dv}{dt} = i_1 + i_2 + v - v^3/3 + J \cos(\nu t) \quad (13-c)$$

以下では、パラメータの値を

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = 0.5, \quad E_1 = 0.2, \\ 1/L_1 = 0.4, \quad 1/L_2 = 0.1, \quad 1/C = 3 \end{aligned} \quad (14)$$

に固定する。このとき、 $E_2 = 1.27$, $J = 0$ とした自律系(13)において、1周期リミットサイクルが観察される。さらに、 $J = 0$ として、パラメータの1つ E_2 の値を 1.27 から連続的に増加させたとき、リミットサイクルに周期倍分岐の連鎖が生じ、1.291 ではカオスの振動がみられる。

3.1 自律系の平均帰還時間

自由振動系、すなわち、式(13)で $J = 0$ とした自律系を考える。ポアンカレ横断面は次の集合で表される半平面 Π に選ぶ。

$$\Pi = \{(i_1, i_2, v) : v = v_0, i_1 + i_2 > i_{10} + i_{20}\}$$

ここに、 (i_{10}, i_{20}, v_0) は式(13)の平衡点である。ポアンカレ写像 T_1 を式(13)の解による Π から Π へのリターンマップで定義する。図8は振動がカオス的になった状態 ($E_2 = 1.2911$) でのポアンカレ写像 T_1 による位相面図である。図より、写像は1次元的であり、例えば i_1 軸への射影のみでポアンカレ写像を近似することが可能であることがわかる。アトラクタを i_1 に射影することにより、1次元写像 f_1 が得られる (図9)。

さて、ポアンカレ横断面上を出発した解が再び横断面を横切るまでに経

過する時間を“帰還時間”と呼ぶ。また、軌道が周期的な場合、軌道上のある点を出発した解が自分自身に帰るまでの帰還時間の平均を“平均帰還時間”と呼ぶことにする。

帰還時間を出発点に関する関数とみなし、これを式(11)の τ_1 とする。実際、 i_1 に対して帰還時間をプロットした図10をみればわかるように、滑らかな曲線上に存在している。このとき平均帰還時間は φ_1 に対応する。

図11(a)は E_2 に対する平均帰還時間のグラフである。また、3周期解から周期倍分岐の連鎖が起こるパラメータ範囲での平均帰還時間のグラフを図11(b)に示す。樹状パターンとなっている。

樹状パターンがみられる他の系の例として、図12(a),(b)をあげる。系の方程式はそれぞれ次式で与えられる。

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + 0.3y \\ \dot{z} &= 2 + xz - cz \end{aligned}$$

$$(b)^{(5)} \quad \begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= a(y - y^2) - 0.2z \end{aligned}$$

3.2 非自律系の分岐図

式(13)で、 $J \neq 0$ の場合を考える。この3次元非自律系のポアンカレ写像 T_2 を解軌道の $2\pi/\nu$ 毎のサンプリングで定義する。

いま、パラメータを式(14)および $E_2 = 1.29$ とする。このとき、図11(a)をみればわかるように、 $J = 0$ での自由系には1周期リミットサイクルが存在する。 $J \neq 0$ としたとき、そのリミットサイクルはある周波数範囲に含まれる ν をもつ外力に引き込まれる。引き込み現象は T_2 の不動点として観察される。図13は不動点とその周期倍分岐の連鎖によって発生した 2^m 周期点の分岐図である。この図で G と I はそれぞれ、接線分岐と周期倍分岐パラメータの集合を表している。また、上付きの数字は周期の次数を示している。接線分岐集合 G^{2^m} ($m = 0, 1, \dots, 3$) すなわち実線の上に注目

すると、交互樹状パターンを形成していることがわかる。このパターンは図11 (a)のパターンに対応して生じたものである。

3.3 リアプノフ指数

周期倍分岐過程において、非零最大リアプノフ指数をパラメータに対してプロットした図は片側樹状パターンを形づくる。一例として、図14を挙げる。系は式(13)において $J = 0$ とした自律系のポアンカレ写像で、パラメータは E_2 である。この図で、例えば $E_2 \in [1.29, 1.291)$ の範囲で片側樹状パターンとなっている。この現象はリアプノフ指数の定義からは自明なことであるが、樹状パターンの観点でみれば興味深い。1次元写像の例でみたように、片側樹状パターンの形成には絶対値関数が本質的であると思われる。

