

ヤコビ・ペロンの算法

陪直交多項式, 一般化 依 戸田 格子

名大・理

名大・工

青本 和彦
Aomoto Kazuhiko

加藤 芳文
Kato Yoshifumi

§0. 2 階の線型差分作用素 (ヤコビ行列) は 連分展開 と関連する. その極限関数を Stieltjes 表示すれば, 密度が ヤコビ行列の スペクトル密度 を定義し, この密度に関する Schmidt の直交化 関数系を用いてヤコビ行列を再現出来る. 以上が差分作用素についての 逆散乱問題 の筋書きである. (これを連続化したものが古典的な 小平-Titchmarsh の定理であった.) [Sz] [Sz] [G] [K]. これは当然高階に拡張可能なものである. 上記は又, 関数の Padé 近似 にも深く関連がある [1]. そのためのアルゴリズムがあるはずである. これが 前世紀から

知られて いた ヤコビ・ペロン 算法 によて
~~なされる~~ [B]. この論稿では これらの いくつか
 の 概念の 関連を示し, さらに この変形
(Lax 型で表示される) が 密度の線型
方程式に他ならぬ事 を示す. 最後周期的
 な場合の 簡単な実例を与える 事にする.
 なお, 広田良吾氏 が 最初 Soliton 解
 を 求められた時, Padé 近似 の考えを
 使われた 様ですが, これとの関係は定かて
 はない. 氏の方法は 多変数の場合も
 暗示 している ように見える. 今後の問題
 であらう([H]参照).

§1. Green 関数

$M, N \geq 0$ を 正整数として 差分系

$$(1) \quad -zu + \sum_{j=i-M}^{j+N} a_{ij} u_j = v_i \quad -\infty < i < \infty$$

$$a_{ij} \in \mathbb{C}$$

を考える. この K 行列 $L = ((a_{ij}))$ は
 $M+N$ 階 線型 差分作用素 を定義
 する. 形式的に $K, (1)$ は

$$(2) \quad (\mathbb{L} - \mathbb{Z})u = v \quad \text{on } l^2(-\infty, \infty)$$

と書かれ、これが解ければ、形式的に

$$(3) \quad u = (\mathbb{L} - \mathbb{Z})^{-1}v$$

と書かれる。以下、次を仮定する。

$$(C1) \quad a_{i, i-M} \neq 0, \quad a_{j, j+N} \neq 0$$

$$-\infty < i < \infty, \quad -\infty < j < \infty$$

(C2) $M', N' \geq 0$, 且 $M' + N' = M + N$ と
なる組 (M', N') に対して, $\mathbb{C}$ のある領域
 Ω 実 $\mathbb{Z}$ に対して,

$$(4) \quad (\mathbb{L} - \mathbb{Z})u = 0$$

を満たす解で, 次のような線型独立な
ものが, 各々 丁度 M', N' 個 存在する:

$$U^{(0)} = \{u_j^{(0)}\}, \dots, U^{(M'-1)} = \{u_j^{(M'-1)}\} \in l^2[0, \infty)$$

$$U^{(M')} = \{u_j^{(M')}\}, \dots, U^{(M'+N'-1)} \in l^2(-\infty, 0]$$

(C2) の条件は $-\infty, \infty$ における境界
条件が 極限実 となる場合と相当
する ([K] 参照).

この時,

補題1. (3)は Green 関数 $G_{ij}(z)$ を用いて次のように表示される.

$$(5) \quad u_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_{ij}(z) u_j$$

ここ G_{ij} は,

$$(6) \quad G_{ij}(z) = \frac{\sum_{\sigma=0}^{M-1} (-1)^{\sigma+1} U_i^{(\sigma)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \sigma-1, \sigma+1, \dots, M+N-1 \\ j-M+1, j-M+2, \dots, j+N-1 \end{bmatrix}}{G_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & M+N-1 \\ j-M, j-M+1, \dots, j+N-1 \end{bmatrix}}$$

$$= \sum_{\sigma=0}^{N-1} \frac{(-1)^{M+\sigma} U_i^{(\sigma+M)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & M+\sigma-1, M+\sigma+1, \dots, M+N-1 \\ j-M+1, j-M+2, \dots, j+N-1 \end{bmatrix}}{G_{j,j-M} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & M+N-1 \\ j-M, j-M+1, \dots, j+N-1 \end{bmatrix}}$$

$i \geq j$

$i < j$

で与えられる. 但し

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_p \\ j_1 & \cdots & j_p \end{bmatrix} \begin{vmatrix} U_{j_1}^{(\alpha_1)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ U_{j_1}^{(\alpha_p)} & \cdots & U_{j_p}^{(\alpha_p)} \end{vmatrix}, \quad 1 \leq p \leq M+N$$

K によって定義するものとする.

以下簡単のため $M=M'=1, N=N'=2$ の場合
に話を限る. (6) は次の形となる.

$$(6)' \quad G_{ij}(z) = \frac{-U_i^{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{a_{jj} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j+1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \quad i \geq j,$$

$$= \frac{-U_i^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix} + U_i^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{a_{jj} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j+1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \quad i < j$$

次節で $(0, \infty)$ 上, 左端が Dirichlet 条件を取り扱う.

§2. $\mathbb{C}$ の閉集合 Γ 上に線型
 独立な 2 個の測度 $d\mu_0, d\mu_1$ が与え
 られているとする. これらの Stieltjes 変換

$$(1) \quad \omega_0(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu_0(\zeta)}{z - \zeta}, \quad \omega_1(z) = \int_{\Gamma} \frac{d\mu_1(\zeta)}{z - \zeta}$$

ω_0, ω_1 は $z = \infty$ において次のような
 Laurent 展開を持つものとする.

$$(2) \quad \omega_0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{0,\nu} \bar{z}^{-\nu-1}, \quad \omega_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{1,\nu} \bar{z}^{-\nu-1}$$

但し

$$(3) \quad C_{\nu,0} = \int_{\Gamma} \zeta^{\nu} \mu_0(d\zeta), \quad C_{\nu,1} = \int_{\Gamma} \zeta^{\nu} \mu_1(d\zeta)$$

これに対して次の条件をおく.

$$(C3) \quad \begin{vmatrix} C_{0,0} & \cdots & C_{2k-1,0} \\ \vdots & & \\ C_{k,0} & \cdots & C_{3k-2,0} \\ C_{0,1} & & C_{2k-1,1} \\ \vdots & & \\ C_{k-1,1} & \cdots & C_{3k-2,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} C_{0,0} & \cdots & C_{2k,0} \\ \vdots & & \\ C_{k,0} & \cdots & C_{3k,0} \\ C_{0,1} & \cdots & C_{2k,1} \\ \vdots & & \\ C_{k-1,1} & \cdots & C_{3k-1,1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(以下この条件を満たすとき $\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)$ は
正則性をみたすと云う)

$$(4) \quad \omega_0 = \frac{u_1}{w_1}, \quad \omega_1 = \frac{v_1}{w_1}$$

(但し $u_1 = 1$ とする)

とおくときは

$$(5)_0 \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \\ w_1 = b_1 x + b_0 x + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots \end{cases}$$

の形に書けるが これに対して $\alpha_1, \beta_1, \beta'_1$ が存在して

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{v_1}{u_1} = \alpha_1 + \frac{v_2}{w_1} \\ \frac{w_1}{u_1} = \beta_1 x + \beta'_1 + \frac{w_2}{w_1} \end{cases}$$

$$\frac{u_1}{w_1} = O(x^{-1}), \quad \frac{v_1}{w_1} = O(x^{-1})$$

と書ける. これを matrix 表示すれば

$$(7) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \alpha_1 \\ & 1 \quad \beta_1 x + \beta'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

しかも u_2, v_2, w_2 は (5) と同じ形に書ける. 以下これが 続行可能とすれば,

$$(8) \quad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \alpha_{n+1} \\ & 1 \quad \beta_{n+1} x + \beta'_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$$

従て $\omega_0 = v_0/u_0$, $\omega_1 = w_0/u_0$ とおけば,

$$(9) \quad \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n(z) & p_{n+1}(z) & p_{n+2}(z) \\ p'_n(z) & p'_{n+1}(z) & p'_{n+2}(z) \\ p''_n(z) & p''_{n+1}(z) & p''_{n+2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

と表示される. 但し $p_n(z)$, $p'_n(z)$, $p''_n(z)$ は
次数が 各々 $n-3$, $n-3$, $n-4$ 次の多項式
であり, 左辺の行列式は 1 である.