4. むすび

本報告の記述をまとめると次のようになる。

- (1) 1次元写像の周期倍分岐過程で、平均値を表す関数列が繰り込まれていると予想される2つの数値例を示した。
- (2) この性質により、平均値のグラフにみられる樹状パターンが説明できることを示した。
- (3) 連続時間系に生じる樹状パターンの例として、平均帰還時間、分岐図、およびリアプノフ指数のグラフをあげた。

周期倍分岐の連鎖は非線形力学系において基本的な現象であり、その上で定義されたある種の物理量が普遍的性質を持つことは意味深い。系の平均エネルギー、平均パワー等についての検討は今度の課題である。また、樹状パターン形成の原因である繰り込み現象の理論的な考察も課題として残されている。

文 献

- (1) M.J.Feigenbaum: "Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations", J.Stat.Phys. 19, pp.25-52(1978).
- (2) M.J.Feigenbaum: "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", J.Stat.Phys. 21, pp.669-706(1979).
- (3) 吉永, 川上, 吉川: "水・油界面に生じる化学的非線形振動の回路モデル", 電子情報通信学会論文誌A, Vol.J71-A, No.10, pp.1843-1851 (1988).
- (4) 吉永, 川上: "周期的外力を加えた非線形回路にみられる余次元2の分岐", 電子情報通信学会論文誌掲載予定.
- (5) O.E.Rössler: "Continuous Chaos - Four Prototype Equations", Bifurcation Theory and Applications in Scientific Disciplines, Ann.N.Y.Acad.Sci., Vol.316, pp.376-392(1978).
- (6) R.L.Devaney: "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", (訳, 後藤憲一, "加力力学系入門", 共立出版).

付 録

命題の証明

以下の記述で,

$$d_{\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_m}, \quad \partial_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_m}$$

とする.

陰関数定理により, λ_m の近傍 Λ_m と, そこで定義された関数 $p_m(\lambda)$ が存在し,

$$\bar{p}_m = p_m(\lambda_m), \quad f_{\lambda}^{2^m}(p_m(\lambda)) = p_m(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_m$$

が成り立つ。よって、式(6)より

$$\tau_{\lambda^2}^{m+1}(p_m(\lambda)) = \tau_{\lambda^2}^m(p_m(\lambda)), \quad \lambda \in \Lambda_m.$$

また,

$$\Psi_m'(\bar{p}_m) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore G_m &:= d_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^m(p_m(\lambda)) \\ &= d_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^{m+1}(p_m(\lambda)) \\ &= \partial_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^{m+1}(\bar{p}_m) + \Psi_m'(\bar{p}_m) \cdot p_m'(\lambda_m) \\ &= \partial_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^{m+1}(\bar{p}_m). \end{aligned} \quad (A \cdot 1)$$

一方, $\bar{p}_m$ の近傍 P_m における 2^{m+1} 周期点 x に対し, パラメータ λ を $\lambda = q_m(x)$ で表すことができる (文献(6)定理12.7). すなわち,

$$\lambda_m = q_m(\bar{p}_m), \quad (f_{\lambda_m^2}^{m+1})'(\bar{p}_m) = 1,$$

$$f_{q_m(x)}^{2^{m+1}}(x) = x, \quad x \in P_m \setminus \{\bar{p}_m\}.$$

このとき, つぎが成り立つ:

$$\begin{aligned} G_{m+1} &:= d_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^{m+1}(x) \\ &= \partial_{\lambda} \tau_{\lambda^2}^{m+1}(\bar{p}_m) + \Psi_m'(\bar{p}_m)/q_m'(\bar{p}_m) \end{aligned}$$

ただし, この x は $\lambda = q_m(x)$ を満たす. いま,

$$\Psi_m'(\bar{p}_m) = q_m'(\bar{p}_m) = 0.$$

さらに,

$$q_m''(\bar{p}_m) = -(f_{\lambda_m^2}^{m+1})'''(\bar{p}_m) / \partial_{\lambda} (f_{\lambda^2}^{m+1})'(\bar{p}_m)$$

と書けて, これは仮定より零でない. したがって

$$G_{m+1} = \partial_{\lambda} \tau_{\lambda}^{2^{m+1}}(\bar{p}_m) + \Psi_m''(\bar{p}_m)/q_m''(\bar{p}_m). \quad (A \cdot 2)$$

式(A・1), (A・2)より, 次式を得る:

$$G_{m+1} - G_m = \Psi_m''(\bar{p}_m)/q_m''(\bar{p}_m). \quad (A \cdot 3)$$

ところで, 周期倍分岐列を1つに定めた場合,
 $q_m''(\bar{p}_m)$ の符号は $m(=0, 1, \dots)$ によらず一定である. 他方, λ_m の近くにおける $\varphi_{\lambda}(p_{m+1})$ と $\varphi_{\lambda}(p_m)$ の相対的な位置関係は $G_{m+1} - G_m$ の符号によって決まる. したがって, 式(A・3)より命題が成り立つ. $\square$

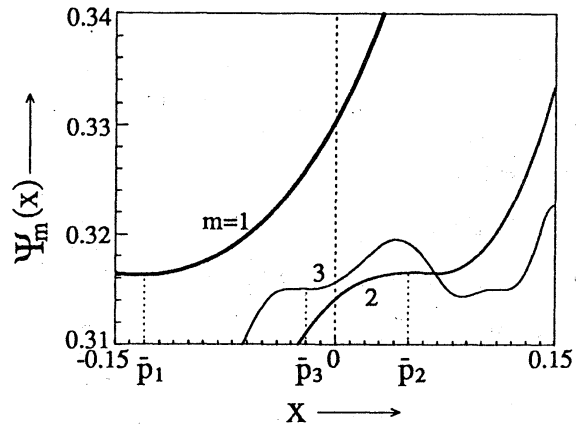


Fig. 1

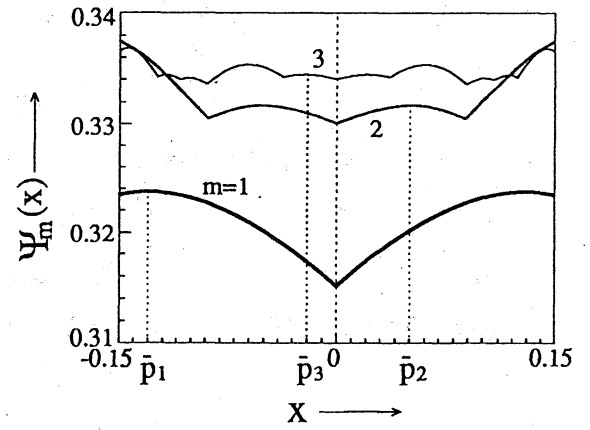


Fig. 2

Table

m	1			2	
	α_m	β_m / α_m	γ_m	$\tilde{\beta}_m / \alpha_m$	$\tilde{\gamma}_m$
7	-2.503	2.007	1.896	-1.996	-1.881
8	-2.503	2.004	1.893	-2.002	-1.888
9	-2.503	2.002	1.892	-1.999	-1.885
10	-2.503	2.001	1.891	-2.001	-1.887
11	-2.503	2.001	1.891	-1.999	-1.884