$$(10) \quad A_n(z) = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_{n+2} \\ p'_n & p'_{n+1} & p'_{n+2} \\ p''_n & p''_{n+1} & p''_{n+2} \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$$

(11) 従て $A_n(z)^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_n(z) & \tilde{q}_n(z) & \tilde{r}_n(z) \\ \tilde{p}'_n(z) & \tilde{q}'_n(z) & \tilde{r}'_n(z) \\ \tilde{p}''_n(z) & \tilde{q}''_n(z) & \tilde{r}''_n(z) \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{C}[z])$

とおけば $\tilde{p}_n$, $\tilde{q}_n$, $\tilde{r}_n$, $\tilde{p}'_n$, $\tilde{q}'_n$, $\tilde{r}'_n$, $\tilde{p}''_n$,
 $\tilde{q}''_n$, $\tilde{r}''_n$ は 多項式 であり,

$$\deg \tilde{p}_{2k} = k-2, \deg \tilde{p}'_{2k} = k-1, \deg \tilde{p}''_{2k} = k-1,$$

$$\deg \tilde{q}_{2k+1} = k-1, \deg \tilde{q}'_{2k+1} = k, \deg \tilde{q}''_{2k+1} = k-1$$

以上の算法は ヤコビ・ペロンの 算法 に他ならない [B] 参照.

命題 2. 条件 (C3) の下で,

ヤコビ・ペロンの算法はどこまでも続行可能であり、次の Padé 近似が成り立つ.

$$(12) \quad (i) \quad \begin{cases} \omega_0 - \frac{p'_{2k}}{p_{2k}} = O(\bar{x}^{-3k+3}) \\ \omega_1 - \frac{p''_{2k}}{p_{2k}} = O(\bar{x}^{-3k+4}) \end{cases} \quad k \geq 1$$

$$(13) \quad \begin{cases} \omega_0 - \frac{p'_{2k+1}}{p_{2k+1}} = O(\bar{x}^{-3k+2}) \\ \omega_1 - \frac{p''_{2k+1}}{p_{2k+1}} = O(\bar{x}^{-3k+2}) \end{cases} \quad k \geq 1$$

$$(ii) \quad V_n = \tilde{p}_n + \tilde{p}'_n \omega_0 + \tilde{p}''_n \omega_1 \quad \text{と}$$

おけば

$$(14) \quad V_{2k} = O(\bar{x}^{-2k}), \quad V_{2k+1} = O(\bar{x}^{-2k-1})$$

しかも degree を指定された多項式の組 (p_n, p'_n, p''_n) 又は $(\tilde{p}_n, \tilde{p}'_n, \tilde{p}''_n)$ に対して (12), (13), (14) を満たすものはスカラー倍を除いて一意である. この意味で

関数の組 $(1, \omega_0, \omega_1)$ は K. Mahler の意味で完全 (perfect) になっている ([Ma] 参照).
 しかも $\beta_n \neq 0$.

命題3. p_n, p'_n, p''_n は 次の漸化式 (差分系) をみたす:

$$(15) \quad \begin{cases} p_{n+3} = p_n + \alpha_{n+1} p_{n+1} + (\beta_{n+1} \Sigma + \beta'_{n+1}) p_{n+2} \\ p'_{n+3} = p'_n + \alpha_{n+1} p'_{n+1} + (\beta_{n+1} \Sigma + \beta'_{n+1}) p'_{n+2} \\ p''_{n+3} = p''_n + \alpha_{n+1} p''_{n+1} + (\beta_{n+1} \Sigma + \beta'_{n+1}) p''_{n+2} \end{cases}$$

或いは

$$\Sigma p_{n+2} = -\frac{p_n}{\beta_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+1} - \frac{\beta'_{n+1}}{\beta_{n+1}} p_{n+2} + \frac{p_{n+3}}{\beta_{n+1}}$$

すなわち Σ倍作用素 は 次の行列表示

(16) を与える:

$$\Sigma(p_3, p_4, p_5, p_6, \dots) = (p_3, p_4, p_5, p_6, \dots) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{\beta'_2}{\beta_2} & -\frac{\alpha_3}{\beta_3} & -\frac{1}{\beta_4} & 0 & & \\ \frac{1}{\beta_2} & -\frac{\beta'_3}{\beta_3} & -\frac{\alpha_4}{\beta_4} & -\frac{1}{\beta_5} & 0 & \\ 0 & \frac{1}{\beta_3} & -\frac{\beta'_4}{\beta_4} & -\frac{\alpha_5}{\beta_5} & & \\ & 0 & \frac{1}{\beta_4} & & & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