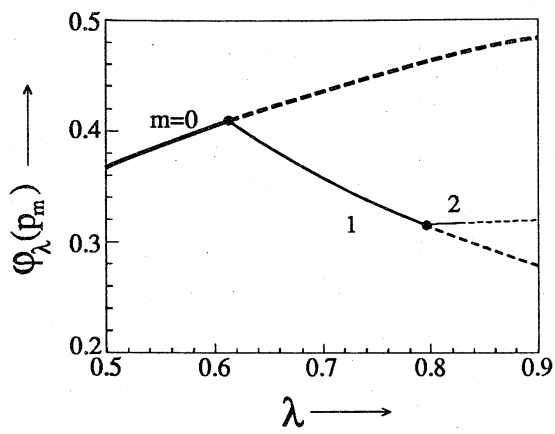


Fig. 3

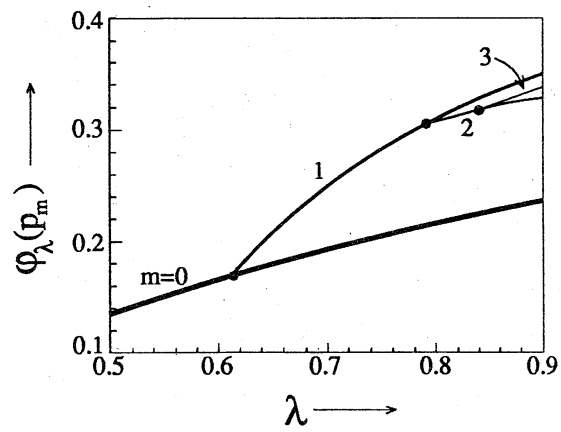


Fig. 5

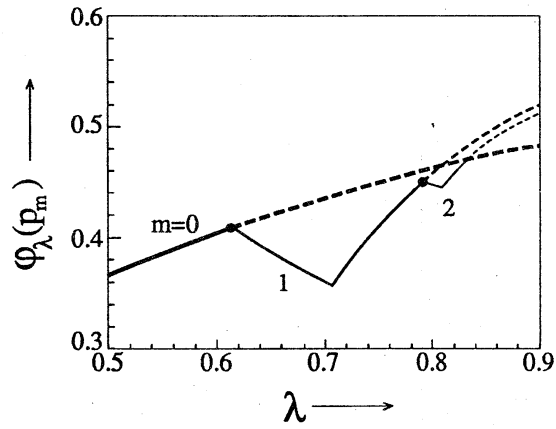


Fig. 4

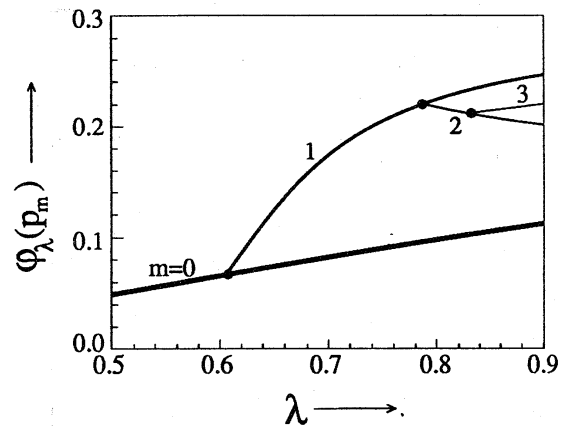


Fig. 6

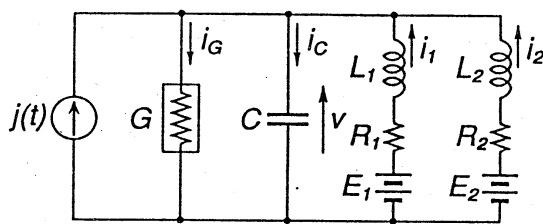


Fig. 7

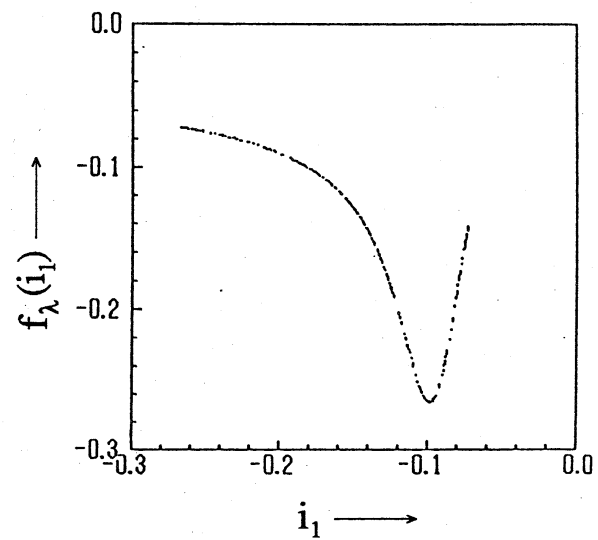


Fig. 9

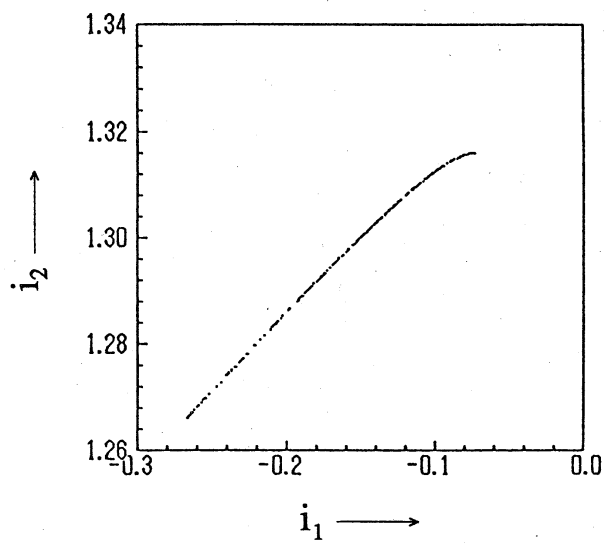


Fig. 8

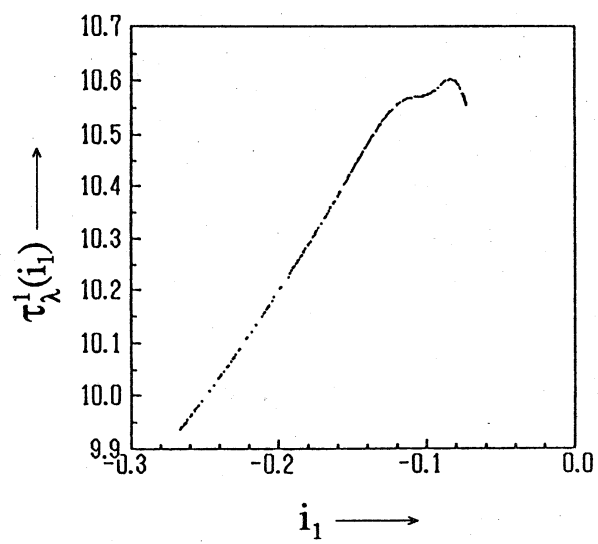
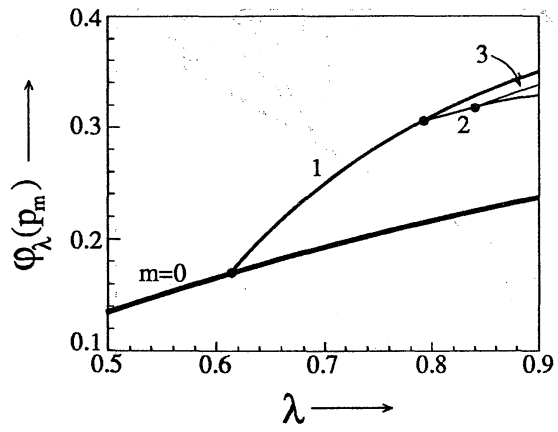
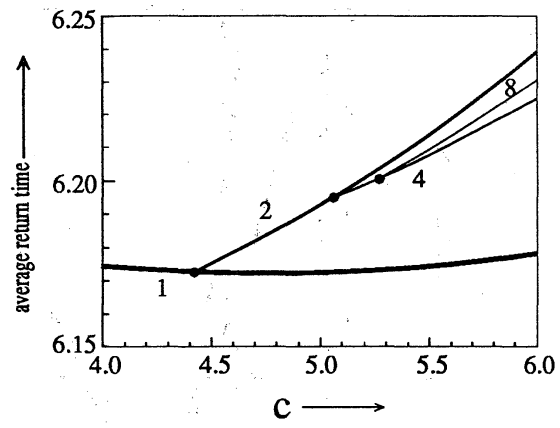


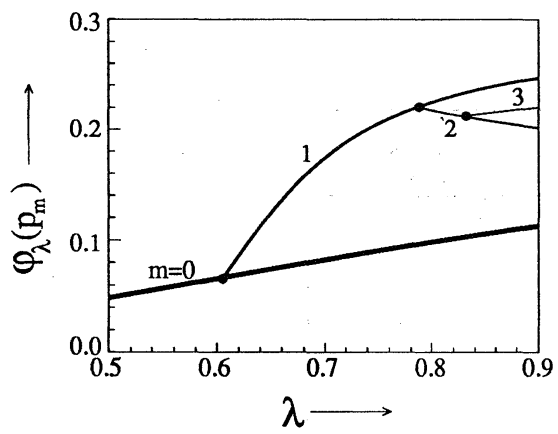
Fig. 10



(a)

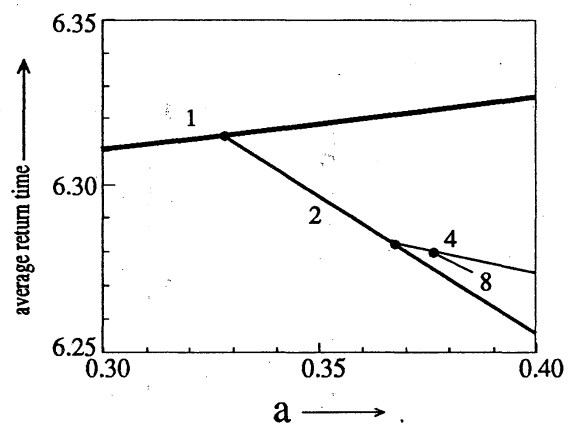


(a)