以下 右辺の行列を J とおく. 一方,

p_n, p'_n, p''_n は 双対

の漸化式を満たす：

$$(17) \quad z \cdot \begin{bmatrix} (\tilde{p}'_1 & \tilde{p}''_1) \\ (\tilde{p}'_2 & \tilde{p}''_2) \\ (\tilde{p}'_3 & \tilde{p}''_3) \\ (\tilde{p}'_4 & \tilde{p}''_4) \\ \vdots \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} (\tilde{p}'_1 & \tilde{p}''_1) \\ (\tilde{p}'_2 & \tilde{p}''_2) \\ (\tilde{p}'_3 & \tilde{p}''_3) \\ (\tilde{p}'_4 & \tilde{p}''_4) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

すなわち, $e_{n-3} = p_n$ ($n \geq 3$) と $Q_{n-1}^* = (\tilde{p}'_n, \tilde{p}''_n)$ ($n \geq 1$) とは
双対基底を与える. 実際次が成り立つ:

命題4. $n \geq 1$ において,

$$(18) \quad \tilde{p}_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{p}'_n(\zeta) - \tilde{p}'_n(z)}{\zeta - z} \mu_0(d\zeta) + \int_{\Gamma} \frac{\tilde{p}''_n(\zeta) - \tilde{p}''_n(z)}{\zeta - z} \mu_1(d\zeta)$$

$$(19) \quad V_n(z) = \int_{\Gamma} \frac{\tilde{p}'_n(\zeta) \mu_0(d\zeta)}{\zeta - z} + \int_{\Gamma} \frac{\tilde{p}''_n(\zeta) \mu_1(d\zeta)}{\zeta - z}$$

且つ 陪直交関係

$$(20) \quad \int_{\Gamma} p_n(\zeta) \left\{ \tilde{p}'_m(\zeta) \mu_0(d\zeta) + \tilde{p}''_m(\zeta) \mu_1(d\zeta) \right\} = \delta_{n, m+2} \\ n \geq 3, m \geq 1$$

従って

$$(21) \quad (e_m, (J - z)^{-1} e_m^*) =$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{p_{m+3}(\zeta) (\tilde{p}'_{m+1}(\zeta) \mu_0(d\zeta) + \tilde{p}''_{m+1}(\zeta) \mu_1(d\zeta))}{\zeta - z}$$

と与えられる, $m, n \geq 0$. 或いは,

$$(22) \quad \begin{cases} p_{m+3}(\frac{1}{J}) e_0 = e_m, \\ \tilde{p}'_{m+1}(\frac{1}{J}) e_0^* + \tilde{p}''_{m+1}(\frac{1}{J}) e_1^* = e_n^* \end{cases}$$

が成立する. すなわち 行列 J は $\omega_0 = (e_0, (J - z)^{-1} e_0^*), \omega_1 = (e_0, (J - z)^{-1} e_1^*)$ のみによって一意に決定されている. 又 逆にこれから スペクトル 密度 $\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)$ が 公式 (1) によって 決まる. これが今の場合の 逆散乱問題 及び スペクトル分解 を与える 道筋 である.

問題 A. (12), (13) において p_n, p'_n, p''_n を求めた場合, いかなる $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$(23) \quad \omega_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p'_n}{p_n}, \quad \omega_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p''_n}{p_n}$$

が存在するか? この収束域と J の レゾル

ベント集合とはいかなる関係にあるか? 後に
 ひとつの実例を与える事にする([Me]参照).

§3. 周期的な行列の場合

以下, §1の行列 L は n -周期条件 を
 満たすものとする ($M=1$; $N=2$ は一
 仮定する)

$$(1) \quad a_{i,j} = a_{i+n,j+n}, \quad -\infty < i, j < \infty$$

標準的な方法により, n 次行列 L_h
 を

$$(2) \quad L_h = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & 0 & \cdots & a_{0,n-1} h^{-1} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-2,n} h & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1,n} h, a_{n,n} h & 0 & 0 & a_{n+1,n-2}, a_{n+1,n-1} \end{bmatrix}$$

とおいて ([Mo and Mu] 参照),

$$(3) \quad \det(-\lambda + L_h) = 0$$

の根を h, h', h'' をおく.