(b)

Fig. 11



(b)

Fig. 12

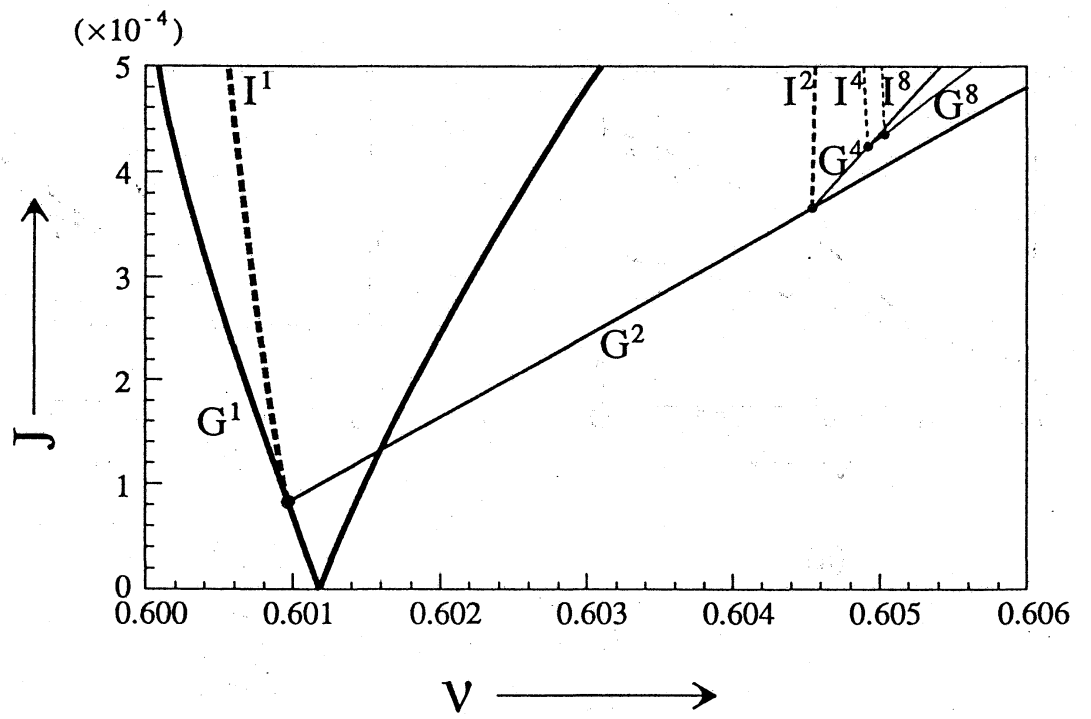


Fig. 13

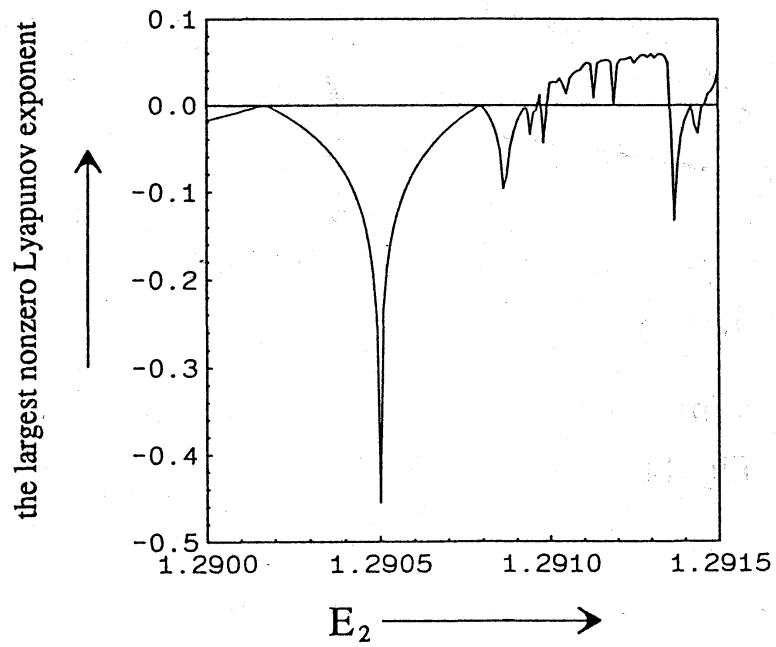


Fig. 14