今 $|h| < 1, |h'| > 1, |h''| > 1$ とする.

このとき §1(4) の解で 次の条件をみたす

ものか存在する :

$$(4) \quad \begin{cases} U^{(0)} = \{U_j^{(0)}\} & U_{j+n}^{(0)} = h U_j^{(0)}, \\ U^{(1)} = \{U_j^{(1)}\} & U_{j+n}^{(1)} = h' U_j^{(1)}, \\ U^{(2)} = \{U_j^{(2)}\} & U_{j+n}^{(2)} = h'' U_j^{(2)} \end{cases}$$

すなわち $U^{(0)} \in l^2[0, \infty)$; $U^{(1)}, U^{(2)} \in l^2(-\infty, 0]$

これより §1, 公式(6)' によつて $G_{ij}(z)$ が得られる.

次に $|h| < 1$, $|h'| < 1$, $|h''| > 1$ の場合を
考える. このとき $U^{(0)}, U^{(1)} \in l^2[0, \infty)$, $U^{(2)} \in l^2(-\infty, 0]$

だから §1, 公式(6) により

$$(5) \quad G_{ij}(z) = \frac{-U_i^{(0)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix} + U_i^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{G_{j,j-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j-1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \quad i \geq j$$

$$= \frac{U_i^{(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ j & j+1 \end{bmatrix}}{G_{j,j-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ j-1 & j & j+1 \end{bmatrix}} \quad i < j$$

$h h' h'' = 1$ だから これ以外の可能性はない.

(4) の公式を使って $G_{ij}(z)$ は 簡単になる.

$G_{ij}(z)$ は z の代数関数である. 実際,

$|h|=1$ のとき

$$(6) \quad \tilde{u}_i(h) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} u_{i+n\nu} h^{\nu} \quad 0 \leq i \leq n-1$$

と定義すれば, $|h|=1$ 上の n 個の関数系が得られ, 行列 L はこれらについて, 掛け算の行列作用素

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix} \rightarrow L_h \begin{pmatrix} \tilde{u}_0(h) \\ \tilde{u}_1(h) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{n-1}(h) \end{pmatrix}$$

とも見做せる. 従て Green 関数は $(-z + L_h)^{-1}$ に等しい. これを用いて スペクトル(密度)が計算される. その結果, L のスペクトルは Riemann 面 ((3) によて定義された) $\mathcal{L}$ の中で

$$(8) \quad \Gamma : |h|=1$$

と一致する事が証明される. その詳細は省く. h は $\mathbb{C}$ の代数関数であるが, $\mathcal{L}$ はさらに Galois 被覆であるとある. n が偶数ならば, h は次の形に表示される:

$$(9) \quad h = -\varphi(z) + \sqrt[3]{1 - \varphi(z)^3} \quad (\text{戸田曲系線})$$

($\because \varphi$ は $\frac{n}{2}$ 次多項式) 特 $\kern 0.1em$ $n=2$ ならば,

$$(10) \quad h = -z + \sqrt[3]{1 - z^3}$$

$|h| < 1$ なる範囲では

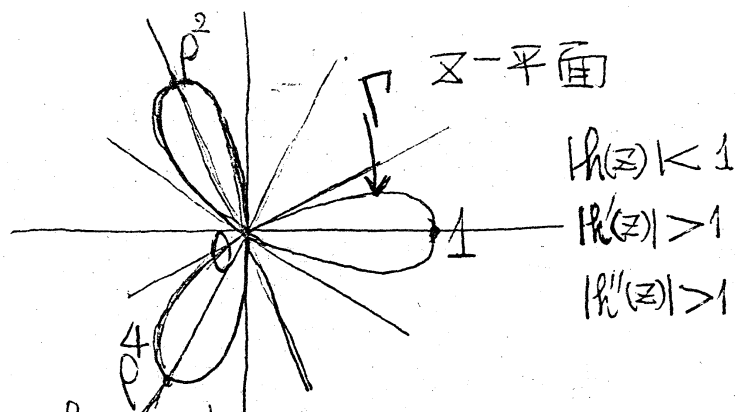
$$(11) \quad \begin{cases} U_j^{(0)} = O(z^{j-1}) \\ U_j^{(0)} = V_{j+1} = \tilde{p}_{j+1}(z) + U_0^{(0)} \tilde{p}'_{j+1}(z) + U_1^{(0)} \tilde{p}''_{j+1}(z) \end{cases}$$

となっており, 対応する ヤコビ行列 J は

$$(12) \quad (\rho^2 - 1) \cdot J = \begin{bmatrix} h'(w), & \rho^2 h'(w) h''(w), & -1 & 0 \\ 1 & -h'(w), & -\rho^2 h'(w) h(w), & \rho^2 \\ 0 & -\rho^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad w \in \mathbb{C}$$

なお $|h|=1$ なる軌跡を z -平面で表示すれば 下図のような概略となる.



§ 4. Lax 表示

§ 2 において 陪直交基底 $\{e_n\}, \{e_n^*\}$ を定義した。これに 順序 を導入する：

$$(1) \quad \begin{aligned} e_0 < e_1 < e_2 < e_3 < \dots \\ e_0^* < e_1^* < e_2^* < e_3^* < \dots \end{aligned}$$

すると、作用素 A に対して $A^{(+)}, A^{(-)}$ が次のように定義出来る

$$(2) \quad (e_n, A^{(+)} e_m^*) = (e_n, A e_m^*) \quad m > n$$

$$\frac{1}{2} (e_n, A e_n^*) \quad m = n$$

$$0 \quad m < n$$

$$(3) \quad A^{(-)} = A - A^{(+)},$$

この時 次の一般的事実が成り立つ。

命題 5. J が 時間 t に 依存しているものとし、

$$(4) \quad \dot{J} = [J, f(t, J)^{(+)}) - f(t, J)^{(-)}]$$

を満たすとする. この時 J のスペクトル密度
 $\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)$ は 線型方程式

$$(5) \quad \frac{d}{dt} (\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta)) = f(t, \zeta) (\mu_0(d\zeta), \mu_1(d\zeta))$$

を満たす. 又 逆も成り立つ.

この命題は Lax 定式化 の 普遍
 (作用素の)
 的特徴を表わしている ([A], [K] 参照).
 これが いかなる意味で "一般化" 出来るか
 は 又 別の機会に ゆずりたい.

文献

[S₁] M.H. Stone, Linear transformations in
 Hilbert space and their applications
 to analysis, A.M.S., 1932.

[S₂] G. Szegő, Orthogonal polynomials,
 A.M.S. 1959.

[G] F.R. Gantmacher and M.G. Krein
 Oscillation matrices and kernels and
 small vibrations of dynamical systems,

Moscow, 1959.

[Kc] K. Kodaira, On ordinary differential equations of any order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., 72(1950), 502-544.

[B] L. Bernstein, The Jacobi-Perron algorithm, its theory and application, Springer Lec. Notes 207(1971)

[H] R. Hirota, Direct methods in Soliton theory, Current Topics in Physics, Springer Verlag, Vol. 17 (1980).

[Ma] K. Mahler, Zur Approximationen der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II Crelle J. 166(1932), 118-136

——, Lectures on transcendental numbers, Springer Lec. Notes 546 (1976)

[Me] S. N. Mergelyan, Uniform approximation of functions of complex variables, Uspehi, Mat. Nauk 7(1952), 31-122

[Mo] P. Van Moerbeke and D. Mumford, The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta. Math. Vol. 143(1979)

93-154

[A] K. Aomoto Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Pub., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators, Transl. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math. Bd 26 (1902), 333-351.

[Mc] H.P. McKean, Boussinesq's equation on the circle, Conant Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお、竹中茂氏、渡辺敏弘氏には有役な情報をいただいた。

93-154

[A] K. Aomoto Lax equation and the spectral density of Jacobi matrices for orthogonal polynomials, (preprint 1981).

[Ka] Y. Kato On the spectral density of periodic Jacobi matrices, to appear in World Sci. Publ., 1982.

[Be, 2] J.M. Berezanski, Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators, Transl. 17 (1968)

[Mi] H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Acta Math. Bd 26 (1902), 333-351.

[F] H.P. McKean, Boussinesq's equation on the circle, Convent Inst. of Math. Sci., 1980.

[Ch] G.V. Chudonovsky, The inverse scattering problem and applications to arithmetics, Lec. Notes in Physics, 120 (Springer 1980)

なお、竹中茂氏、渡辺敏弘氏には有役な情報をいただいた。